

◇ 研究报告 ◇

## 分层半空间表面非线性瑞利波的激发\*

贾璐<sup>1,2</sup> 阎守国<sup>1†</sup> 张碧星<sup>1,2†</sup> 黄娟<sup>1</sup>

(1 中国科学院声学研究所 声场声信息国家重点实验室 北京 100190)

(2 中国科学院大学 北京 100049)

**摘要:** 针对非线性瑞利波在均匀分层半空间结构中的激发和传播规律进行研究。根据摄动理论和模态分解将分层半空间结构中瑞利波的二次谐波声场表示为二倍频瑞利波模式的线性组合,经由互易关系得到各模式的展开系数表达式。对不同分层半空间结构中瑞利波二次谐波的激发和传播特性进行讨论,结果表明相速度匹配的瑞利波模式其二次谐波分量随传播距离线性增长,非匹配模式的二次谐波分量则沿传播方向周期震荡传播。此外,文中定义非线性参数表征瑞利波模式产生的非线性程度,这有利于选择出具有明显非线性效应的匹配点,为后续检测工作提供理论依据,具有指导意义。

**关键词:** 非线性声学;瑞利波;分层半空间;摄动法

中图分类号: O422.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-310X(2022)02-0278-07

DOI: 10.11684/j.issn.1000-310X.2022.02.014

## Excitation of nonlinear Rayleigh waves on a layered half-space surface

JIA Lu<sup>1,2</sup> YAN Shouguo<sup>1</sup> ZHANG Bixing<sup>1,2</sup> HUANG Juan<sup>1</sup>

(1 The State Key Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

(2 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** The excitation and propagation laws of nonlinear Rayleigh waves in a homogeneous layered half-space are studied in this paper. The second harmonic of Rayleigh waves in the layered half-space model is written as a linear combination of Rayleigh-wave modes by using the perturbation technique and the modal decomposition, then the second-order modal amplitudes are obtained via a reciprocity relation. The excitation and propagation laws of nonlinear Rayleigh waves are discussed in various layered half-spaces. The results show that the phase-matched double-frequency mode grows at a linear rate with propagation distance, while other double-frequency modes oscillate with the propagation distance. Besides, the nonlinear parameter defined in this work is not only beneficial to select matching points with obvious nonlinear effects, but also provides a theory for practical nonlinear Rayleigh wave detection.

**Keywords:** Nonlinear acoustics; Rayleigh waves; A layered half-space; Perturbation method

2021-03-01 收稿; 2021-04-19 定稿

\*国家自然科学基金项目 (11574343, 11774377)

作者简介: 贾璐 (1994-), 女, 福建三明人, 博士研究生, 研究方向: 非线性声学。

†通信作者 E-mail: yanshouguo@mail.ioa.ac.cn

## 0 引言

分层结构由于其具有高强度、高刚度等优点被广泛应用于各类实际的工程领域。但是分层结构的近表面容易率先出现材料性能退化和微裂纹等损伤,这可能导致构件严重的损坏,甚至造成灾难性事故。因此,研究一种无损评估(Non-destructive examination, NDE)方法以尽早发现缺陷对于确保分层结构的安全性和完整性非常重要。相比于线性超声波检测方法,固体结构中高阶弹性常数对材料性能的变化更加敏感,高阶弹性常数的改变将导致声波中高次谐波发生变化,因此可以通过对高次谐波的测量反映材料的性能。Landau等<sup>[1]</sup>建立的固体中非线性声波理论为非线性超声检测技术的研究奠定理论基础。

