中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 12 期: 1939～1956
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

带约束无穷多凸不等式系统解集法锥的表示公式及应用

献给吴从炘教授 85 华诞

郑喜印

云南大学数学与统计学院, 昆明 650504
E-mail: xyzheng@ynu.edu.cn

收稿日期: 2020-05-11; 接受日期: 2020-07-02; 网络出版日期: 2020-12-16
国家自然科学基金 (批准号: 11771384) 资助项目

摘要 本文改进 Cabot 和 Thibault (2014) 关于一个凸不等式解集法锥的结果, 给出了带约束无穷多凸不等式解集法锥的表示公式. 作为应用, 本文引进并研究了半无穷凸优化问题的近似 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 点. 特别地, 没有任何约束规格限制, 本文通过近似 KKT 点给出了半无穷凸优化问题解集的表述公式. 此外, 在 Slater 条件下, 本文建立了半无穷凸优化问题近似 KKT 点集的稳定性.

关键词 水平集 法锥 次微分 近似 KKT 点

MSC (2010) 主题分类 52A41, 49J52, 90C25

1 引言

切锥和法锥是变分分析中两个基本概念和工具. 特别地, 水平集的法锥公式已被广泛研究并被用于建立约束优化问题的充分或必要条件. 例如, 如果 Banach 空间 X 上的正常下半连续广义实值凸函数 φ 满足 Slater 条件 (即不等式 $\varphi(x) < 0$ 可解) 且 $\varphi(\bar{x}) = 0$, 那么水平集 $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_-)$ 在 $\bar{x}$ 点的法锥 $N(\varphi^{-1}(\mathbb{R}_-), \bar{x})$ 有如下公式 (参见文献 [1, 定理 23.7]):

$$N(\varphi^{-1}(\mathbb{R}_-), \bar{x}) = \mathbb{R}_+ \partial\varphi(\bar{x}), \tag{1.1}$$

这里 $\partial\varphi(\bar{x})$ 表示 φ 在 $\bar{x}$ 点的次微分. 在 $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 且 $\bar{x}$ 是 φ 的非临界点情形下, 等式 (1.1) 回归到基本的几何结果: φ 在 $\bar{x}$ 点的梯度垂直于光滑曲面 $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = \varphi(\bar{x})\}$. 近年来, 没有 Slater 条件, 但要求空间 X 是自反的, Cabot 和 Thilbault 建立了下面的公式 (参见文献 [2, 定理 3.1 和 3.5]).

英文引用格式: Zheng X Y. Formulas and applications for the normal cone to the solution set of an infinite convex inequality system with a constraint (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1939–1956, doi: 10.1360/SSM-2020-0147

© 2020《中国科学》杂志社

定理 1.1 [2] 设 X 是自反 Banach 空间, $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是正常下半连续凸函数, 并设 $\bar{x} \in \mathrm{dom}(\varphi)$ 使得 $\varphi(\bar{x}) = 0$, 则

$$N(\varphi^{-1}(\mathbb{R}_-), \bar{x}) = \limsup_{x \to \bar{x}, r \geqslant 0, r\varphi(x) \to 0} r\partial\varphi(x). \tag{1.2}$$

此外, 若 $\bar{x} \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(\varphi))$, 则

$$N(\varphi^{-1}(\mathbb{R}_-), \bar{x}) = \limsup_{x \xrightarrow{X \setminus \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-)} \bar{x}} \mathbb{R}_+\partial\varphi(x). \tag{1.3}$$

本文的主要目的是将 (1.2) 和 (1.3) 推广到带约束无穷多凸不等式系统.

给定 Banach 空间 X 和紧 Hausdorff 拓扑空间 T, 设 Ω 是 X 的闭凸集且 $\varphi : X \times T \to \mathbb{R}$ 是满足如下条件的实值函数:

(A1) 对每个 $x \in X$, 函数 $t \mapsto \varphi(x, t)$ 连续;

(A2) 对每个 $t \in T$, $x \mapsto \varphi_t(x) := \varphi(x, t)$ 是连续凸函数. 考虑下面无穷多凸不等式系统:

$$\varphi(x, t) \leqslant 0, \quad \forall\, t \in T, \quad \text{s.t. } x \in \Omega. \tag{1.4}$$

系统 (1.4) 常出现在优化问题中. 特别地, 当 X 是有限维空间时, (1.4) 恰是下面半无穷优化问题 (semi-infinite programming, SIP) 的约束系统:

$$\text{(SIP)} \qquad \begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.t.}\ \ \varphi(x, t) \leqslant 0, \quad \forall\, t \in T, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

半无穷优化被公认在理论和应用方面都是重要的, 并被广泛研究 (参见文献 [3–8]).

贯穿本文, 令 $S(\varphi, \Omega)$ 表示系统 (1.4) 的解集, 即

$$S(\varphi, \Omega) := \{x \in \Omega : \varphi(x, t) \leqslant 0, \forall\, t \in T\},$$

并令 $T_\varphi(\bar{x})$ 表示 (1.4) 在 $\bar{x} \in S(\varphi, \Omega)$ 的活跃指标集, 即

$$T_\varphi(\bar{x}) := \Big\{t \in T :\ \varphi(\bar{x}, t) = \sup_{t' \in T} \varphi(\bar{x}, t') = 0\Big\}.$$

为方便起见, 令

$$S_-(\varphi, \Omega) := \{x \in \Omega : \varphi(x, t) < 0, \forall\, t \in T\}$$

和

$$S_0(\varphi, \Omega) := \{x \in S(\varphi, \Omega) : \text{存在 } t \in T \text{ 使得 } \varphi(x, t) = 0\}.$$

显然, $S(\varphi, \Omega) = S_-(\varphi, \Omega) \cup S_0(\varphi, \Omega)$, 且 $\bar{x} \in S_-(\varphi, \Omega) \Rightarrow T_\varphi(\bar{x}) = \emptyset$. 在一些定理中, 我们会使用如下假设 (Slater 条件):

(A3) 对每个 $\hat{t} \in T$, 存在 $x_{\hat{t}} \in S(\varphi, \Omega)$, 使得 $\varphi(x_{\hat{t}}, \hat{t}) < 0$.

我们使用 $C(T, \mathbb{R})$ 表示 T 上所有连续实值函数构成的 Banach 空间, 其上装备如下范数:

$$\|u\| = \max_{t \in T} |u(t)|, \quad \forall\, u \in C(T, \mathbb{R}).$$

令 Σ^+ 表示 $C(T,\mathbb{R})$ 上所有非负连续线性泛函构成的集合, 那么由 Riesz 表示定理可知, Σ^+ 恰由 T 上所有正则非负 Borel 测度组成. 对于 $\mu\in\Sigma^+$ 和 $A\subset T$, 我们称 A 包含测度 μ 的支撑, 记为 $\operatorname{supp}(\mu)\subset A$, 若对 T 的任意 Borel 子集 B 都有 $\mu(B)=\mu(A\cap B)$; 显然, $\operatorname{supp}(\mu)\subset A$ 等价于 $\mu(T\setminus A)=0$. 记 Σ_0^+ 为 T 上所有具有限支撑的正则非负 Borel 测度集, 即

$$\Sigma_0^+:=\{\mu\in\Sigma^+:\exists\, t_1,\ldots,t_n\in T \text{ s.t. } \operatorname{supp}(\mu)\subset\{t_1,\ldots,t_n\}\}.$$

对于 $x\in X$ 和 $t\in T$, 定义 $\varphi_x:T\to\mathbb{R}$ 和 $\varphi_t:X\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\varphi_x(t'):=\varphi(x,t'),\quad \forall\, t'\in T$$

且

$$\varphi_t(x'):=\varphi(x',t),\quad \forall\, x'\in X.$$

回顾上极限

$$\limsup_{x\xrightarrow{\Omega\setminus S(\varphi,\Omega)}\bar{x},\mu\in\Sigma_0^+,\langle\mu,\varphi_x\rangle\to 0}\int_T\partial\varphi(\cdot,t)(x)d\mu(t)$$

是所有具有如下性质的 x^* 构成的集合: 存在共轭空间 X^* 中的序列 $\{x_n^*\}$ 及 $(\Omega\setminus S(\varphi,\Omega))\times\Sigma_0^+$ 中的序列 $\{(x_n,\mu_n)\}$, 使得

$$x_n^*\in\int_T\partial\varphi_t(x_n)d\mu_n(t),\quad x_n\to\bar{x},\quad x_n^*\to x^*\quad \text{和}\quad \langle\mu_n,\varphi_{x_n}\rangle=\int_T\varphi(x_n,t)d\mu_n(t)\to 0;$$

而 w^*-$\limsup_{x\to\bar{x},\mu\in\Sigma^+,\langle\mu,\varphi_x\rangle\to 0}\int_T\partial\varphi(\cdot,t)(x)d\mu(t)$ 表示所有具有如下性质的 x^* 构成的集合: 存在 X^* 中的序列 $\{x_n^*\}$ 及 $X\times\Sigma^+$ 中的序列 $\{(x_n,\mu_n)\}$ 使得

$$x_n^*\in\int_T\partial\varphi_t(x_n)d\mu_n(t),\quad x_n\to\bar{x},\quad x_n^*\xrightarrow{w^*}x^*\quad \text{和}\quad \langle\mu_n,\varphi_{x_n}\rangle\to 0.$$

在 X 是自反 Banach 空间且假设 (A1) 和 (A2) 成立的条件下, 第 3 节给出了 (1.4) 解集 $S(\varphi,\Omega)$ 在其中一点 $\bar{x}$ 处的如下法锥公式:

$$\begin{aligned}N(S(\varphi,\Omega),\bar{x})&=\limsup_{x\xrightarrow{\Omega\setminus S(\varphi,\Omega)}\bar{x},\mu\in\Sigma_0^+,\langle\mu,\varphi_x\rangle\to 0}\left(\int_T\partial\varphi(\cdot,t)(x)d\mu(t)+N(\Omega,x)\right)\\&=w^*\text{-}\limsup_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x},\mu\in\Sigma^+,\langle\mu,\varphi_x\rangle\to 0}\left(\int_T\partial\varphi(\cdot,t)(x)d\mu(t)+N(\Omega,x)\right).\end{aligned}$$

当空间 X 是有限维时, 可以获得 $N(S(\varphi,\Omega),\bar{x})$ 更好的表示公式.

