中国科学 : 数学　2014 年　第 44 卷　第 7 期 : 787 ∼ 798
link.springer.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

三进制 Loop 细分曲面的 C^1 连续性分析

赵义武[①②], 梁学章[②], 李强[②*]

① 长春理工大学空间光电技术国家地方联合工程研究中心, 长春 130022;
② 吉林大学数学学院, 长春 130012
E-mail: 719731551@qq.com, liangxz@jlu.edu.cn, liq@jlu.edu.cn

收稿日期: 2013-09-28; 接受日期: 2013-12-24; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 61170005 和 11271041) 和吉林省自然基金 (标准号: 20130101062JC) 资助项目

摘要　本文利用计算机代数系统, 通过对三进制 Loop 细分算法的细分矩阵和特征映射的构造与分析, 证明 Loop 给出的掩模设计能够保证细分曲面在奇异点是 C^1 连续的, 还给出细分矩阵的次优势特征值的一个取值范围, 在此范围内利用三进制 Loop 细分算法生成的细分曲面都是 C^1 连续的. 最后给出一种三进制 Loop 细分算法的新的边点掩模设计方法, 在保证细分曲面是 C^1 连续的前提下, 比 Loop 给出的计算公式更简单, 细分算法在奇异点附近收敛更快.

关键词　曲面细分　三进制　细分矩阵　特征映射
MSC (2010) 主题分类　65D10, 65D15, 65D17, 65D18

1　引言

曲面细分的基本思想是, 对给定的初始网格, 在不改变拓扑结构的前提下, 按一定的计算规则不断加密, 当计算规则满足某些条件 (线性的、仿射不变的、局部紧支撑的和静态的等) 时, 无限次加密的网格将收敛到一个连续的几何图形.

下面介绍一些基本概念:

(1) 掩模 (mask): 掩模也称为面具, 表示在细分过程中利用旧点生成新点的计算规则. 这种计算规则给出了利用旧点的组合来生成新点的计算方法. 一般地, 掩模可以利用计算公式给出, 也可以直接给出公式的系数并在图形中的对应顶点处标示相应的系数. 掩模的系数表示了相应的旧点对生成的新点的贡献.

(2) 价 (valence): 若一个顶点有 n 条边与它相连, 则称这个顶点的价为 n.

(3) 规则点 (regular vertices): 对三角形网格, 规则顶点的价为 6, 规则边界点价为 4; 对四边形网格, 规则顶点价为 4, 规则边界点价为 3.

(4) 奇异点 (extraordinary vertices): 除规则点外的其他顶点.

目前常用的曲面细分算法包括基于四边形网格的 Catmull-Clark 算法[1] 和 Doo-Sabin 算法[2]、基于三角形网格的 Loop 算法[3] 等. 细分算法生成的细分曲面在规则点处, 继承了样条曲面的连续性, 例如, Doo-Sabin 细分曲面是 C^1 连续的, Catmull-Clark 细分曲面和 Loop 细分曲面是 C^2 连续的.

英文引用格式: Zhao Y W, Liang X Z, Li Q. The analysis of C^1 regularity of ternary Loop subdivision surface (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 787–798, doi: 10.1360/N012013-00154

由于实际应用中遇到的剖分网格很多为三角形网格, 所以, Loop 细分算法是很常用的方法. 图 1 给出了修正的二进制 Loop 细分算法在规则顶点和边点的掩模, 这里对价为 $n \neq 6$ 的奇异点在计算新顶点时, 旧顶点的掩模系数为

$$\alpha_n = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \frac{3}{8},$$

旧顶点周围一层环上每个点的掩模系数为 $\frac{1-\alpha_n}{n}$. 图 2 给出了对初始网格采用修正的二进制 Loop 细分算法 3 次的结果.

对二进制的 Loop 细分算法, Reif [4] 和 Umlauf [5] 证明了细分曲面在奇异点处是 C^1 连续的. 进一步的分析表明, 二进制的 Loop 细分算法在奇异点的曲率可能无界. 为避免曲率无界, 同时保证细分权的非负性、凸包性和两层环支集性, Loop [6] 提出了一种三进制曲面细分算法, 将细分矩阵的最大的 6 个特征值按递减顺序设计为 $1, \lambda, \lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda^2$, 其余特征值是非负的, 并给出了掩模系数的计算方法. 图 3 给出了三进制 Loop 细分算法在规则点的掩模. 图 4 给出了三进制 Loop 细分算法在奇异点的掩模, 图中虚线为细分 1 次后新生成的网格. 为了保证凸包性, 要求其中的 $\beta = 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k$, 同时可以看出, 三进制 Loop 细分算法的掩模系数的自由度为 $n+1$.