非线性声学根据高次谐波的来源可分为经典非线性声学和接触非线性声学,其中接触非线性主要指结构中接触类微损伤与声波相互作用产生的非线性特征,国内的刘晓宙等<sup>[2-5]</sup>对其做了大量研究。另一类经典非线性问题则与材料晶格的非简谐效应有关,本文讨论的问题是经典非线性声学理论。Cantrel等<sup>[6]</sup>由离散晶格模型建立各向同性介质中的非线性弹性波方程,通过摄动法对一维非线性纵波进行求解,得到谐波幅值与非线性系数的关系,并展开相关实验研究。张世功等<sup>[7]</sup>利用有限元仿真和实验研究分析一维非线性声波传播过程,提出具有一定物理意义的二次谐波随传播距离变化的数学关系。税国双等<sup>[8]</sup>运用非线性纵波对列车外圆弹簧的疲劳损伤进行实验检测,初步实现非线性超声对特殊结构的检测。钱祖文<sup>[9]</sup>推导了弹性介质中二阶势函数的波动方程,并研究各向同性介质中纵波和横波非线性作用。在非线性的瑞利波的研究方面,Zaboloskaya等<sup>[10-11]</sup>基于哈密顿理论公式对各向同性固体介质表面传播的非线性瑞利波进行理论研究,并通过数值方法验证。Herrmann等<sup>[12]</sup>基于声表面波的纵波分量推导出瑞利波非线性系数,并且提出一种测量金属模型中瑞利波二次谐波的方法。然而这些体波和非频域表面波理论部分大多近似为一维非线性纵波,并且局限于均匀单一结构中。近年来,频散导波由于其能量大、衰减减小等优势,引起了学者广泛研究。Lima等<sup>[13]</sup>采用微扰法和互易定理探究板中Lamb波二次谐波产生条件和传播规律;邓明晰等<sup>[14-16]</sup>分别通过界面非

线性声波发射法和导波模式展开法对平面固体结构中导波的非线性问题进行研究;Liu等<sup>[17]</sup>提出了产生具有较强累积效应二次谐波的基波的选择标准;Xiang等<sup>[18]</sup>对Lamb波在复合金属材料中传播时产生的二次谐波问题进行了相关的理论和试验研究。

当分层结构的总厚度远大于检测声波波长时,认为在结构表面传播的是瑞利波,这种分层结构中的瑞利波区别于经典瑞利波,具有频散和多模的特性。通过对瑞利波的频散特性进行反演可以获得介质信息,瑞利波的这一特性已经在地质工程和无损检测中得到广泛应用,但对于非线性的频散瑞利波的研究,由其激发和传播机制的复杂性,在以往的研究中很少涉及。

本文针对均匀分层半空间结构中瑞利波二次谐波的激发和传播规律进行研究。采用二阶微扰近似法和模态分解得到结构中二次谐波的位移解析式,根据瑞利波频散曲线得到基波与二倍频波相速度相等的匹配点,针对不同分层结构中的匹配模式的二次谐波传播特性进行理论分析和数值计算,为实际检测中选择合适的声源频率和瑞利波模式提供理论依据。

## 1 理论基础

### 1.1 非线性波动方程

建立二维直角坐标系 $Oxz$ ,各向同性 $N$ 层半空间结构分布在 $z \geq 0$ 范围内, $z < 0$ 为真空,如图1所示, $z = 0$ 表示第一层介质的上表面,层与层之间满足应力和位移连续的边界条件。自由表面条件下的非线性波动方程和边界条件分别为<sup>[1]</sup>

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{F}, \quad (1a)$$

$$(\mathbf{P}^L + \mathbf{P}^{NL}) \cdot \mathbf{n}_z = 0, \quad z = 0, \quad (1b)$$

其中, $\mathbf{u}$ 表示位移矢量, $\mathbf{n}_z$ 是 $z$ 方向上的单位向量, $\rho$ 为无形变时固体的密度, $\lambda$ 和 $\mu$ 表示拉梅系数, $A$ 、 $B$ 和 $C$ 代表Landau形式的三阶弹性系数, $\mathbf{P}^L$ 为第一阶Piola-Kirchhoff应力张量的线性项, $\mathbf{P}^{NL}$ 为第一阶Piola-Kirchhoff应力张量的非线性项, $\mathbf{F}$ 是第一阶Piola-Kirchhoff应力张量非线性项的散度,它们分别表示为

$$P_{ij}^L = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2a)$$

$$P_{ij}^{\text{NL}} = \left( \frac{\lambda}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + C \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} + B \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{A}{4} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{B}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \\ + (\lambda + B) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (2b)$$

$$F_i = \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \left( 2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j^2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \\ + \left( \mu + \lambda + \frac{A}{4} + B \right) \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_m \partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) + (B + \lambda) \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \\ + \left( \frac{A}{4} + B \right) \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + (B + 2C) \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right), \quad (2c)$$