KKT 条件是优化理论中基础性的重要概念, 在最优性条件和算法的构造中有非常重要的作用 (参见文献 [9–11]). 第 4 节考虑半无穷凸优化问题 (SIP) 的 KKT 点和近似 KKT 点. 令 $\Lambda(f,\varphi,\Omega)$ 表示 (SIP) 所有 KKT 点构成的集合, 那么 Slater 条件 (A3) 意味着半无穷凸优化问题 (SIP) 的解集 $\mathcal{S}(f,\varphi,\Omega)$ 等于 $\Lambda(f,\varphi,\Omega)$. 没有 Slater 条件 (A3), $\Lambda(f,\varphi,\Omega)$ 可以是解集 $\mathcal{S}(f,\varphi,\Omega)$ 的真子集. 此外, 对一些约束优化问题, 找 KKT 点可能相当困难. 这促使我们考虑近似 KKT 点, 并研究什么条件能保证近似 KKT 点的迭代序列收敛到 KKT 点. 给定 $\bar{x}\in\Omega$ (不必是 (SIP) 的可行点) 及 $\varepsilon\geqslant 0$, 我们采用 (SIP) 如下意义的 ε-KKT 点: 存在 ε- 活跃指标 $t_1,\ldots,t_{m+1}$ 和非负数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+1}$, 使得

$$0\in\partial f(\bar{x})+\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i\partial\varphi_{t_i}(\bar{x})+N(\Omega,\bar{x})+\varepsilon B_{X^*},\tag{1.5}$$

这里 $m := \dim(X)$ 是 X 的维数. 作为第 3 节主要结果的应用, 没有任何约束规格限制, 我们通过近似 KKT 点给出了 (SIP) 解集 $S(f,\varphi,\Omega)$ 的表示公式. 此外, 在 Slater 条件 (A3) 下, 我们建立了 (SIP) 近似 KKT 点集的稳定性结果.

2 预备知识

给定赋范空间 X 的闭凸子集 A 及 $\bar{x}\in A$, $T(A,\bar{x})$ 和 $N(A,\bar{x})$ 分别表示 A 在 $\bar{x}$ 点的切锥和法锥, 它们的定义如下:

$$T(A,\bar{x}) := \mathrm{cl}\left(\bigcup_{t>0}\frac{A-\bar{x}}{t}\right) \quad 和 \quad N(A,\bar{x}) = T(A,\bar{x})^{\mathrm{o}} := \{x^*\in X^* : \langle x^*,h\rangle \leqslant 0, \forall\, h\in T(A,\bar{x})\}.$$

设 $f: X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是正常的下半连续凸函数, f 在 $x\in\mathrm{dom}(f)$ 点的次微分是如下集合:

$$\partial f(x) := \{x^*\in X^* : \langle x^*,h\rangle \leqslant f(x+h)-f(x), \forall\, h\in X\}.$$

关于次微分和法锥, 我们需要下面的已知基本结果 (参见文献 [12–14]).

引理 2.1 设 f 是 Banach 空间 X 上的正常下半连续凸函数, 且 $\bar{x}\in\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$, 则

$$d^+f(\bar{x})(h) := \lim_{t\to 0^+}\frac{f(\bar{x}+th)-f(\bar{x})}{t} = \sup\{\langle x^*,h\rangle : x^*\in\partial f(\bar{x})\}, \quad \forall\, h\in X.$$

引理 2.2 设 A_1 和 A_2 是 Banach 空间 X 的闭凸子集, 且 $\mathrm{int}(A_1)\cap A_2\neq\emptyset$, 则

$$N(A_1\cap A_2,x) = N(A_1,x)+N(A_2,x), \quad \forall\, x\in A_1\cap A_2.$$

引理 2.3 设 X 是自反 Banach 空间, 并设 X 中的闭凸子集序列 $\{C_n\}$ Mosco 收敛于闭凸集 C, 则对任意的 $x\in C$ 及 $x^*\in N(C,x)$, 存在 $X\times X^*$ 中的序列 $\{(x_n,x_n^*)\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,x_n^*) = (x,x^*) \quad 和 \quad x_n^*\in N(C_n,x_n), \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

引理 2.3 有时被称为 Attouch 定理 (参见文献 [2]), 它在主要定理的证明中起关键作用.

给定 Banach 空间 X 和 Y, 多值映射 $\Phi: X\rightrightarrows Y$ 被称为是凸 (或闭) 的, 若它的图

$$\mathrm{gph}(\Phi) := \{(x,y)\in X\times Y : y\in\Phi(x)\}$$

是乘积空间 $X\times Y$ 的凸 (或闭) 子集. 回顾多值映射 Φ 在 $(\bar{x},\bar{y})\in\mathrm{gph}(\Phi)$ 点的广义对偶导数 (coderivative) $D^*F(\bar{x},\bar{y})$ 是如下从 Y^* 到 X^* 的次线性多值映射:

$$D^*\Phi(\bar{x},\bar{y})(y^*) := \{x^*\in X^* : (x^*,-y^*)\in N(\mathrm{gph}(\Phi),(\bar{x},\bar{y}))\}, \quad \forall\, y^*\in Y^*.$$

而 Φ 被称在 $(\bar{x},\bar{y})$ 点是度量次正则的, 若存在 $\kappa,\delta\in(0,+\infty)$ 使得

$$d(x,\Phi^{-1}(\bar{y}))\leqslant\kappa d(\bar{y},\Phi(x)), \quad \forall\, x\in B(\bar{x},\delta).$$

下面关于度量次正则的引理 (参见文献 [15]) 对主要引理的证明是非常有用的.

引理 2.4 [15] 设 Φ 是 Banach 空间 X 与 Y 之间的闭凸多值映射, 若 Φ 在 $(\bar{x},\bar{y})\in\mathrm{gph}(\Phi)$ 点是度量次正则的, 则 $N(\Phi^{-1}(\bar{y}),\bar{x}) = D^*\Phi(\bar{x},\bar{y})(Y^*)$.

给定多值映射 $M: T \rightrightarrows X$ 和 T 上的 Borel 测度 μ, 我们采用下面的符号:

$$\int_T M(t)d\mu(t) := \left\{ \int_T g(t)d\mu(t) : g \in \mathcal{L}^1(T,\mu) \text{ 和 } g(t) \in M(t), \forall\, t \in T \right\},$$

这里 $\mathcal{L}^1(T,\mu)$ 表示所有 μ- 可积单值映射 $g: T \to X$ 构成的空间. 下面的引理通常称为 Ioffe-Levin 定理 (参见文献 [16, 命题 4.5.2] 和 [9, 定理 2.7.2]).

引理 2.5 设 X 和 T 分别是 Banach 空间和紧 Hausdorff 拓扑空间, 函数 $\varphi: X \times T \to \mathbb{R}$ 满足假设 (A1) 和 (A2), 并设

$$I_\varphi(x) := \int_T \varphi(x,t)d\mu(t) \quad \text{和} \quad M_\varphi(x) := \max_{t\in T} \varphi(x,t), \quad \forall\, x \in X,$$

则下列性质成立:

(i) $\partial M_\varphi(x) = \mathrm{cl}^*(\mathrm{co} \bigcup_{t\in T(x)} \partial\varphi(\cdot,t)(x))$, $\forall\, x \in X$;

(ii) 若 T 是可度量的, 则 $\partial I_\varphi(x) = \int_T \partial\varphi(\cdot,t)(x)d\mu(t)$, $\forall\, x \in X$.

3 解集法锥的表示公式

本节 X 和 T 分别表示 Banach 空间和紧 Hausdorff 拓扑空间, Ω 是 X 的非空闭凸子集, 并且 φ 是 $X \times T$ 上的实值函数. 回顾关于 φ 和 Ω 的如下假设:

(A1) 对每个 $x \in X$, 函数 $t \mapsto \varphi_x(t) := \varphi(x,t)$ 是连续的;

(A2) 对每个 $t \in T$, $x \mapsto \varphi_t(x) := \varphi(x,t)$ 是连续凸函数;

(A3) 对每个 $\hat{t} \in T$, 存在 $x_{\hat{t}} \in S(\varphi,\Omega)$ 使得 $\varphi(x_{\hat{t}},\hat{t}) < 0$.

已知并且容易验证 (A1) 和 (A2) 意味着下面的 Lipschitz 性质成立: 对任意的 $\bar{x} \in X$, 存在 $L, \delta \in (0,+\infty)$ 使得

$$|\varphi(x_1,t) - \varphi(x_2,t)| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in B(\bar{x},\delta) \quad \text{和} \quad \forall\, t \in T. \tag{3.1}$$

在 Slater 条件 (A3) 下, 凸无穷约束系统 (1.4) 解集 $S(\varphi,\Omega)$ 的切锥和法锥有如下表示公式.