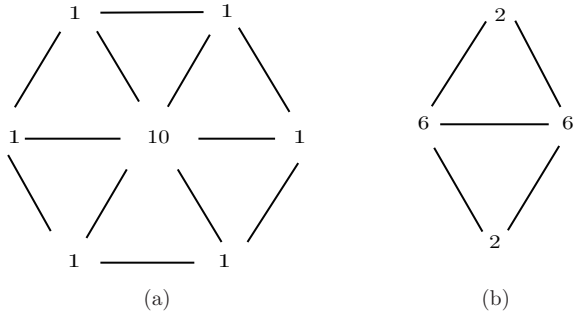

图 1　修正的二进制 Loop 细分算法在规则顶点和边点的掩模. (a) 规则顶点掩模, (b) 边点掩模

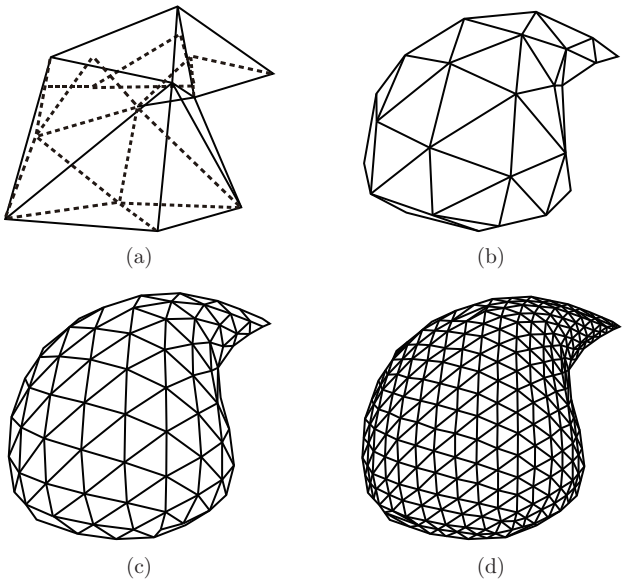

图 2　采用修正的二进制 Loop 细分 3 次的结果. (a) 初始网格, (b) 细分 1 次结果, (c) 细分 2 次结果, (d) 细分 3 次结果

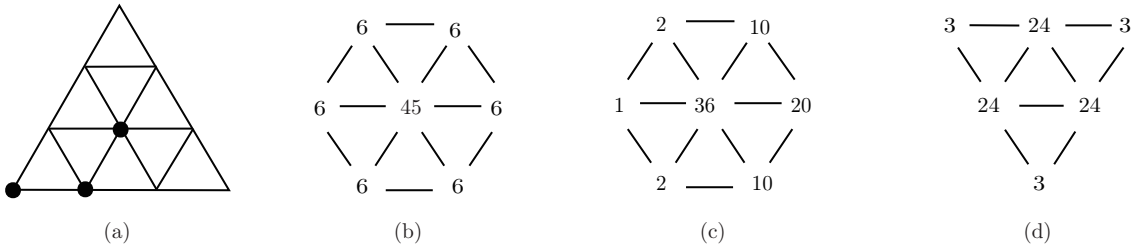

图 3　三进制 Loop 细分算法在规则点的掩模. (b) 规则顶点掩模, (c) 规则边点掩模, (d) 面点掩模

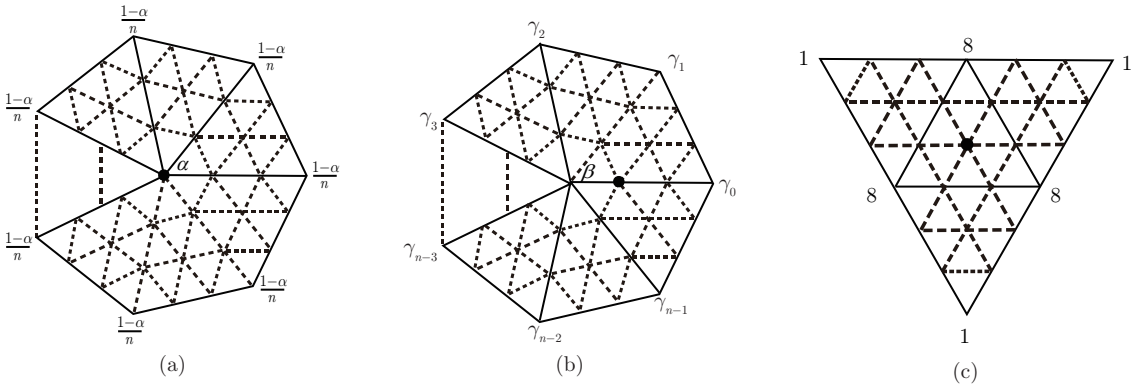

图 4　三进制 Loop 细分算法在奇异点的掩模. (a) 奇异顶点掩模, (b) 奇异边点掩模, (c) 面点掩模

设 λ_1 是细分矩阵的次优势特征值. Loop 给出的结论为在实际应用中, 对 $n \geqslant 4$, 令 $\alpha = \frac{5}{9}$, $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ 会得到性质很好的曲面; 当 $n = 3$ 时, 选择 $\lambda_1 = \frac{1}{9}$ 来避免形状缺陷. 