其中,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (3)$$

脚标  $i, j, k, l, m$  均取 1、2、3 且满足爱因斯坦求和约定。

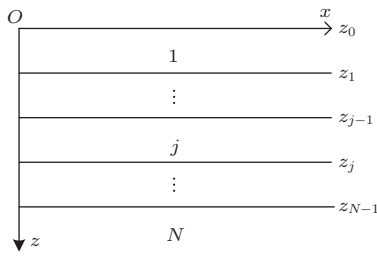


图1 分层半空间示意图

Fig. 1 The draft of a layered half-space

## 1.2 非线性方程的求解

在弱非线性条件下, 利用微扰法, 将质点位移矢量  $\mathbf{u}(x, z, t)$  近似为

$$\mathbf{u}(x, z, t) = \mathbf{u}^{(0)}(x, z, t) + \mathbf{u}^{(1)}(x, z, t), \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{u}^{(0)}(x, z, t)$  和  $\mathbf{u}^{(1)}(x, z, t)$  分别对应声场中的基波和二次谐波, 并且二者满足如下关系:

$$\mathbf{u}^{(0)}(x, z, t) \gg \mathbf{u}^{(1)}(x, z, t). \quad (5)$$

将(4)式代入式(1)后可得以下线性方程:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(0)}) - \mu \nabla^2 \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad (6a)$$

$$\mathbf{P}^L(\mathbf{u}^{(0)}) \cdot \mathbf{n}_z = 0, \quad z = 0. \quad (6b)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) - \mu \nabla^2 \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(0)}), \quad (7a)$$

$$\mathbf{P}^L(\mathbf{u}^{(1)}) \cdot \mathbf{n}_z = -\mathbf{P}^{\text{NL}}(\mathbf{u}^{(0)}) \cdot \mathbf{n}_z, \quad z = 0, \quad (7b)$$

其中,  $\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(0)})$  表示在固体非线性条件下由基波位移产生的驱动力。

由式(6a)结构中频率为  $\omega$  的第  $l$  阶导波模式位移可写为如下形式:

$$\mathbf{u}_l^{(0)}(x, z, t) = \mathbf{u}_l^{(0)}(z) e^{i(k_l x - \omega t)}, \quad (8)$$

其中  $k = \omega/c_l$  为波数,  $c_l$  表示第  $l$  阶导波模式的传播速度, 后文中  $\mathbf{u}_l^{(0)} = \mathbf{u}_l^{(0)}(z)$ 。

根据 Auld 理论<sup>[19]</sup>, 将式(7a)中二次谐波声场表示为角频率为  $2\omega$  时导波模式的线性叠加:

$$\mathbf{u}^{(1)}(x, z, t) = \sum_m A_m(x) \mathbf{u}_m^{(1)}(z) e^{-2i\omega t}, \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{u}_m^{(1)}(z)$  表示线性条件中频率  $2\omega$  处的第  $m$  阶导波模式位移在  $z$  方向的分布, 其定义与式(8)中的  $\mathbf{u}_l^{(0)}(z)$  相同, 体现的是某一特定结构下线性导波模式的固有特性,  $A_m(x)$  是微扰条件下由基波振动产生的二次谐波模式的振幅, 并且其值与传播距离  $x$  有关。根据互易定理, 第  $m$  阶导波模式对应的  $A_m$  可表示为如下形式<sup>[19]</sup>:

$$A_m(x) = \begin{cases} \frac{f_m^{\text{surf}} + f_m^{\text{vol}}}{4P_{mm}} e^{2ik_l x}, & k_m = 2k_l, \\ \frac{f_m^{\text{surf}} + f_m^{\text{vol}}}{4P_{mm}} e^{2ik_l x} \cdot \frac{e^{i(k_m - 2k_l)x} - 1}{i(k_m - 2k_l)}, & k_m \neq 2k_l, \end{cases} \quad (10)$$

其中,

$$P_{mm} = \sum_{j=1}^N P_{mm(j)} \\ = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \left[ \int_{z_j^-}^{z_j^+} \left( \mathbf{v}_m^{(1)*} \cdot \mathbf{P}_m^L(\mathbf{u}_m^{(1)}) \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbf{v}_m^{(1)} \cdot \mathbf{P}_m^{L*}(\mathbf{u}_m^{(1)}) \right) \cdot \mathbf{n}_x dz \right], \quad (11a)$$

$$f_m^{\text{surf}} = \sum_{j=1}^N f_{m(j)}^{\text{surf}} = \sum_{j=1}^N \left[ -\mathbf{v}_m^{(1)*} \mathbf{P}^{\text{NL}}(\mathbf{u}_l^{(0)}) \cdot \mathbf{n}_z \Big|_{z_{j-}}^{z_{j+}} \right], \quad (11b)$$

$$f_m^{\text{vol}} = \sum_{j=1}^N f_{m(j)}^{\text{vol}} = \sum_{j=1}^N \int_{z_{j-}}^{z_{j+}} -\mathbf{v}_m^{(1)*} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}_l^{(0)}) \mathrm{d}z, \quad (11c)$$