引理 3.1 设 $\bar{x} \in S(\varphi,\Omega)$, 并且满足 (A1)–(A3), 则

$$T(S(\varphi,\Omega),\bar{x}) = \{h \in T(\Omega,\bar{x}) : d^+\varphi_t(\bar{x})(h) \leqslant 0, \forall\, t \in T_\varphi(\bar{x})\} \tag{3.2}$$

且

$$N(S(\varphi,\Omega),\bar{x}) = \bigcup_{\mu\in\Sigma^+} \partial\left(\int_{T_\varphi(\bar{x})} \varphi(\cdot,t)d\mu(t) \right)(\bar{x}) + N(\Omega,\bar{x}) \tag{3.3a}$$

$$= \mathrm{cl}^{w^*}\left(\sum_{t\in T_\varphi(\bar{x})} \mathbb{R}_+\partial\varphi_t(\bar{x}) \right) + N(\Omega,\bar{x}), \tag{3.3b}$$

这里

$$\sum_{t\in T_\varphi(\bar{x})} \mathbb{R}_+\partial\varphi_t(\bar{x}) := \bigcup_{n\in\mathbb{N},t_1,\ldots,t_n\in T_\varphi(\bar{x})} \sum_{i=1}^n \mathbb{R}_+\partial\varphi_{t_i}(\bar{x}),$$

并且每当 $T_\varphi(\bar{x}) = \emptyset$ 时 $\partial(\int_{T_\varphi(\bar{x})} \varphi(\cdot,t)d\mu(t))(\bar{x})$ 和 $\sum_{t\in T_\varphi(\bar{x})} \mathbb{R}_+\partial\varphi_t(\bar{x})$ 均被理解为 $\{0\}$. 此外, 若紧空间 T 是可度量的, 则

$$N(S(\varphi,\Omega),\bar{x}) = \left\{ \int_{T_\varphi(\bar{x})} \partial\varphi_t(\bar{x})d\mu(t) : \mu \in \Sigma^+ \right\} + N(\Omega,\bar{x}). \tag{3.4}$$

证明 首先证明 $S_-(\varphi,\Omega)\neq\emptyset$. 由 (A1) 和 (A3) 知, 对任意的 $t\in T$, 存在 $x_t\in S(\varphi,\Omega)$ 及 t 的开邻域 V_t, 使得 $\inf_{t'\in V_t}\varphi(x_t,t')<0$. 因为 T 是紧的且 $T=\bigcup_{t\in T}V_t$, 所以, 存在 $t_1,\ldots,t_n\in T$ 使得 $T=\bigcup_{i=1}^n V_{t_i}$. 记 $\hat{x}:=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{t_i}$, 则对任意的 $t'\in T$, 存在 $1\leqslant i'\leqslant n$, 使得 $t'\in V_{t_{i'}}$ 且

$$\varphi(\hat{x},t')\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\varphi(x_{t_i},t')\leqslant\frac{\varphi(x_{t_{i'}},t')}{n}<0$$

(上面第一和第二个不等式成立分别因为 $\varphi_{t'}$ 的凸性和 $x_{t_i}\in S(\varphi,\Omega)$), 所以, $\hat{x}\in S_-(\varphi,\Omega)$. 这证明 $S_-(\varphi,\Omega)\neq\emptyset$. 注意到 $S_-(\varphi,\Omega)\subset\operatorname{int}(S(\varphi,X))\cap\Omega$ 和 $S(\varphi,\Omega)=S(\varphi,X)\cap\Omega$, 引理 2.2 意味着

$$N(S(\varphi,\Omega),\bar{x})=N(S(\varphi,X),\bar{x})+N(\Omega,\bar{x}).$$

这样, 为证明 (3.3a) 和 (3.3b), 只需证明

$$N(S(\varphi,X),\bar{x})=\bigcup_{\mu\in\Sigma^+}\partial\Big(\int_{T_\varphi(\bar{x})}\varphi(\cdot,t)d\mu(t)\Big)(\bar{x})=\mathrm{cl}^{w^*}\Big(\sum_{t\in T_\varphi(\bar{x})}\mathbb{R}_+\partial\varphi_t(\bar{x})\Big).\tag{3.5}$$

当 $\bar{x}\in S_-(\varphi,\Omega)$ 时, $\bar{x}\in\operatorname{int}(S(\varphi,X))$ 且 $T_\varphi(\bar{x})=\emptyset$, 所以, (3.5) 平凡成立. 下面假设 $\bar{x}\in S_0(\varphi,\Omega)$, 即 $T_\varphi(\bar{x})\neq\emptyset$. 定义 $\Phi:X\rightrightarrows C(T,\mathbb{R})$ 如下:

$$\Phi(x):=\{u\in C(T,\mathbb{R}):\varphi(x,t)\leqslant u(t),\forall\,t\in T\},\quad\forall\,x\in X.$$

那么 $S(\varphi,X)=\Phi^{-1}(0)$, (A1) 和 (A2) 意味着 Φ 是闭凸多值映射, 并且 $S_-(\varphi,\Omega)\neq\emptyset$ 意味着 $0\in\operatorname{int}(\Phi(X))$. 这和 Robinson-Ursescu 定理表明, Φ 在 $(\bar{x},0)$ 点是度量正则的, 从而是度量次正则的. 这样, 由引理 2.4, 可得 $N(S(\varphi,X),\bar{x})=D^*\Phi(\bar{x},0)(C(T,\mathbb{R})^*)$. 我们断言

$$D^*\Phi(\bar{x},0)(C(T,\mathbb{R})^*)=\bigcup_{\mu\in\Sigma^+}\partial\Big(\int_{T_\varphi(\bar{x})}\varphi(\cdot,t)d\mu(t)\Big)(\bar{x}).\tag{3.6}$$

设 $\mu\in C(T,\mathbb{R})^*$, 即 μ 是 T 上的正则 Borel 测度, 则 $x^*\in D^*\Phi(\bar{x},0)(\mu)$ 等价于 $(x^*,-\mu)\in N(\operatorname{gph}(\Phi),(\bar{x},0))$, 即

$$\langle x^*,x-\bar{x}\rangle-\langle\mu,\varphi(x,\cdot)+u\rangle\leqslant 0,\quad\forall\,(x,u)\in X\times C_+(T,\mathbb{R}).$$

所以, $x^*\in D^*\Phi(\bar{x},0)(\mu)$ 等价于

$$\mu\in\Sigma^+\quad\text{和}\quad\langle x^*,x-\bar{x}\rangle-\int_T\varphi(x,t)d\mu(t)\leqslant 0,\quad\forall\,x\in X.$$

取 $x=\bar{x}$, 即得

$$0\leqslant\int_T\varphi(\bar{x},t)d\mu(t)=\int_{T\setminus T_\varphi(\bar{x})}\varphi(\bar{x},t)d\mu(t)+\int_{T_\varphi(\bar{x})}\varphi(\bar{x},t)d\mu(t)=\int_{T\setminus T_\varphi(\bar{x})}\varphi(\bar{x},t)d\mu(t).$$

注意到

$$\varphi(\bar{x},t)=0,\quad\forall\,t\in T_\varphi(\bar{x})\quad\text{和}\quad\varphi(\bar{x},t)<0,\quad\forall\,t\in T\setminus T_\varphi(\bar{x}),$$

这意味着 $\mu(T\setminus T_\varphi(\bar{x}))=0$. 所以,

$$x^*\in D^*\Phi(\bar{x},0)(\mu)\quad\Leftrightarrow\quad\mu\in\Sigma^+\quad\text{和}\quad\langle x^*,x-\bar{x}\rangle\leqslant\int_{T_\varphi(\bar{x})}\varphi(x,t)d\mu(t),\quad\forall\,x\in X.$$

因为 $\int_{t\in T_\varphi(\bar{x})}\varphi(\bar{x},t)d\mu(t)=0$, 这表明 (3.6) 成立. 另一方面, 因为 $S(\varphi,X)=M_\varphi^{-1}(-\mathbb{R}_+)$ 且 $M_\varphi(\bar{x})=0$, $S_-(\varphi,\Omega)\neq\emptyset$ 和 (1.1) 意味着 $N(S(\varphi,X),\bar{x})=\mathbb{R}_+\partial M_\varphi(\bar{x})$, 这里 M_φ 是引理 2.5 所定义的函数. 这样, 由引理 2.5, 可得

$$N(S(\varphi,X),\bar{x})=\mathbb{R}_+\mathrm{cl}^*\Big(\mathrm{co}\bigcup_{t\in T_\varphi(\bar{x})}\partial\varphi(\cdot,t)(\bar{x})\Big),$$

所以, $N(S(\varphi,X),\bar{x})\subset\mathrm{cl}^{w^*}(\sum_{t\in T_\varphi(\bar{x})}\mathbb{R}_+\partial\varphi_t(\bar{x}))$. 因为 $N(S(\varphi,X),\bar{x})$ 是包含 $\sum_{t\in T_\varphi(\bar{x})}\mathbb{R}_+\partial\varphi_t(\bar{x})$ 的弱 $*$ 闭集, 这表明 $N(S(\varphi,X),\bar{x})=\mathrm{cl}^{w^*}(\sum_{t\in T_\varphi(\bar{x})}\mathbb{R}_+\partial\varphi_t(\bar{x}))$, 再由 (3.6) 即得 (3.5). 最后假设 T 是可度量的, 此时 (3.4) 直接源于 (3.3a) 和引理 2.5. 由 (3.3b) 可知,

$$\begin{aligned}T(S(\varphi,\Omega),\bar{x})&=\{h\in X:\langle x^*,h\rangle\leqslant 0,\forall\, x^*\in N(S(\varphi,\Omega),\bar{x})\}\\&=\Big\{h\in X:\langle x^*,h\rangle\leqslant 0:x^*\in\sum_{t\in T_\varphi(\bar{x})}\mathbb{R}_+\partial\varphi_t(\bar{x})+N(\Omega,\bar{x})\Big\}.\end{aligned}$$

所以, $h\in T(S(\varphi,\Omega),\bar{x})$ 等价于

$$\sup_{x^*\in N(\Omega,\bar{x})}\langle x^*,h\rangle\leqslant 0\quad 和\quad \sup\Big\{\langle x^*,h\rangle:x^*\in\sum_{t\in T_\varphi(\bar{x})}\mathbb{R}_+\partial\varphi_t(\bar{x})\Big\}\leqslant 0,$$

即 $h\in T(\Omega,\bar{x})$ 且对所有的 $t\in T_\varphi(\bar{x})$ 都有 $\max_{x^*\in\partial\varphi_t(\bar{x})}\langle x^*,h\rangle\leqslant 0$. 这和引理 2.1 表明 (3.2) 成立, 证毕. □