采用这些值, 细分掩模是非负的. 图 5 给出了应用这些数值的三进制细分的例子.

需要说明的是, Loop 没有分析三进制细分算法的特征映射, 仅推测存在 λ_1 的某个取值范围, 以保证特征映射是正则的和单射的. 换言之, Loop 并没有证明所给出的三进制细分算法是 C^1 连续的, 也没有给出 λ_1 的取值范围.

我们从三进制 Loop 细分算法出发, 利用计算机代数系统 Mathematica 8.0 对算法的细分矩阵和特征映射进行构造和分析, 证明了三进制 Loop 细分算法是 C^1 连续的, 并给出了 λ_1 的取值范围.

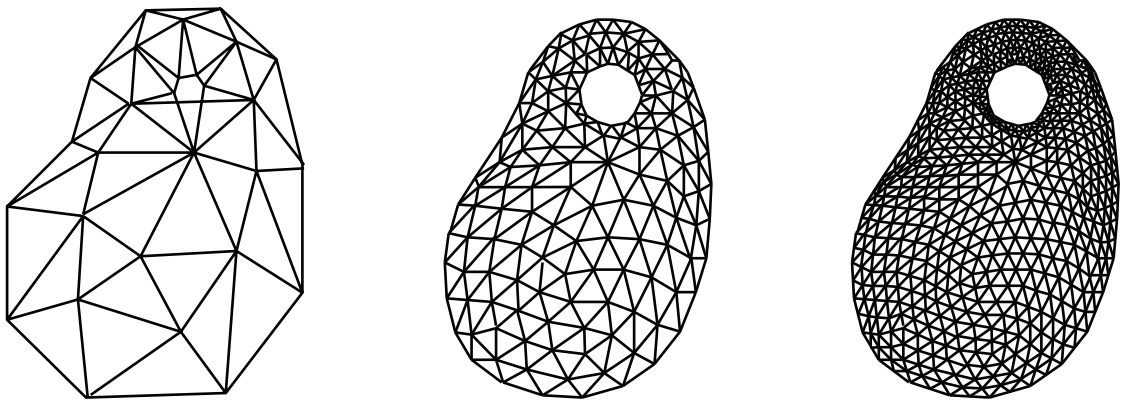

图 5　初始网格和 2 步三进制细分结果

2 三进制 Loop 细分矩阵及特征映射构造

因为经过一步细分, 奇异点被分离开, 所以, 我们可以将分析限制在某个带有一个奇异点的网格上, 记此网格为 C_0, 奇异点周围是规则点的 r 层环 (三进制 Loop 细分算法要求 $r=4$). 图 6 给出了网格 C_0 的一个例子.