其中,  $\mathbf{v}_m^{(1)}$  是频率为  $2\omega$  第  $m$  阶导波模式的质点速度,  $z_{j+}$  和  $z_{j-}$  表示第  $j$  层介质的上表面和下表面,  $\mathbf{n}_x$  为  $x$  方向上的单位向量,  $*$  表示取共轭,  $P_{mm}$  是导波模式  $\mathbf{u}_m^{(1)}$  沿  $x$  正方向的平均功率流(沿  $y$  方向取单位长度),  $f_m^{\text{surf}}$  和  $f_m^{\text{vol}}$  分别为表面牵引力和体积力所提供的面源和体源。值得注意的是, 在层状半空间结构中, 最后一层介质为无限大的半空间结构, 此时式(11a)~(11c)的积分下限为负无穷大, 与板中导波的展开形式不同。

根据式(10)可得当导波模式满足如下条件时, 将产生随传播距离具有积累效应的二次谐波:(1) 基频波和某一模式二倍频波相速度匹配, 即  $k_m = 2k_l$ ; (2) 基波和二倍频波之间存在非零的能量流传递, 即  $f_m^{\text{surf}} + f_m^{\text{vol}} \neq 0$ 。在数值计算中  $f_m^{\text{surf}}$  和  $f_m^{\text{vol}}$  的幅值均大于等于零, 因此仅讨论考虑  $f_m^{\text{surf}}$  和  $f_m^{\text{vol}}$  不同时为零的情况。已有研究表明当导波模式在深度方向上具有对称性时, 存在  $f_m^{\text{surf}} = f_m^{\text{vol}} = 0$  的情况<sup>[20]</sup>, 而瑞利波在分层结构中传播时其幅值在深度方向上逐渐衰减、不具有对称性<sup>[21]</sup>, 即体驱动力  $f_m^{\text{surf}}$  和面驱动力  $f_m^{\text{vol}}$  均不为零。因此在理论上满足相速度匹配的点, 均能产生具有累积效应的二次谐波, 而当  $k_m \neq 2k_l$  时二次谐波不具备积累效应, 幅度将随传播距离周期震荡。需要说明的是, 本文采

用摄动近似法对非线性瑞利波的传播特性进行理论分析时仅考虑了基波和二次谐波, 忽略了二次谐波以上的高次谐波, 得到以上结论, 并未考虑实际传播过程中二次谐波能量向更高次谐波传递以及声波在介质中传播时的衰减, 后续研究中将结合实验进行详细讨论。

由于不具备距离积累效应的二次谐波很难被观察到, 因此通常只关心相速度匹配条件下瑞利波二次谐波的特性, 定义参数  $\beta_m$  表示匹配条件 ( $k_m = 2k_l$ ) 下, 第  $l$  阶基波模式产生的瑞利波二次谐波强度:

$$\beta_m = b_m |\mathbf{u}_m^{(1)}| / |\mathbf{u}_l^{(0)}|^2, \quad (12)$$

其中,  $b_m = (f_m^{\text{surf}} + f_m^{\text{vol}}) / (4P_{mm})$ 。可见  $\beta_m$  由基波与二倍频波间的能量传递关系, 以及线性条件瑞利波的固有激发特性共同决定, 是一个随频率和导波模式变化的变量。但是根据式(11a)~(11c), 在固定(材料、尺寸等)的分层介质结构和固定频率的声源激励下,  $\beta_m$  仅由介质的二阶、三阶弹性常数决定, 因此通过测量和观察  $\beta_m$  的大小能够反映分层结构表面介质的非线性程度。同时,  $\beta_m$  值越大, 相应的二次谐波幅值越大, 更容易被实际测量。