注 3.1 取 Ω 为整个空间 X, 那么 (3.3a) 变为

$$N(S(\varphi,\Omega),\bar{x})=\bigcup_{\mu\in\Sigma^+}\partial\Big(\int_{T_\varphi(\bar{x})}\varphi(\cdot,t)d\mu(t)\Big)(\bar{x}).$$

这和引理 2.5(ii) 表明, 当 T 可度量且 (A1)–(A3) 都成立时, $\bigcup_{\mu\in\Sigma^+}\int_{T_\varphi(\bar{x})}\partial\varphi(\cdot,t)(\bar{x})d\mu(t)$ 是共轭空集 X^* 中的弱 $*$ 闭集, 并且下面非平凡的结果成立: 对 T 上的任意两个非负正则 Borel 测度 μ_1 和 μ_2 以及多值映射 $t\mapsto\partial\varphi(\cdot,t)(\bar{x})$ 的任意 μ_1- 可积选择 $t\mapsto g_1(t)$ 和 μ_2- 可积选择 $t\mapsto g_2(t)$, 存在 T 上的非负正则 Borel 测度 μ 及 $t\mapsto\partial\varphi(\cdot,t)(\bar{x})$ 的 μ- 可积选择 $t\mapsto g(t)$, 使得

$$\int_{T_\varphi(\bar{x})}g_1(t)d\mu_1(t)+\int_{T_\varphi(\bar{x})}g_2(t)d\mu_2(t)=\int_{T_\varphi(\bar{x})}g(t)d\mu(t).$$

当没有 Slater 条件 (A3), 但要求空间 X 是自反的, 我们有如下定理.

定理 3.1 假设 (A1) 和 (A2) 成立, 并且 X 是自反的, 则

$$\begin{aligned}N(S(\varphi,\Omega),\bar{x})&=\limsup_{x\overset{\Omega\setminus S(\varphi,\Omega)}{\longrightarrow}\bar{x},\mu\in\Sigma_0^+,\langle\mu,\varphi_x\rangle\to 0}\Big(\int_T\partial\varphi(\cdot,t)(x)d\mu(t)+N(\Omega,x)\Big)\\&=w^*\text{-}\limsup_{x\overset{\Omega}{\to}\bar{x},\mu\in\Sigma^+,\langle\mu,\varphi_x\rangle\to 0}\Big(\int_T\partial\varphi(\cdot,t)(x)d\mu(t)+N(\Omega,x)\Big).\end{aligned}$$

证明 记 $\Xi:=w^*\text{-}\limsup_{x\overset{\Omega}{\to}\bar{x},\mu\in\Sigma^+,\langle\mu,\varphi_x\rangle\to 0}(\int_T\partial\varphi(\cdot,t)(x)d\mu(t)+N(\Omega,x))$, 任取 $x^*\in\Xi$, 则存在 X^* 中序列 $\{x_n^*\}$ 和 $\Omega\times\Sigma^+$ 中序列 $\{(x_n,\mu_n)\}$ 使得

$$x_n^*\in\int_T\partial\varphi(\cdot,t)(x_n)d\mu_n(t)+N(\Omega,x_n),\quad\forall\, n\in\mathbb{N},$$

$$x_n \to \bar{x}, \quad \langle \mu_n, \varphi_{x_n} \rangle = \int_T \varphi(x_n, t) d\mu_n(t) \to 0 \quad \text{和} \quad x_n^* \overset{w^*}{\to} x^*.$$

因此, 对每个自然数 $n \in \mathbb{N}$, 存在多值映射 $t \mapsto \partial\varphi(\cdot, t)(x_n)$ 的一个 μ_n- 可积选择 $t \mapsto u_n^*(t)$ 和 $v_n^* \in N(\Omega, x_n)$, 使得 $x_n^* = \int_T u_n^*(t) d\mu_n(t) + v_n^*$. 所以, 对任意的 $x \in S(\varphi, \Omega)$, 有

$$\begin{aligned}
\langle x^*, x - \bar{x} \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x_n^*, x - x_n \rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left\langle \int_T u_n^*(t) d\mu_n(t), x - x_n \right\rangle + \langle v_n^*, x - x_n \rangle \right) \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \left\langle \int_T u_n^*(t) d\mu_n(t), x - x_n \right\rangle \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_T \langle u_n^*(t), x - x_n \rangle d\mu_n(t) \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_T (\varphi(x, t) - \varphi(x_n, t)) d\mu_n(t) \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_T -\varphi(x_n, t) d\mu_n(t) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

故 $x^* \in N(S(\varphi, \Omega), \bar{x})$, 这证明 $\Xi \subset N(S(\varphi, \Omega), \bar{x})$. 因为

$$\limsup_{x \overset{\Omega\setminus S(\varphi,\Omega)}{\longrightarrow} \bar{x}, \mu \in \Sigma_0^+, \langle \mu, \varphi_x \rangle \to 0} \left(\int_T \partial\varphi(\cdot, t)(x) d\mu(t) + N(\Omega, x) \right) \subset \Xi$$

平凡地成立, 所以只需再证下面的包含:

$$N(S(\varphi, \Omega), \bar{x}) \subset \limsup_{x \overset{\Omega\setminus S(\varphi,\Omega)}{\longrightarrow} \bar{x}, \mu \in \Sigma_0^+, \langle \mu, V_\varphi(x) \rangle \to 0} \left(\int_T \partial\varphi(\cdot, t)(x) d\mu(t) + N(\Omega, x) \right). \tag{3.7}$$

为此, 对每个自然数 k, 定义辅助函数 $\varphi_k : X \times T \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\varphi_k(x, t) := \varphi(x, t) - \frac{1}{k}, \quad \forall\, (x, t) \in X \times T.$$

那么 φ_k 满足 (A1)–(A3). 这和引理 3.1 意味着

$$N(S(\varphi_k, \Omega), x) = \mathrm{cl}^{w^*} \left(\sum_{t \in T_{\varphi_k}(x)} \mathbb{R}_+ \partial\varphi_k(\cdot, t)(x) \right) + N(\Omega, x), \quad \forall\, x \in S(\varphi_k, \Omega).$$

因为 X 是自反空间并且 $\sum_{t \in T_{\varphi_k}(x)} \mathbb{R}_+ \partial\varphi_k(\cdot, t)(x)$ 是凸集,

$$\mathrm{cl}^{w^*} \left(\sum_{t \in T_{\varphi_k}(x)} \mathbb{R}_+ \partial\varphi_k(\cdot, t)(x) \right) = \mathrm{cl}^{w} \left(\sum_{t \in T_{\varphi_k}(x)} \mathbb{R}_+ \partial\varphi_k(\cdot, t)(x) \right) = \mathrm{cl} \left(\sum_{t \in T_{\varphi_k}(x)} \mathbb{R}_+ \partial\varphi_k(\cdot, t)(x) \right),$$

所以,

$$N(S(\varphi_k, \Omega), x) = \mathrm{cl} \left(\sum_{t \in T_{\varphi_k}(x)} \mathbb{R}_+ \partial\varphi_k(\cdot, t)(x) \right) + N(\Omega, x), \quad \forall\, x \in S(\varphi_k, \Omega). \tag{3.8}$$

容易验证 $\{S(\varphi_k,\Omega)\}$ 是 X 中的下降闭凸集序列且在 Mosco 意义下收敛到 $S(\varphi,\Omega)$. 任取 $x^*\in N(S(\varphi,\Omega),\bar{x})$, 由引理 2.3 知, 存在 $\Omega\times X^*$ 中序列 $\{(x_k,x_k^*)\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}(x_k,x_k^*)=(\bar{x},x^*)\quad 和\quad x_k^*\in N(S(\varphi_k,\Omega),x_k),\quad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

这样, 由 (3.8) 可知, 对每个 k 都有 $v_k^*\in N(\Omega,x_k)$, $n_k\in\mathbb{N}$, $t_i\in T_{\varphi_k}(x_k)$, $r_i\in\mathbb{R}_+$ 及 $u_{k,i}^*\in\partial(\varphi_k)_{t_i}(x_k)=\partial\varphi_{t_i}(x_k)$ $(i=1,\ldots,n_k)$, 使得

$$\left\|x_k^*-\sum_{i=1}^{n_k}r_iu_{k,i}^*-v_k^*\right\|<\frac{1}{k}. \tag{3.9}$$

所以,

$$\begin{aligned}-\|x_k^*\|\|\bar{x}-x_k\|&\leqslant\langle x_k^*,\bar{x}-x_k\rangle\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n_k}r_i\langle u_{k,i}^*,\bar{x}-x_k\rangle+\langle v_k^*,\bar{x}-x_k\rangle+\frac{\|\bar{x}-x_k\|}{k}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n_k}r_i\langle u_{k,i}^*,\bar{x}-x_k\rangle+\frac{\|\bar{x}-x_k\|}{k}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n_k}r_i(\varphi(\bar{x},t_i)-\varphi(x_k,t_i))+\frac{\|\bar{x}-x_k\|}{k}\\&\leqslant-\sum_{i=1}^{n_k}r_i\varphi(x_k,t_i)+\frac{\|\bar{x}-x_k\|}{k}.\end{aligned}$$

此外, $T_{\varphi_k}(x_k)$ 的定义意味着

$$\varphi(x_k,t_i)-\frac{1}{k}=\varphi_k(x_k,t_i)=0,\quad i=1,\ldots,n_k. \tag{3.10}$$

因此,

$$x_k\overset{\Omega\setminus S(\varphi,\Omega)}{\longrightarrow}\bar{x}\quad 和\quad \sum_{i=1}^{n_k}r_i\varphi(x_k,t_i)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n_k}r_i\to 0. \tag{3.11}$$