设奇异点的价为 n, 在第 m 步细分时, 从网格 C_{m-1} 生成 C_m ($m \geqslant 1$). 记 r_m 为第 m 步细分时生成的非规则部分的曲面环, 则 r_m 可以用 C_m 的子集 $D_m \subset C_m$ (D_m 为奇异点及其周围的 4 层顶点环) 和 4 次 Box 样条基函数组 $\{N^k\}$ 在公共定义域 $\Omega \times \mathbb{Z}_n$ 上参数化. 若 $d_m^0, \ldots, d_m^K$ 表示 D_m 的顶点, 则

$$\begin{aligned} &r_m : \Omega \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{R}^3, \\ &(u,v,j) \mapsto r_m^j(u,v) = \sum_{k=0}^{K} N^k(u,v,j) d_m^k =: N(u,v,j) d_m, \end{aligned}$$

其中

$$\Omega = \{(u,v) \mid u,v \geqslant 0, 1 \leqslant u+v \leqslant 3\},$$

见图 7, 指标 $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

因为所有的 D_m 的顶点个数相同, 所以, 细分算法可以用细分矩阵 A (方阵) 来描述, 即

$$d_m = A d_{m-1}.$$

令 $\lambda_0, \ldots, \lambda_K$ 表示 A 的所有特征值, 代数重数多重的算多个, 且按模有

$$|\lambda_0| \geqslant |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_K|,$$

相应的特征向量记为 $v_0, \ldots, v_K$.

若 $|\lambda_0| > |\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|$, 则由特征向量 v_1 和 v_2 张成的网格 $[v_1, v_2]$ 所定义的二维曲面

$$x(u,v,j) := N(u,v,j)[v_1, v_2] : \Omega \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{R}^2$$

称为细分算法的特征映射[4], 这里 x 可以看作由 n 段 $x^j(u,v) := x(u,v,j)$ 组成. 图 8 给出了三进制 Loop 细分算法的特征映射的一个例子.

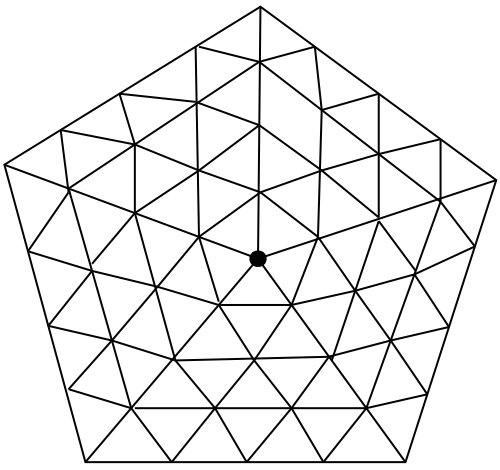

图 6　初始网格 C_0, 带一个价为 5 的奇异点, 围绕 4 层规则点的环

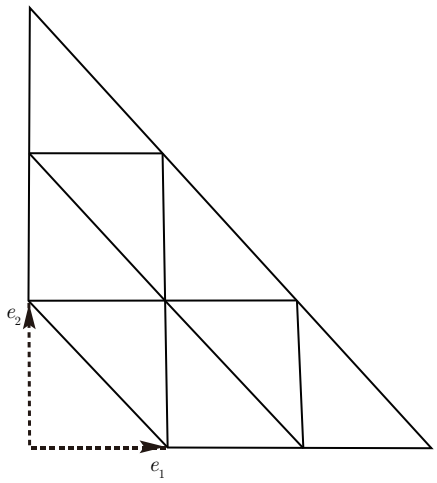

图 7 Ω^{Δ} 的定义域

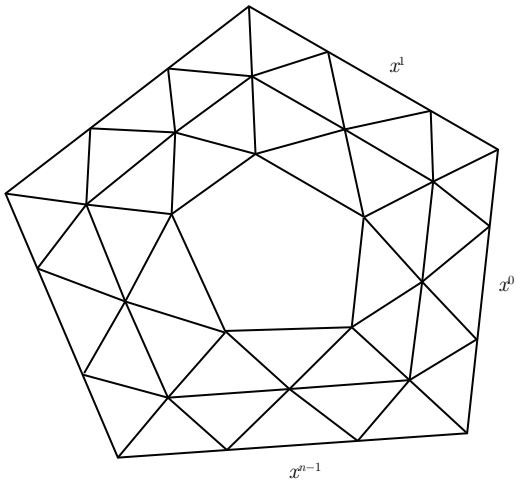

图 8 三进制 Loop 细分算法的特征映射 ($n = 5$)

定理 1 [4] 设 λ 是一个 2 重实特征值, 若特征映射是正则的和单射的, 且 $\lambda_0 = 1 > |\lambda| > |\lambda_3|$, 则对几乎所有的初始控制网格 C_0, 细分曲面是 C^1 连续的.