## 2 数值计算

本节以实际应用中使用较为广泛的双层半空间和含有低速夹层三层半空间结构为例, 数值计算并分析二次谐波传播规律, 选择出模型中适用于实际检测的声源频率和基波模式。分层结构中的材料相关参数<sup>[10,22]</sup>如表1所示。

表1 材料参数

Table 1 Parameters of materials

| 材料   | $\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$ | $\lambda/\text{GPa}$ | $\mu/\text{GPa}$ | $A/\text{GPa}$ | $B/\text{GPa}$ | $C/\text{GPa}$ |
|------|--------------------------------------|----------------------|------------------|----------------|----------------|----------------|
| 环氧树脂 | 1120                                 | 3.9                  | 1.28             | -100           | -83            | -106           |
| 钢    | 7874                                 | 111                  | 82.1             | -760           | -250           | -179           |
| 铝    | 2700                                 | 56                   | 26.5             | -400           | -200           | -115           |

### 2.1 双层半空间结构

建立由环氧树脂和钢复合的双层半空间结构模型, 第一层介质为环氧树脂其厚度  $h = 0.01 \text{ m}$ 。根据瑞利波频散方程<sup>[21]</sup>绘制该模型的频散曲线如图2所示, S系列和s系列分别表示的基频瑞利波和

二倍频瑞利波的频散曲线, 它们的交点即为相速度匹配点。图中计算  $\beta_m$  时, 假设基阶频散曲线上的每一点都存在匹配模式(匹配模式的速度与基阶模式相等, 频率为基频的2倍), 根据公式(10), 此时匹配模式只能为其自身, 即  $m = l$ , 最终得到与基频

瑞利波频散曲线相对应的  $\beta_m$ ，对其取对数后再除以  $\lg \beta_m$  中的最大值进行归一化处理，并以颜色的变化在频散曲线上表示。图2中相速度匹配点处的  $\beta_m$  则反映实际匹配条件下对应基波模式能产生具有线性累积效应二次谐波分量的强度。

根据(9)式可知，伴随基频瑞利波传播时所发生的二次谐波声场可视为一系列二倍频瑞利波叠加而成，如点  $P$  对应频率处，竖直虚线  $L$  与二倍频瑞利波频散曲线存在一系列交点，这些交点对应的二倍频瑞利波模式的叠加即表示伴随  $S_2$  模式传播过程中所发生的二次谐波声场。根据理论部分的分析可知，相速度匹配的模式均能激发出具有累积效应的二次谐波，如图2所示该模型中  $P$  点和  $Q$  点对应的参数  $\beta_m$  较大，因此选择这两点对应的频率和基波模式进行理论计算，同时为了对比结果，同时计算  $\beta_m$  值较小的  $R$  点对应模式产生的二次谐波分量，具体参数如表2所示。需要说明的是，由于实际检测中通常只获得法向位移信号，因此本文仅对法向位移分量进行研究。

匹配点  $R$ 、 $P$  和  $Q$  对应二次谐波分量的法向位移随传播距离变化关系如图3所示。根据数值计算结果，在任意匹配点相速度匹配模式所对应的二次谐波分量，随传播距离的增加而线性增长，而其余分量则沿传播方向周期震荡传播。由图3(c)可知，

尽管匹配点  $Q$  对应的参数  $\beta_m$  最大，但同时该模式产生的周期震荡二次谐波分量的幅值也较大，在一

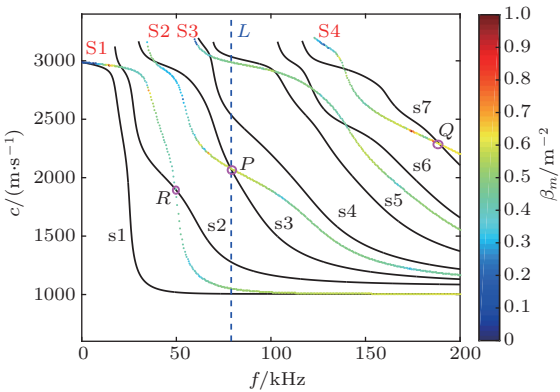


图2 双层半空间中瑞利波频散曲线及参数  $\beta_m$  分布图  
Fig. 2 The dispersion curve of Rayleigh waves and distribution of  $\beta_m$  in a two-layer half-space