对 $k\in\mathbb{N}$, 令 μ_k 是 T 上如下的非负 Borel 测度:

$$\mu_k(T\setminus\{t_1,\ldots,t_{n_k}\})=0\quad 和\quad \mu_k(\{t_i\})=r_i,\quad i=1,\ldots,n_k, \tag{3.12}$$

那么 $\mu_k\in\Sigma_0^+$ (因为有限集 $\{t_1,\ldots,t_{n_k}\}$ 是 μ_k 的支撑),

$$\langle\mu_k,\varphi_{x_k}\rangle=\int_T\varphi_{x_k}(t)d\mu_k(t)=\int_T\varphi(x_k,t)d\mu_k(t)=\sum_{i=1}^{n_k}r_i\varphi(x_k,t_i), \tag{3.13}$$

且

$$\int_T\partial\varphi(\cdot,t)(x_k)d\mu_k(t)=\sum_{i=1}^{n_k}r_i\partial\varphi_{t_i}(x_k)\ni\sum_{i=1}^{n_k}r_iu_{k,i}^*.$$

所以,

$$\sum_{i=1}^{n_k}r_iu_{k,i}^*+v_k^*\in\int_T\partial\varphi(\cdot,t)(x_k)d\mu_k(t)+N(\Omega,x_k).$$

这和 (3.9)–(3.13) 意味着

$$x^* \in \limsup_{x^{\Omega\setminus S(\varphi,\Omega)}\to \bar{x},\mu\in\Sigma_0^+,\langle\mu,\varphi_x\rangle\to 0}\left(\int_T \partial\varphi(\cdot,t)(x)d\mu(t)+N(\Omega,x)\right).$$

这证明 (3.7) 成立, 证毕. □

限制到 $\Omega = X$ 的情形, 定理 3.1 可看成文献 [2, 定理 3.1 和 3.5] 的推广.

注 3.2 从定理 3.1 的证明 (参见 (3.10) 和 (3.12)) 可知, 对每个 $x^* \in N(S(\varphi,\Omega),\bar{x})$ 都存在 X^* 中序列 $\{x_k^*\}$ 和 $(\Omega\setminus S(\varphi,\Omega))\times\Sigma_0^+$ 中序列 $\{(x_k,\mu_k)\}$, 使得

$$x_k^* \in \int_T \partial\varphi(\cdot,t)(x_k)d\mu_k(t)+N(\Omega,x_k),\quad \forall\, k\in\mathbb{N}, \tag{3.14}$$

$$(x_k,x_k^*)\to(\bar{x},x^*),\quad \langle\mu_k,\varphi_{x_k}\rangle\to 0 \quad 和 \quad 0<\varphi_{x_k}|_{\mathrm{supp}(\mu_k)}\equiv c_k\to 0, \tag{3.15}$$

这里 $\varphi_{x_k}|_{\mathrm{supp}(\mu_k)}\equiv c_k$ 意味着 $\varphi(x_k,t)=c_k,\forall\, t\in\mathrm{supp}(\mu_k)$.

给定一个自然数 m, 令

$$\Sigma_{(0,m)}^+ := \{\mu\in\Sigma_0^+ : \mathrm{supp}(\mu)\ 含有至多\ m+1\ 个元素\},$$

即 T 上的一个非负正则 Borel 测度 μ 属于 $\Sigma_{(0,m)}^+$ 的充分必要条件是存在 $t_1,\ldots,t_{m+1}\in T$ 使得

$$\mu(T\setminus\{t_1,\ldots,t_{m+1}\})=0.$$

当 X 是有限维空间时, 定理 3.1 有如下改进形式.

推论 3.1 假设 X 是 m 维空间, 并设 (A1) 和 (A2) 成立, 那么对任意的 $\bar{x}\in S(\varphi,\Omega)$ 和任意的 $x^*\in N(S(\varphi,\Omega),\bar{x})$, 存在 $(\Omega\setminus S(\varphi,\Omega))\times X^*\times\Sigma_{(0,m)}^+$ 中的序列 $\{(x_k,x_k^*,\mu_k)\}$ 使得 (3.14) 和 (3.15) 成立, 故而

$$N(S(\varphi,\Omega),\bar{x}) = \limsup_{x^{\Omega\setminus S(\varphi,\Omega)}\longrightarrow \bar{x},\ \mu\in\Sigma_{(0,m)}^+,\langle\mu,\varphi_x\rangle\to 0}\left(\int_T \partial\varphi(\cdot,t)(x)d\mu(t)+N(\Omega,x)\right).$$

证明 任取 $\bar{x}\in S(\varphi,\Omega)$ 及 $x^*\in N(S(\varphi,\Omega),\bar{x})$, 那么, 由定理 3.1 和注 3.2 知, 存在 $\Omega\setminus S(\varphi,\Omega))$ 中序列 $\{x_k\}$ 及 $X^*\times\Sigma_0^+$ 中序列 $\{(x_k^*,\mu_k)\}$ 使得 (3.14) 和 (3.15) 成立. 因为 $\mu_k\in\Sigma_0^+$, 所以存在 T 中有限个元 $t_1,\ldots,t_{n_k}$, 使得 $\mu_k(T\setminus\{t_1,\ldots,t_{n_k}\})=0$. 对于 $i=1,\ldots,n_k$, 令 $r_i:=\mu_k(\{t_i\})$, 那么每个 r_i 都是非负的, 并且

$$\int_T \partial\varphi(\cdot,t)(x_k)d\mu_k(t)=\sum_{i=1}^{n_k} r_i\partial\varphi(\cdot,t_i)(x_k).$$

所以, 由 (3.14) 知, 存在 $v_k^*\in N(\Omega,x_k)$ 及 $u_{k,i}^*\in\partial\varphi(\cdot,t_i)(x_k)$ $(i=1,\ldots,n_k)$, 使得 $x_k^*=\sum_{i=1}^{n_k} r_iu_{k,i}^*+v_k^*$. 因为空间 X 的维数为 m, 这和 Carotheodory 定理 (参见文献 [1, 定理 17.1]) 意味着存在 $\lambda_j\in\mathbb{R}_+$ 和 $u_{k,i_j}^*\in\{u_{k,1}^*,\ldots,u_{k,n_k}^*\}$ $(j=1,\ldots,m+1)$, 使得 $\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j=1$ 且 $\sum_{i=1}^{n_k} r_iu_{k,i}^*=\tilde{s}_k\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_ju_{k,i_j}^*$, 这里 $\tilde{s}_k:=\sum_{i=1}^{n_k} r_i$. 记 $\tilde{\mu}_k$ 为 T 上的如下非负测度:

$$\tilde{\mu}_k(T\setminus\{t_{i_1},\ldots,t_{i_{m+1}}\})=0 \quad 和 \quad \tilde{\mu}_k(\{t_{i_j}\})=\tilde{s}_k\lambda_j,\quad j=1,\ldots,m+1,$$

那么 $\mathrm{supp}(\tilde{\mu}_k)\subset\{t_{k,i_1},\ldots,t_{k,i_{m+1}}\}$, 所以 $\tilde{\mu}_k\in\Sigma_{(0,m)}^+$. 此外, 由 (3.15) 可得

$$\langle\tilde{\mu}_k,\varphi_{x_k}\rangle=\sum_{j=1}^{m+1}\tilde{s}_k\lambda_j\varphi(x_k,t_{k,i_j})=\sum_{j=1}^{m+1}\tilde{s}_k\lambda_jc_k=\tilde{s}_kc_k=\langle\mu_k,\varphi_{x_k}\rangle\to 0$$

和 $\varphi_{x_k}|_{\mathrm{supp}(\tilde{\mu}_k)} = c_k \to 0$. 另一方面,

$$\sum_{i=1}^{n_k} r_i u_{k,i}^* = \tilde{s}_k \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j u_{k,i_j}^* \in \sum_{j=1}^{m+1} \tilde{s}_k \lambda_j \partial\varphi(\cdot, t_{k,i_j})(x_k) = \int_T \partial\varphi(\cdot,t)(x_k) d\tilde{\mu}_k(t).$$

综上, 即得

$$x_k^* = \sum_{i=1}^{n_k} r_i u_{k,i}^* + v_k^* \in \int_T \partial\varphi(\cdot,t)(x_k) d\tilde{\mu}_k(t) + N(\Omega, x_k),$$

证毕. □

在 Slater 条件 (A3) 的假设下, 我们有下面的推论.

推论 3.2 设空间 X 是有限维的, 并设 (A1)–(A3) 成立, 则

$$N(S(\varphi,\Omega),\bar{x}) = \bigcup_{t_1,\ldots,t_{m+1}\in T_\varphi(\bar{x})} \sum_{i=1}^{m+1} \mathbb{R}_+ \partial\varphi_{t_i}(\bar{x}) + N(\Omega,\bar{x}), \quad \forall\, \bar{x} \in S(\varphi,\Omega),$$

这里 m 是 X 的维数.