下面还要用到细分算法的两个性质:

(1) 称一个细分算法是对称的, 若它关于标号 d_m 在平移和反射下是不变的. 显然, 在规则六边形支集上基于 Box 样条的细分算法是对称的.

此性质说明细分矩阵 A 关于块 A_j, $j = 0, \ldots, n-1$ 具有循环结构, 所以, A 酉相似于一个分块对角阵 $\hat{A}$. $\hat{A}$ 的对角块由 A_j 通过离散 Fourier 变换得到

$$\hat{A}_j = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-jk} A_k, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

其中 $\omega_n = \exp(\frac{2\pi}{n}\mathrm{i})$ 表示 n 次单位根, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. 这意味着, 若 $\hat{v}$ 是 $\hat{A}_j$ 关于特征值 μ 的特征向量, 则 μ 也是 A 的一个特征值, 相应的特征向量为

$$v = [\omega_n^0 \hat{v}, \omega_n^{-j} \hat{v}, \ldots, \omega_n^{-j(n-1)} \hat{v}]^{\mathrm{T}}. \tag{2.1}$$

引理 1 [8] 一个对称细分算法的特征映射是单射的必要条件是细分矩阵的次优势特征值是 $\hat{A}_j$ 的一个特征值, $j = 1, n-1$.

(2) 称一个细分算法具有正规化的特征映射, 若 $x^0(e_1 + e_2) = (p, 0)$, 其中 e_1 和 e_2 分别为 u 和 v 方向的单位向量, $p > 0$, 见图 7.

上述两个性质说明, 特征映射 x 在旋转和反射下是对称的[7]. 这允许我们将对特征映射的分析限制在其一部分 x^0 上.

定理 2 [8] 令 $x^0 = [x, y]$ 且用 $x_v^0 := [x_v, y_v]$ 表示 x^0 关于 v 的偏导数. 若一个对称细分算法的正规化的特征映射 x 满足按分量 $x_v^0(u, v) > 0$, 对所有 $(u, v) \in \Omega$, 则特征映射 x 是正则的和单射的.

实际计算时, 我们在定理 2 中用 x^0 的三角 Bézier 曲面片, 这样对所有 $(u, v) \in \Omega$, 证明 x_v^0 按分量为正就化简为证明其 Bézier 控制顶点按分量为正.

推论 1 [5] 若 x_v^0 的所有 Bézier 控制顶点按分量是正的, 则三角形网格的一个对称细分算法的正规化的特征映射 x 是正则的和单射的.

3 对三进制 Loop 细分算法的分析

以下分析和证明中涉及的符号计算和数值计算都利用计算机代数系统 Mathematica 8.0 得到.

在三进制 Loop 细分算法中, 利用细分矩阵 A 从 $10n+1$ 个旧顶点构成的列向量生成 $10n+1$ 个新顶点. 由文献 [5], 我们复制中心奇异顶点 n 次来得到一个 $11n\times 11n$ 的具有分块循环结构的细分矩阵 A,

$$A=\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} \\ A_{n-1} & A_0 & \cdots & A_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & \cdots & A_{n-1} & A_0 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{11n\times 11n}.$$

A 有 n 个 11×11 的子阵 A_k. 顶点标号见图 9, 其中顶点 $1,2,\ldots,11$ 为 x^0 中的顶点, 其余依此类推.

用离散 Fourier 变换 (DFT) 得到与 A 酉相似的分块对角矩阵 $\hat{A}$, 其对角块为

$$\hat{A}_0=\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 & \\ \beta & 1-\beta & 0 & 0 & \\ 20/81 & 56/81 & 1/81 & 4/81 & \\ 8/27 & 2/3 & 0 & 1/27 & \\ 2/27 & 19/27 & 2/27 & 8/81 & \\ 10/81 & 58/81 & 2/81 & 11/81 & O \\ 10/81 & 58/81 & 2/81 & 11/81 & \\ 1/81 & 40/81 & 20/81 & 20/81 & \\ 2/81 & 47/81 & 10/81 & 22/81 & \\ 1/27 & 16/27 & 2/27 & 8/27 & \\ 2/81 & 47/81 & 10/81 & 22/81 & \end{pmatrix},$$

其中 O 为 11×7 阶零矩阵.