表2 匹配点对应基波模式的具体参数  
Table 2 Parameters of fundamental modes at matching points

| 匹配点 | 频率<br>$f/\text{kHz}$ | 相速度<br>$c/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ | 匹配模式对<br>基波/二倍波 | $\beta_m/\text{m}^{-2}$ |
|-----|----------------------|-----------------------------------------|-----------------|-------------------------|
| $R$ | 50                   | 1901                                    | $S_1/s_2$       | $7.43\times 10^3$       |
| $P$ | 80                   | 2071                                    | $S_2/s_3$       | $2.58\times 10^4$       |
| $Q$ | 190                  | 2289                                    | $S_4/s_7$       | $1.58\times 10^5$       |

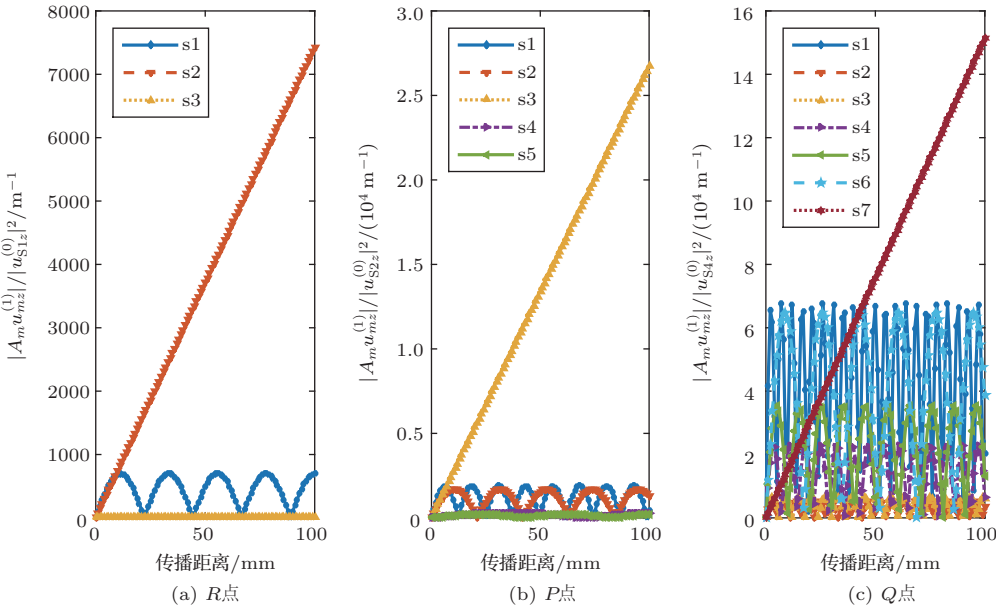


图3 双层半空间中匹配点对应二次谐波分量的法向位移幅值随传播距离变化关系图  
Fig. 3 The influence of propagation distance on the normal displacement of second-harmonic components at matching points in a two-layer half-space

定传播范围内对二次谐波的影响无法忽略,因此在匹配点 $Q$ 对应的基波第S4阶模式无法产生具有明显线性增长的二次谐波,并且高频信号将激发多个导波模式,使得声波在结构中传播更为复杂,不利于声波信号的分析。反之在匹配点 $R$ 、 $P$ 中,各自匹配模式所对应的二次谐波分量不仅随传播距离 $x$ 的增加而线性增长,而且其幅值远大于其他二次谐波分量的幅值,可忽略其他模式,此时伴随基波第S1阶和第S2阶模式产生的二次谐波声场随传播距离呈现明显的线性增长关系。最后通过对比两点的二次谐波幅值,可知在该双层半空间模型中,频率 $f_P$ 处基频波第S2阶模式所产生的二次谐波适用于后续的实验中。

## 2.2 含有低速夹层的三层半空间结构

含有低速夹层是指中间介质的横波速度低于上下层的横波速度,数值计算中该结构的材料从上到下依次为铝、环氧树脂和钢,其中第一层介质和第二次介质厚度分别为0.03 m和0.01 m,材料参数如表1所示。从频散曲线图4可知,该模型中同样存在多个相速度匹配的频率点,根据参数 $\beta_m$ 数值,选择 $R$ 点和 $P$ 点对应频率和基波模式计算相应二次谐波分量如图5所示。频率 $f_R$ 、 $f_P$ 中与基频波相速度匹配的二次谐波分量均随传播距离线性增长,但对比图5(a)和图5(b)可知在相同传播距离内匹配点 $P$ 中线性增长的二次谐波分量幅值大,并且非匹配模型对二次谐波声场的影响在较短传播距离内便可忽略不计,因此可以激励声源频率为 $f_R$ 的第S2阶基波模式对此结构进行非线性超声检测工作。