证明 如果 $\bar{x} \in S_-(\varphi,\Omega)$, 那么 $N(S(\varphi,\Omega),\bar{x}) = N(\Omega,\bar{x})$, 结论是平凡的. 下面假定 $\bar{x} \in S_0(\varphi,\Omega)$. 任取 $x^* \in \mathrm{cl}^{w^*}(\mathrm{co}(\bigcup_{t\in T_\varphi(\bar{x})} \mathbb{R}_+ \partial\varphi_t(\bar{x})))$, 由引理 3.1, 我们只需证明存在 $t_1,\ldots,t_{m+1} \in T_\varphi(\bar{x})$ 使得

$$x^* \in \sum_{i=1}^{m+1} \mathbb{R}_+ \partial\varphi_{t_i}(\bar{x}). \tag{3.16}$$

因为 X 的维数为 m, 存在 X^* 中的序列 $\{x_k^*\}$ 使得 $x_k^* \to x^*$ 且 $x_k^* \in \mathrm{co}(\bigcup_{t\in T_\varphi(\bar{x})} \mathbb{R}_+ \partial\varphi_t(\bar{x}))$ $(\forall k \in \mathbb{N})$. 所以, 由 Carotheodory 定理 (参见文献 [1, 定理 17.1]), 对每个 k, 存在 $\alpha_{(k,i)} \in \mathbb{R}_+$, $t_{(k,i)} \in T_\varphi(\bar{x})$ 及 $x_{(k,i)}^* \in \partial\varphi_{t_{(k,i)}}(\bar{x})$ $(i = 1,\ldots,m+1)$, 使得 $x_k^* = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{(k,i)} x_{(k,i)}^*$. 由 (3.1) 可知, $\partial\varphi_t(\bar{x}) \subset LB_{X^*}$ $(\forall\, t \in T)$. 因为 B_{X^*} 是紧的, 且 $T_\varphi(\bar{x})$ 作为紧空间 T 的闭子集也是紧的, 不失一般性, 可设当 $k \to \infty$ 时, $\alpha_{(k,i)} \to \alpha_i$, $t_{(k,i)} \to t_i \in T_\varphi(\bar{x})$ 及 $x_{(k,i)}^* \to v_i^*$ $(i = 1,\ldots,m+1)$. 这样, 由 (A1) 和 (A2) 知,

$$\langle v_i^*, h\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle x_{(k,i)}^*, h\rangle \leqslant \lim_{k\to\infty} (\varphi(\bar{x}+h, t_{(k,i)}) - \varphi(\bar{x}, t_{(k,i)})) = \varphi(\bar{x}+h, t_i) - \varphi(\bar{x}, t_i), \quad \forall\, h \in X,$$

所以 $v_i^* \in \partial\varphi_{t_i}(\bar{x})$. 我们断言每个 $\alpha_i < +\infty$. 事实上, 若不然, $s_k := \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{(k,i)} \to +\infty$, 则有

$$\frac{\alpha_{(k,i)}}{s_k} \to \lambda_i, \quad u_k^* := \frac{1}{s_k} \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{(k,i)} x_{(k,i)}^* \to 0 \quad \text{和} \quad \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1. \tag{3.17}$$

恰如引理 3.1 证明开始的部分, 有 $S_-(\varphi,\Omega) \neq \emptyset$, 取 $x_0 \in S_-(\varphi,\Omega)$, 则

$$\begin{aligned}\langle u_k^*, x_0 - \bar{x}\rangle = \frac{1}{s_k} \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{(k,i)} \langle x_{(k,i)}^*, x_0 - \bar{x}\rangle &\leqslant \frac{1}{s_k} \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{(k,i)} (\varphi(x_0, t_{(k,i)}) - \varphi(\bar{x}, t_{(k,i)})) \\ &= \frac{1}{s_k} \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{(k,i)} \varphi(x_0, t_{(k,i)}).\end{aligned}$$

令 $k \to \infty$, 这和 (3.17) 表明 $0 \leqslant \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \varphi(x_0, t_i)$ 与 $x_0 \in S_-(\varphi,\Omega)$ 矛盾, 所以, $\alpha_i < +\infty$ $(i = 1,\ldots,m+1)$. 因此,

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_k^* = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{(k,i)} x_{(k,i)}^* = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i v_i^* \in \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{R}_+ \partial\varphi_{t_i}(\bar{x}),$$

这证明 (3.16) 成立, 证毕. □

4 在半无穷优化中的应用

本节空间 X 总被假定是有限维的, 并记其维数为 m; 此外, 假定 $f: X \to \mathbb{R}$ 是连续凸函数, 且 φ 和 Ω 如同第 3 节所示. 对应的半无穷凸优化问题 (SIP) 的解集记为 $\mathcal{S}(f,\varphi,\Omega)$, 即

$$\mathcal{S}(f,\varphi,\Omega) := \Big\{x \in S(\varphi,\Omega) : f(x) = \min_{x' \in S(\varphi,\Omega)} f(x')\Big\}.$$

回顾 (SIP) 的一个可行点 $\bar{x} \in S(\varphi,\Omega)$ 被称为 (SIP) 的 KKT 点, 若存在活跃指标 t_i (即 $t_i \in T_\varphi(\bar{x})$) 和 $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ $(i = 1,\ldots,m+1)$ 使得

$$0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \partial \varphi_{t_i}(\bar{x}) + N(\Omega,\bar{x}), \tag{4.1}$$

这里 $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \partial \varphi_{t_i}(\bar{x})$ 被理解为 $\{0\}$, 如果 $T_\varphi(\bar{x}) \neq \emptyset$. 令 $\Lambda(f,\varphi,\Omega)$ 表示 (SIP) 所有 KKT 点构成的集合, 则当 (A1)–(A3) 都成立时, $\mathcal{S}(f,\varphi,\Omega) = \Lambda(f,\varphi,\Omega)$. 没有 Slater 条件 (A3), $\Lambda(f,\varphi,\Omega)$ 可以是 $\mathcal{S}(f,\varphi,\Omega)$ 的真子集, 再考虑到有时确定 (SIP) 的确切 KKT 点是困难的, 这促使我们引进近似 KKT 点, 并考虑近似 KKT 点构成的迭代序列收敛于确切 KKT 点的条件. 对于 $\bar{x} \in \Omega$ (不必是 (SIP) 的可行点) 和 $\varepsilon \geqslant 0$, 对照 (4.1), 定义 $\bar{x}$ 是 (SIP) 的一个 ε-KKT 点, 如果存在 $t_1,\ldots,t_{m+1} \in T$ 及 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+1} \in \mathbb{R}_+$ 满足

$$\Big\{\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \varphi(\bar{x},t_i), \varphi(\bar{x},t_1),\ldots,\varphi(\bar{x},t_{m+1})\Big\} \subset [0,\varepsilon] \tag{4.2}$$

和

$$0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \partial \varphi_{t_i}(\bar{x}) + N(\Omega,\bar{x}) + \varepsilon B_{X^*}. \tag{4.3}$$

令 $\Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega)$ 表示 (SIP) 所有 ε-KKT 点构成的集合. 用下面的包含代替 (4.3):

$$0 \in \partial f(B(\bar{x},\varepsilon)) + \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \partial \varphi_{t_i}(\bar{x}) + N(\Omega,\bar{x}) + \varepsilon B_{X^*}, \tag{4.4}$$

并采用如下的近似 KKT 点集:

$$\tilde{\Lambda}_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) := \{\bar{x} \in \Omega : \text{存在 } (t_i,\lambda_i) \in T \times \mathbb{R}_+, 1 \leqslant i \leqslant m+1, \text{使得 (4.2) 和 (4.4) 成立}\}.$$

显然, $\Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega)$ 总是 $\tilde{\Lambda}_\varepsilon(f,\varphi,\Omega)$ 的子集, 并且当 $\varepsilon = 0$ 时,

$$\tilde{\Lambda}_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) = \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) = \Lambda(f,\varphi,\Omega).$$

确切 KKT 点集 $\Lambda(f,\varphi,\Omega)$ 可能是空集, 即便 $\inf_{x \in S(\varphi,\Omega)} f(x) > -\infty$ 且 (A1)–(A3) 都满足. 事实上, 令 $X = \Omega = \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ 且 $\varphi(x,t) = x$ $(\forall\,(x,t) \in X \times T)$, 那么 $\Lambda(f,\varphi,\Omega)$ 明显是空集, $\inf_{x \in S(\varphi,\Omega)} f(x) = 0$ 且 (A1)–(A3) 都满足. 然而, 下面的命题表明, 若 $\inf_{x \in S(\varphi,\Omega)} f(x) > -\infty$ 且 (A1)–(A3) 都满足, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$ 都有 $\Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) \neq \emptyset$.

命题 4.1 假设 $\inf_{x\in S(\varphi,\Omega)} f(x) > -\infty$ 且 (A1) 和 (A2) 成立, 则

$$\tilde{\Lambda}_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) \neq \emptyset, \quad \forall\, \varepsilon \in (0,+\infty).$$

此外, 若 (A3) 也成立, 则有

$$\Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) \neq \emptyset, \quad \forall\, \varepsilon \in (0,\ +\infty).$$

证明 任取 $\varepsilon \in (0,+\infty)$, 由 $\inf_{x\in S(\varphi,\Omega)} f(x) > -\infty$ 知, 存在 $x_\varepsilon \in S(\varphi,\Omega)$ 使得

$$f(x_\varepsilon) < \inf_{x\in S(\varphi,\Omega)} f(x) + \varepsilon^2 = \inf_{x\in X}(f(x) + \delta_{S(\varphi,\Omega)}(x)) + \varepsilon^2,$$

这里 $\delta_{S(\varphi,\Omega)}$ 表示 $S(\varphi,\Omega)$ 的示性函数 (indicator function). 这样, 由 Ekeland 变分原理可知, 存在 $\bar{x}_\varepsilon \in S(\varphi,\Omega)$, 使得 $\|\bar{x}_\varepsilon - x_\varepsilon\| < \varepsilon$ 且

$$f(\bar{x}_\varepsilon) \leqslant f(x) + \delta_{S(\varphi,\Omega)}(x) + \varepsilon\|x - \bar{x}_\varepsilon\|, \quad \forall\, x \in X.$$

所以,

$$0 \in \partial(f + \delta_{S(\varphi,\Omega)} + \varepsilon\|\cdot - \bar{x}_\varepsilon\|)(\bar{x}_\varepsilon) = \partial f(\bar{x}_\varepsilon) + N(S(\varphi,\Omega),\bar{x}_\varepsilon) + \varepsilon B_{X^*}. \tag{4.5}$$

这和推论 3.1 意味着 $B(\bar{x}_\varepsilon,\varepsilon) \cap \tilde{\Lambda}_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) \neq \emptyset$, 故而 $\tilde{\Lambda}_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) \neq \emptyset$. 在 Slater 条件 (A3) 也成立的情形下, (4.5) 和推论 3.2 表明 $\bar{x}_\varepsilon \in \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega)$, 证毕. □

没有 Slater 条件 (A3), 下面的定理给出了半无穷凸优化问题 (SIP) 解集的表示.