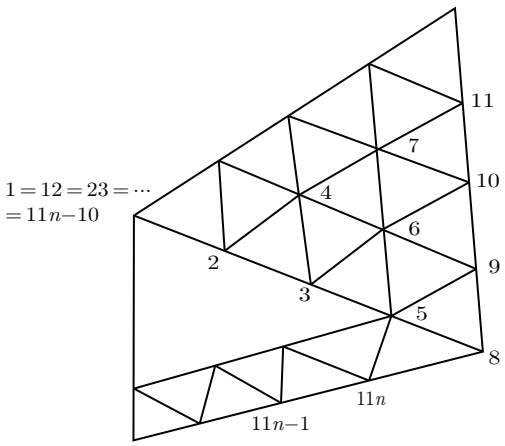

图 9　顶点的标号

$$\hat{A}_j=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & \lambda_j & 0 & 0 & \\
0 & 4/9+20(\omega_n^{-j}+\omega_n^{j})/81 & 1/81 & 2(1+\omega_n^{j})/81 & \\
0 & 8/27+8\omega_n^{-j}/27+\omega_n^{j}/27 & 0 & 1/27 & \\
0 & 5/9+4(\omega_n^{-j}+\omega_n^{j})/27 & 2/27 & 2/27+2\omega_n^{j}/27 & \\
0 & 4/9+20\omega_n^{-j}/81+2\omega_n^{j}/81 & 2/81 & 10/81+\omega_n^{j}/81 & O \\
0 & 20/81+4\omega_n^{-j}/9+2\omega_n^{-2j}/81 & 2\omega_n^{-j}/81 & 10/81+\omega_n^{-j}/81 & \\
0 & 4/9+2\omega_n^{j}/81 & 20/81 & 10/81+10\omega_n^{j}/81 & \\
0 & 4/9+10\omega_n^{-j}/81+\omega_n^{j}/81 & 10/81 & 20/81+2\omega_n^{j}/81 & \\
0 & 8/27+8\omega_n^{-j}/27 & 1/27+\omega_n^{-j}/27 & 8/27 & \\
0 & 10/81+4\omega_n^{-j}/9+\omega_n^{-2j}/81 & 10\omega_n^{-j}/81 & 20/81+2\omega_n^{-j}/81 &
\end{pmatrix},$$

$j=1,\dots,n-1$, 其中 $\lambda_j=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{-jk}\gamma_k$, 且 $\hat{A}_j$ 的第一列全为 0.

块 $\hat{A}_j$, $j=0,\dots,n-1$ 的特征值集合给出了 A 的 $11n$ 个特征值

$$\Big\{1,\alpha-\beta,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\overbrace{\frac{1}{27},\dots,\frac{1}{27}}^{n},\overbrace{\frac{1}{81},\dots,\frac{1}{81}}^{n},0,\dots,0\Big\}.$$

根据对称性, 有 $\gamma_k=\gamma_{n-k}$, 得到 $\lambda_j=\lambda_{n-j}$, 即 λ_j 可以用离散余弦变换表示为

$$\lambda_j=\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k\cos\frac{2jk\pi}{n},\quad j=1,\dots,n-1.$$

由引理 1, A 的 2 重次优势特征值一定是 $\hat{A}_1$ 的特征值

$$\lambda_1=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{-k}\gamma_k,$$

所以有 $|\lambda_1|=|\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k\cos\frac{2k\pi}{n}|<1$, $|\lambda_1|>\alpha-\beta$, $|\lambda_1|>|\lambda_j|=|\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k\cos\frac{2jk\pi}{n}|$, $j=2,\dots,n-2$. 上述条件为特征映射 x 是单射的必要条件.

根据定理 1, 为证明三进制 Loop 细分曲面是 C^1 连续的, 还需要证明相应的特征映射 x 是正则的和单射的.

设 $\hat{A}_1$ 相应于特征值 λ_1 的 11 阶复特征向量为 $\hat{v}=\hat{v}_1-\hat{v}_2\mathrm{i}$, 则 $\hat{v}_1$ 和 $\hat{v}_2$ 分别为 $\hat{A}_1$ 相应于特征值 λ_1 的线性无关的实特征向量. 利用 (2.1), 由 $\hat{v}_1$ 和 $\hat{v}_2$ 构造 A 相应于特征值 λ_1 的两个 $11n$ 阶特征向量 v_1 和 v_2, 进而得到特征映射 x 的 $11n$ 个控制点 (实际为 $10n+1$ 个, 其中奇异点 1 重复 n 次).