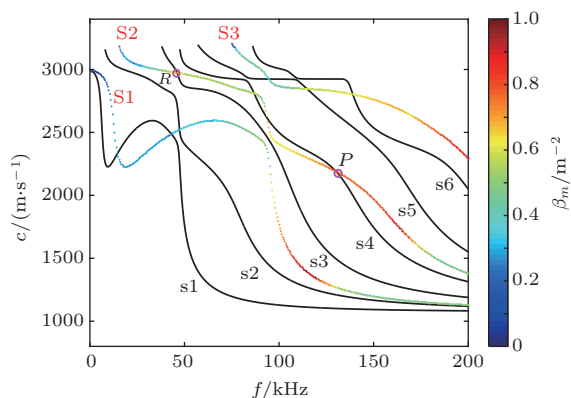


图4 含低速夹层三层半空间中瑞利波频散曲线及参数 $\beta_m$ 分布图

Fig. 4 The dispersion curve of Rayleigh waves and distribution of  $\beta_m$  in a three-layer half-space with low-velocity layer

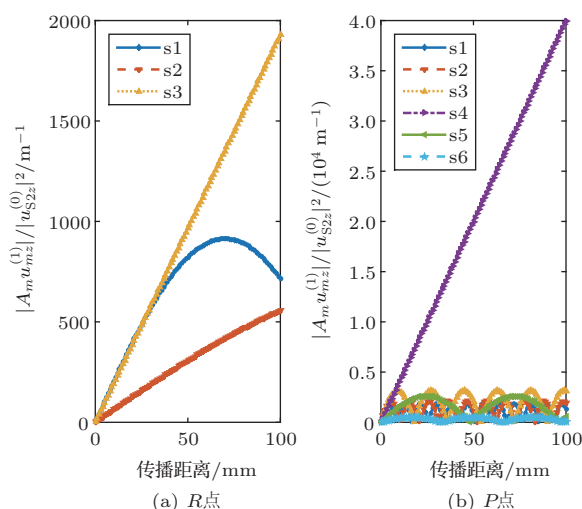


图5 含低速夹层的三层半空间中匹配点对应二次谐波分量的法向位移幅值随传播距离变化关系图

Fig. 5 The influence of propagation distance on the normal displacement of second-harmonic components at matching points in a three-layer half-space with low-velocity layer

## 3 结论

对于瑞利波传播过程中的非线性二次谐波问题,首先由摄动理论得到零阶和一阶位移即基波和二次谐波分别满足的运动方程和边界条件,再将一阶位移表示为一系列二倍频瑞利波模式的叠加,最后根据互易定理得到一阶位移模式振幅表达式。理论分析和数值计算结果表明,与基波相速度匹配的二倍频瑞利波模式所对应的二次谐波分量在传播方向上具有累积效应,随传播距离线性增长;针对分层半空间结构中基频瑞利波存在多个相速度匹配的模式,甚至某一基频波模式具有多个相速度匹配点问题,通过计算参数 $\beta_m$ 对激励声源频率和瑞利波模式进行选择和优化,为后续实际检测工作提供理论指导。

## 参 考 文 献

- [1] Landau L D, Lifshitz E M. Theory of elasticity[M]. London: Pergamon Press, 1959.
- [2] 朱金林, 刘晓宙, 周道, 等. 声波在有裂纹的固体中的非经典非线性传播[J]. 声学学报, 2009, 34(3): 234-241.  
Zhu Jinlin, Liu Xiaozhou, Zhou Dao, et al. Nonclassical nonlinear sound transmission in solid with cracks[J]. Acta Acustica, 2009, 34(3): 234-241.