定理 4.1 设 (A1) 和 (A2) 成立, 则

$$\mathcal{S}(f,\varphi,\Omega) = \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \tilde{\Lambda}_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) \supset \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) \supset \Lambda(f,\varphi,\Omega). \tag{4.6}$$

此外, 若 f 是光滑的, 则

$$\mathcal{S}(f,\varphi,\Omega) = \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega). \tag{4.7}$$

证明 由相关定义, 容易验证

$$\Lambda(f,\varphi,\Omega) \subset \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) \subset \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \tilde{\Lambda}_\varepsilon(f,\varphi,\Omega).$$

这样, 我们只需证明 (4.6) 中的等式, 以及当 f 光滑时,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) \supset \mathcal{S}(f,\varphi,\Omega).$$

任取 $\bar{x} \in \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \tilde{\Lambda}_\varepsilon(f,\varphi,\Omega)$, 存在 Ω 中的序列 $\{x_n\}$ 及 $(0,\ +\infty)$ 中数列 $\{\varepsilon_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \quad 和 \quad x_n \in \tilde{\Lambda}_{\varepsilon_n}(f,\varphi,\Omega), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

所以, 对每个 n, 存在 $\tilde{x}_n \in B(x_n,\varepsilon_n)$, $t_{n,i} \in T$ 及 $\lambda_{n,i} \in \mathbb{R}_+$ $(i = 1,\ldots,m+1)$, 使得

$$0 \in \partial f(\tilde{x}_n) + \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{n,i}\partial\varphi(\cdot,t_{n,i})(x_n) + N(\Omega,x_n) + \varepsilon_n B_{X^*} \quad 和 \quad \left|\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{n,i}\varphi(x_n,t_{n,i})\right| < \varepsilon_n.$$

故而, 存在 $\tilde{x}_n^* \in \partial f(\tilde{x}_n)$, $u_{n,i}^* \in \partial\varphi(\cdot, t_{n,i})(x_n)$ $(i = 1, \ldots, m+1)$, $v_n^* \in N(\Omega, x_n)$, $e_n^* \in B_{X^*}$, 使得

$$\tilde{x}_n^* = -\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{n,i} u_{n,i}^* - v_n^* - \varepsilon_n e_n^*.$$

因此, 对任意的 $x \in S(\varphi, \Omega)$ (即 $x \in \Omega$ 且 $\varphi(x, t) \leqslant 0, \forall\, t \in T$), 有

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{x}_n^*, x - x_n\rangle &= -\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{n,i}\langle u_{n,i}^*, x - x_n\rangle - \langle v_n^*, x - x_n\rangle - \varepsilon_n\langle e_n^*, x - x_n\rangle \\
&\geqslant -\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{n,i}(\varphi(x, t_{n,i}) - \varphi(x_n, t_{n,i})) - \varepsilon_n\|x - x_n\| \\
&\geqslant -\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{n,i}(-\varphi(x_n, t_{n,i})) - \varepsilon_n\|x - x_n\| \\
&\geqslant -\varepsilon_n - \varepsilon_n\|x - x_n\|
\end{aligned}$$

且

$$\langle \tilde{x}_n^*, x - x_n\rangle \leqslant \langle \tilde{x}_n^*, x - \tilde{x}_n\rangle + \|\tilde{x}_n^*\|\|\tilde{x}_n - x_n\| \leqslant f(x) - f(\tilde{x}_n) + \|\tilde{x}_n^*\|\varepsilon_n, \quad \forall\, x \in X.$$

注意到 $x_n \to \bar{x}$, $\tilde{x}_n \to \bar{x}$ 且 ∂f 在 $\bar{x}$ 处是局部有界的, 这意味着对任意的 $x \in S(\varphi, \Omega)$ 都有 $f(x) \geqslant f(\bar{x})$, 即 $\bar{x} \in \mathcal{S}(f, \varphi, \Omega)$, 所以, $\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \tilde{\Lambda}_\varepsilon(f, \varphi, \Omega) \subset \mathcal{S}(f, \varphi, \Omega)$.

反之, 任取 $\bar{x} \in \mathcal{S}(f, \varphi, \Omega)$, 则 $f(\bar{x}) = \inf_{x\in S(\varphi,\Omega)} f(x) = \inf_{x\in X}(f(x) + \delta_{S(\varphi,\Omega)}(x))$, 所以,

$$0 \in \partial(f + \delta_{S(\varphi,\Omega)})(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) + N(S(\varphi, \Omega), \bar{x}),$$

从而, 存在 $x^* \in N(S(\varphi, \Omega), \bar{x})$ 使得 $\partial f(\bar{x}) + x^* = 0$. 由推论 3.1 知, 存在 $(\Omega \setminus S(\varphi, \Omega)) \times X^* \times \Sigma_{(0,m)}^+$ 中序列 $\{(x_k, x_k^*, \mu_k)\}$ 使得 (3.14) 和 (3.15) 成立. 所以, 每个非负正则 Borel 测度 μ_k 的支撑 $\mathrm{supp}(\mu_k)$ 含有 T 中至多 $m+1$ 个元, 即存在 $t_{k,i} \in T$ 和 $r_{k,i} \in \mathbb{R}^+$ $(i = 1, \ldots, m+1)$ 使得

$$\mu_k(T \setminus \{t_{k,1}, \ldots, t_{k,m+1}\}) = 0 \quad 和 \quad \mu_k(\{t_{k,i}\}) = r_{k,i}, \quad i = 1, \ldots, m+1.$$

再由 (3.14) 和 (3.15), 可得

$$\begin{aligned}
&x_k^* \in \sum_{i=1}^{m+1} r_{k,i}\partial\varphi(\cdot, t_{k,i})(x_k) + N(S(\varphi, \Omega), x_k), \\
&(x_k, x_k^*) \to (\bar{x}, x^*), \quad \sum_{i=1}^{m+1} r_{k,i}\varphi(x_k, t_{k,i}) \to 0, \quad 0 < \varphi(x_k, t_{k,1}) = \cdots = \varphi(x_k, t_{k,m+1}) = c_k \to 0.
\end{aligned}$$

所以,

$$0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m+1} r_{k,i}\partial\varphi(\cdot, t_{k,i})(x_k) + N(S(\varphi, \Omega), x_k) + x^* - x_k^*. \tag{4.8}$$

令 $\varepsilon_k := \|x^* - x_k^*\| + \|x_k - \bar{x}\| + \sum_{i=1}^{m+1} r_{k,i}\varphi(x_k, t_{k,i}) + c_k$, 则 $\varepsilon_k \to 0$,

$$0 \in \partial f(B(x_k, \varepsilon_k)) + \sum_{i=1}^{m+1} r_{k,i}\partial\varphi(\cdot, t_{k,i})(x_k) + N(S(\varphi, \Omega), x_k) + \varepsilon_k B_{X^*},$$

故 $x_k \in \tilde{\Lambda}_{\varepsilon_k}(f,\varphi,\Omega)$. 这意味着 $\bar{x} \in \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \tilde{\Lambda}_\varepsilon(f,\varphi,\Omega)$, 所以, $\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \tilde{\Lambda}_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) \supset \mathcal{S}(f,\varphi,\Omega)$. 综上, (4.6) 得证.

下面假设 f 是光滑的, 由 f 的凸性可知,

$$\lim_{x\to\bar{x}} \|\nabla f(x) - \nabla f(\bar{x})\| = 0, \tag{4.9}$$

且 (4.8) 可改写为

$$0 \in \nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^{m+1} r_{k,i}\partial\varphi(\cdot,t_{k,i})(x_k) + N(S(\varphi,\Omega),x_k) + \nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x_k) + x^* - x_k^*.$$

令 $\varepsilon_k := \|\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x_k) + x^* - x_k^*\| + \sum_{i=1}^{m+1} r_{k,i}\varphi(x_k,t_{k,i}) + c_k$, 则 $\varepsilon_k \to 0$ (因 (4.9)), $x_k \in \Lambda_{\varepsilon_k}(f,\varphi,\Omega)$, 从而, $\bar{x} \in \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega)$. 这证明 $\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) \supset \mathcal{S}(f,\varphi,\Omega)$, 证毕. □

即便在 f 是光滑的情形下, (4.6) 中最后的包含也不能改进为等式, 即

$$\Lambda(f,\varphi,\Omega) \subsetneqq \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega) \tag{4.10}$$

是可能的. 事实上, 令 $X = \Omega = \mathbb{R}$ 和 T 是单点集, 并设 $f(x) = -x$ 及

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x \in \mathbb{R}_-, \\ \dfrac{1}{2}x^2, & 若\ x \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

那么 $\partial f(0) = \{-1\}$, $\partial\varphi(0) = \{0\}$ 且 $N(\mathbb{R},0) = \{0\}$, 所以 $\Lambda(f,\varphi,\mathbb{R}) = \emptyset$. 另一方面,

$$\partial f\left(\frac{1}{n}\right) + n\partial\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \{0\} \quad 和 \quad \left\{n\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right\} = \left\{\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n^2}\right\},$$

故而 $\frac{1}{n} \in L_{\frac{1}{n}}(f,\varphi,\mathbb{R})$, 因此, $0 \in \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega)$, 这表明 (4.10) 成立.

在 Slater 条件 (A3) 假设下, 我们有 (SIP) 近似 KKT 点的如下稳定性结果.