- [3] Zhang L, Zhang Y, Liu X Z, et al. Multi-crack imaging using nonclassical nonlinear acoustic method[J]. Chinese Physics B, 2014, 23(10): 104301.
- [4] Zhu J L, Zhang Y, Liu X Z. Simulation of multi-cracks in solids using nonlinear elastic wave spectroscopy with a time-reversal process[J]. Wave Motion, 2014, 51(1): 146–156.
- [5] Zhou D, Liu X Z, Gong X F, et al. Concrete damage diagnosed using the non-classical nonlinear acoustic method[J]. Chinese Physics B, 2009, 18(5): 1898–1905.
- [6] Cantrell J H, William T Y. Nonlinear ultrasonic characterization of fatigue microstructures[J]. International Journal of Fatigue, 2001, 23: S487–S490.
- [7] 张世功, 吴先梅, 张碧星, 等. 一维非线性声波传播特性[J]. 物理学报, 2016, 65(10): 104301.  
Zhang Shigong, Wu Xianmei, Zhang Bixing, et al. Propagation properties of one-dimensional nonlinear acoustic waves[J]. Acta Physics Sinica, 2016, 65(10): 104301.
- [8] 税国双, 黄蓬, 汪越胜. 列车外圆弹簧疲劳损伤的非线性超声测试[J]. 声学学报, 2013, 38(5): 570–575.  
Shui Guoshuang, Huang Peng, Wang Yuesheng. Non-destructive evaluation of fatigue damage of train spring using nonlinear ultrasonic method[J]. Acta Acustica, 2013, 38(5): 570–575.
- [9] 钱祖文. 各向同性弹性介质中 P 波与 SV 波的非线性相互作用[J]. 声学学报, 1996, 21(4): 346–351.  
Qian Zuwen. Nonlinear interaction between P and SV wave in isotropic elastic media[J]. Acta Acustica, 1996, 21(4): 346–351.
- [10] Zaboloskaya E A. Nonlinear propagation of plane and circular Rayleigh waves in isotropic solids[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1992, 91: 2568–2575.
- [11] Hamilton M F, Il'insky Y A, Zaboloskaya E A. Evolution equations for nonlinear Rayleigh waves[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1995, 97: 891–897.
- [12] Herrmann J, Kim J Y, Jacobs L J, et al. Assessment of material damage in a nickel-base superalloy using nonlinear Rayleigh surface waves[J]. Journal of Applied Physics, 2006, 99(12): 124913.
- [13] Lima W J N, Hamilton M F. Finite-amplitude waves in isotropic elastic plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 265(4): 819–839.
- [14] Deng M. Cumulative second-harmonic generation of Lamb-mode propagation in a solid plate[J]. Journal of Applied Physics, 1998, 85(6): 3051.
- [15] Deng M. Cumulative second-harmonic generation accompanying nonlinear shear horizontal mode propagation in a solid plate[J]. Journal of Applied Physics, 1998, 84(7): 3500–3505.
- [16] 赵珊珊, 邓明晰, 项延训, 等. 超声 Lamb 波二次谐波发生效率分析与模式选择[J]. 声学学报, 2017, 42(3): 290–296.  
Zhao Shanshan, Deng Mingxi, Xiang Yanxun, et al. Excitation efficiency analysis and mode selection on second harmonic generation of ultrasonic Lamb waves[J]. Acta Acustica, 2017, 42(3): 290–296.
- [17] Liu Y, Chillara V K, Lissenden C J. On selection of primary modes for generation of strong internally resonant second harmonics in plate[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(19): 4517–4528.
- [18] Xiang Y X, Zhu W J, Deng M X, et al. Experimental and numerical studies of nonlinear ultrasonic responses on plastic deformation in weld joints[J]. Chinese Physics B, 2016, 25(2): 024303.
- [19] Auld B A. Acoustic field and waves in solids[M]. London: John Wiley and Sons, 1973.
- [20] Muller M F, Kim J Y, Qu J M, et al. Characteristics of second harmonic generation of Lamb waves in nonlinear elastic plates[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2010, 127(4): 2141–2152.
- [21] Zhang B X, Lu L Y. Rayleigh wave and detection of low-velocity layers in a stratified half-space[J]. Acoustical Physics, 2003, 49(5): 516–528.
- [22] 邓明晰. 分层结构中兰姆波二次谐波发生的模式展开分析[J]. 声学学报, 2005, 30(2): 132–142.  
Deng Mingxi. Model expansion analyses of second-harmonic generation of the Lamb waves in layered structures[J]. Acta Acustica, 2005, 30(2): 132–142.