定理 4.2 设 (A1)–(A3) 成立, 则

$$\limsup_{\eta\to\varepsilon^+} \Lambda_\eta(f,\varphi,\Omega) = \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega), \quad \forall\, \varepsilon \in [0,+\infty).$$

证明 给定 $\varepsilon \in [0,+\infty)$, 并任取 $\bar{x} \in \limsup_{\eta\to\varepsilon^+} \Lambda_\eta(f,\varphi,\Omega)$, 因为

$$\Lambda_\eta(f,\varphi,\Omega) \supset \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega), \quad \forall\, \eta \in (\varepsilon,+\infty),$$

所以有 $\limsup_{\eta\to\varepsilon^+} \Lambda_\eta(f,\varphi,\Omega) \supset \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega)$, 所以只需证明 $\bar{x} \in \Lambda_\varepsilon(f,\varphi,\Omega)$. 为此, 取 $(\varepsilon,\ +\infty)$ 中数列 $\{\eta_n\}$ 及 Ω 中序列 $\{x_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = \varepsilon, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \quad 和 \quad x_n \in \Lambda_{\eta_n}(f,\varphi,\Omega), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

这样, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $(t_{n,i},\lambda_{n,i}) \in T \times \mathbb{R}_+$, $v_{n,i}^* \in \partial\varphi_{t_{n,i}}(x_n)$ $(i = 1,\ldots,m+1)$, $x_n^* \in \partial f(x_n)$ 和 $w_n^* \in N(\Omega,x_n)$, 使得

$$\left\| x_n^* + \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{n,i} v_{n,i}^* + w_n^* \right\| \leqslant \eta_n \tag{4.11}$$

且

$$\left\{\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{n,i}\varphi(x_n,t_{n,i}),\varphi(x_n,t_{n,1}),\ldots,\varphi(x_n,t_{n,m+1})\right\}\subset[0,\eta_n]. \tag{4.12}$$

所以,

$$\langle x_n^*,u-x_n\rangle\leqslant f(u)-f(x_n)\quad 和\quad \langle v_{n,i}^*,u-x_n\rangle\leqslant\varphi(u,t_{n,i})-\varphi(x_n,t_{n,i}),\quad \forall\, u\in X. \tag{4.13}$$

因为 (A1) 和 (A2) 成立, 所以存在 $\delta,L\in(0,\ +\infty)$, 使得 (3.1) 成立. 不失一般性, 可设序列 $\{x_n\}$ 含在开球 $B(\bar{x},\delta)$ 中, 且

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L\|x_1-x_2\|,\quad \forall\, x_1,x_2\in B(\bar{x},\delta) \tag{4.14}$$

(后者成立因为 f 的连续性和凸性). 所以,

$$\max\{\|x_n^*\|,\|v_{n,i}^*\|\}\leqslant L,\quad \forall\,(n,i)\in\mathbb{N}\times\{1,\ldots,m+1\}. \tag{4.15}$$

这和 (4.11) 表明

$$\left\|\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{n,i}v_{n,i}^*+w_n^*\right\|\leqslant L+\eta_n,\quad \forall\, n\in\mathbb{N}. \tag{4.16}$$

下面证明每个数列 $\{\lambda_{n,i}\}$ 都是有界的 $(i=1,\ldots,m+1)$. 为此, 采用反证法. 若不然, 则 $\{\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{n,i}\}$ 有子列发散到 $+\infty$, 不失一般性, 可设

$$s_n:=\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{n,i}\to+\infty,\quad \frac{\lambda_{n,i}}{s_n}\to\tilde{\lambda}_i\in\mathbb{R}_+\quad (i=1,\ldots,m+1)\quad 和\quad \sum_{i=1}^{m+1}\tilde{\lambda}_i=1 \tag{4.17}$$

(如必要, 可取子列). 此外, 由 T 的紧性, 也可假设

$$t_{n,i}\to t_i\in T,\quad i=1,\ldots,m+1. \tag{4.18}$$

因为 $w_n^*\in N(\Omega,x_n)$, 所以,

$$\frac{1}{s_n}\left\langle\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{n,i}v_{n,i}^*+w_n^*,x-x_n\right\rangle\leqslant\frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{n,i}\langle v_{n,i}^*,x-x_n\rangle,\quad \forall\, x\in\Omega.$$

再由 (4.13) 可得对所有的 $x\in\Omega$ 都有

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_n}\left\langle\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{n,i}v_{n,i}^*+w_n^*,x-x_n\right\rangle&\leqslant\frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{n,i}(\varphi(x,t_{n,i})-\varphi(x_n,t_{n,i}))\\&\leqslant\frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{n,i}\varphi(x,t_{n,i}).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 并注意到

$$\frac{1}{s_n}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_{(i,n)}v_{(i,n)}^*+w_n^*\right)\longrightarrow 0\quad 和\quad x_n\to\bar{x},$$

这和 (4.17) 及 (4.18) 意味着对所有的 $x \in \Omega$, 都有 $0 \leqslant \sum_{i=1}^{m+1} \tilde{\lambda}_i \varphi(x, t_i)$, 与 (A3) 矛盾. 所以, 每个数列 $\{\lambda_{n,i}\}$ 都是有界的. 这样, 由 (4.15) 和 (4.16), 我们可设

$$x_n^* \to x^*, \quad v_{n,i}^* \to v_i^*, \quad \lambda_{n,i} \to \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \quad w_n^* \to w^*$$

(如必要, 取子网代之). 因为 $w_n^* \in N(\Omega, x_n)$ 且 Ω 是凸集, 容易验证 $w^* \in N(\Omega, \bar{x})$. 此外, 由 (3.1)、(4.11)、(4.12) 和 $(x_n, \eta_n) \to (\bar{x}, \varepsilon)$, 可得

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \varphi(\bar{x}, t_i),\ \varphi(\bar{x}, t_1), \ldots, \varphi(\bar{x}, t_{m+1}) \right\} \subset [0,\ \varepsilon] \quad \text{和} \quad \left\| x^* + \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i v_i^* + w^* \right\| \leqslant \varepsilon. \tag{4.19}$$

另一方面, (4.13)、(4.14) 和 (3.1) 意味着对所有的 $x \in B(\bar{x}, r)$, 都有

$$\langle x_n^*, x - x_n \rangle \leqslant f(x) - f(\bar{x}) + L\|\bar{x} - x_n\| \quad \text{和} \quad \langle v_{n,i}^*, x - x_n \rangle \leqslant \varphi(x, t_{n,i}) - \varphi(\bar{x}, t_{n,i}) + L\|\bar{x} - x_n\|.$$

令 $n \to \infty$, 即得

$$\langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leqslant f(x) - f(\bar{x}) \quad \text{和} \quad \langle v_i^*, x - \bar{x} \rangle \leqslant \varphi(x, t_i) - \varphi(\bar{x}, t_i), \quad \forall\, x \in B(\bar{x}, \delta).$$

这表明 $x^* \in \partial f(\bar{x})$ 且 $v_i^* \in \partial \varphi(\cdot, t_i)(\bar{x})$. 所以,

$$x^* + \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i v_i^* + w^* \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \partial \varphi(\cdot, t_i)(\bar{x}) + N(\Omega, \bar{x}).$$

这和 (4.19) 表明 $\bar{x} \in \Lambda_\varepsilon(f, \varphi, \Omega)$, 证毕. □

下面的推论是定理 4.1、4.2 和推论 3.2 的直接结果.

推论 4.1 设 (A1)–(A3) 成立, 则

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \Lambda_\varepsilon(f, \varphi, \Omega) = \Lambda(f, \varphi, \Omega) = \mathcal{S}(f, \varphi, \Omega).$$

参考文献

1 Rockafellar R T. Convex Analysis. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton: Princeton University Press, 1970

2 Cabot A, Thibault L. Sequential formulae for the normal cone to sublevel sets. Trans Amer Math Soc, 2014, 366: 6591–6628

3 Goberna A, López M A. Semi-Infinite Programming—Recent Advances. Boston: Kluwer, 2001

4 Hettich R, Kortanek K O. Semi-infinite programming: Theory, methods, and applications. SIAM Rev, 1993, 35: 380–429

5 López M A, Vercher E. Optimality conditions for nondifferentiable convex semi-infinite programming. Math Program, 1983, 27: 307–319

6 Zheng X Y, Yang X Q. Lagrange multipliers in nonsmooth semi-infinite optimization problems. Math Oper Res, 2007, 32: 168–181

7 Klatte D, Henrion R. Regularity and stability in non-linear semi-infinite optimization. In: Semi-infinite Programming. Boston-London-Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998, 69–102

8 Shapiro A. Semi-infinite programming, duality, discretization and optimality conditions. Optimization, 2009, 58: 133–161

9 Clarke F H. Optimization and Nonsmooth Analysis. New York: John Wiley & Sons, 1983

10 Kuhn H W, Tucker A W. Nonlinear programming. In: Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley: University of California Press, 1951, 481–492
11 Mordukhovich B S. Variational Analysis and Generalized Differentiation II. Berlin: Springer, 2006
12 Phelps R R. Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1364. New York: Springer, 1989
13 Zalinescu C. Convex Analysis in General Vector Spaces. Singapore: World Scientific, 2002
14 Zheng X Y, Ng K F. Subsmooth semi-infinite and infinite optimization problems. Math Program, 2012, 134: 365–393
15 Zheng X Y, Ng K F. Metric subregularity and constraint qualifications for convex generalized equations in Banach spaces. SIAM J Optim, 2007, 18: 437–460
16 Schirotzek W. Nonsmooth Analysis. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2007

Formulas and applications for the normal cone to the solution set of an infinite convex inequality system with a constraint

Xiyin Zheng

Abstract In this paper, we establish formulas for the normal cone to the intersection of infinitely many sublevel sets to improve the results obtained by Cabot and Thibault (2014), which deal with a single sublevel set. As applications, we introduce and study approximate KKT (Karush-Kuhn-Tucker) points for a semi-infinite convex optimization problem. Without any qualification, a formula for the solution set of the semi-infinite convex optimization problem is established in terms of approximate KKT points. Under the Slater condition, stability results on approximate KKT points for semi-infinite convex optimization problem are obtained.

Keywords **sublevel set, normal cone, subdifferential, approximate KKT point**

MSC(2010) **52A41, 49J52, 90C25**

doi: 10.1360/SSM-2020-0147