记 $[v_1,v_2]=[t_1,t_2,\dots,t_{11n}]^{\mathrm{T}}$, 利用特征映射 x 的 $11n$ 个控制点 $t_i,i=1,\dots,11n$ 构造相应于 x^0 的 81 个 Bézier 控制顶点 $\hat{b_j},j=1,\dots,81$, 这里将 e_1+e_2 对应的 Bézier 控制顶点记为点 1, 其余 Bézier 控制顶点从右向左, 从上向下依次标记, 见图 10.

在计算 Bézier 控制顶点的过程中, 采用我们称之为 “一步四进仿细分法” 来计算 x^0 的 Bézier 控制点. 图 11(a) 为基函数控制点标号,(b) 为三角形 11-21-22 中的 Bézier 控制顶点标号.

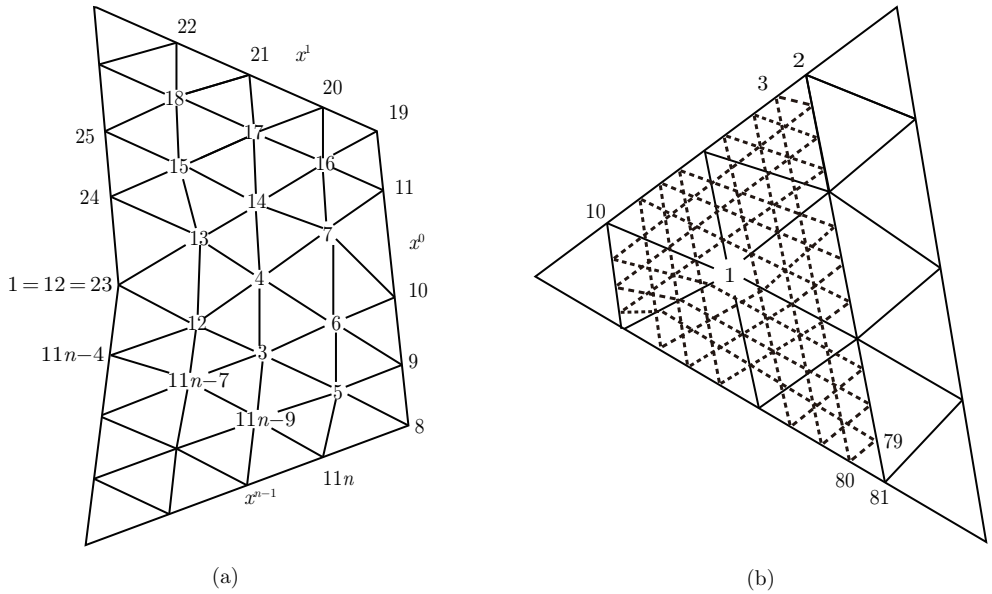

图 10　(a) 特征映射的控制点, (b) x^0 的 Bézier 控制顶点

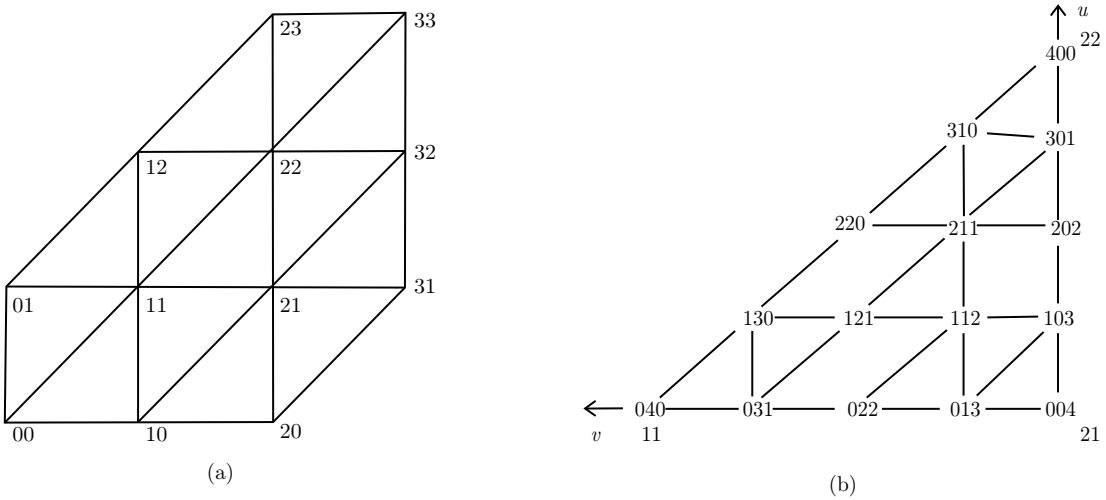

图 11　(a) 基函数控制点标号, (b) 三角形 11-21-22 中的 Bézier 控制顶点标号

具体方法如下:

顶点公式为

$$b_{004}=\frac{1}{2}P_{21}+\frac{1}{12}(P_{20}+P_{10}+P_{11}+P_{22}+P_{32}+P_{31}).$$

边中点公式为

$$b_{022}=\frac{1}{3}(P_{11}+P_{21})+\frac{1}{6}(P_{10}+P_{22}).$$

近顶边点公式为

$$b_{013}=\frac{1}{2}P_{21}+\frac{1}{6}P_{11}+\frac{1}{8}(P_{10}+P_{22})+\frac{1}{24}(P_{20}+P_{32}).$$

内点公式为

$$b_{112}=\frac{5}{12}P_{21}+\frac{1}{4}(P_{11}+P_{22})+\frac{1}{24}(P_{10}+P_{32}).$$

实际计算中, 为简便计, 直接对 $\hat{v}=\hat{v}_1-\hat{v}_2\mathrm{i}$ 计算. 这样得到的 $\hat{b}_j$ 具有如下形式:

$$\hat{b}_j=\hat{b}_{j,u}+\hat{b}_{j,v}\mathrm{i},\quad j=1,\ldots,81.$$

将所有 $\hat{b}_j$ 都乘以 $\bar{\hat{b}}_1=\hat{b}_{1,u}-\hat{b}_{1,v}\mathrm{i}$, 得到 $b_j=\hat{b}_j\bar{\hat{b}}_1$, 从而将特征映射正规化.

根据推论 1, 为证明三进制 Loop 细分算法的正规化的特征映射 x 的正则性和单射性, 我们只需要证明 x_v^0 的 Bézier 控制顶点按分量的正性.

利用 81 个正规化的 Bézier 控制顶点 b_j 计算得到 49 个 x_v^0 的 Bézier 控制顶点. 这些 Bézier 控制顶点都是 λ_1 和 n 的函数. 需要说明的是, 这些 Bézier 控制顶点作为 λ_1 和 n 的函数, 其表达式非常冗长和繁琐, 我们当然可以将其一一列出, 并利用求二元函数极小值的方法来证明, 但是从实用和经济的角度出发, 关于分量的正性的讨论可以采用数值方法来完成. 因为在实际应用中, 遇到的 n 不会很大, 所以限定 $3\leqslant n\leqslant 20$ 讨论. 具体方法是对每个 n, $3\leqslant n\leqslant 20$, 利用计算机代数系统 Mathematica 8.0 计算这些 Bézier 控制顶点的分量的极小值, 当极小值大于零时, 即证明了这些分量的正性.

需要注意的是, 上述讨论中没有出现 α, 而在规则点处 $\alpha=\frac{5}{9}$, 因此取 $\alpha=\frac{5}{9}$ 是自然的.

(1) 首先讨论 Loop 给出的掩模设计方案

Loop [6] 给出了一种利用 Chebyshev 多项式来计算三进制细分公式的掩模系数 γ_i 的方法.

对于规则点 ($n=6$) 情形给出

$$\gamma_0=\frac{20}{81},\quad \gamma_1=\gamma_5=\frac{10}{81},\quad \gamma_2=\gamma_4=\frac{2}{81},\quad \gamma_3=\frac{1}{81},\quad \beta=1-\sum_{k=0}^{5}\gamma_k=\frac{4}{9},\quad \alpha=\frac{5}{9}.$$

利用上述掩模系数得到细分矩阵的部分特征值如下:

$$\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)=\left(\frac{5}{9},\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{9},\frac{1}{3}\right).$$

对于一般的自然数 $n\geqslant 3$, 给出特征值 λ_j 的更一般的取法如下:

$$\lambda_j=\begin{cases}1-\beta, & j=0,\\ \mu^j, & j=1,2,3,\\ \mu^{n-j}, & j=n-3,n-2,n-1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{3.1}$$

其中

$$\alpha=\frac{5}{9},\quad \beta=\alpha-\mu^2,\quad \mu=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & n\geqslant 4,\\ \dfrac{1}{9}, & n=3,\end{cases}$$

此时, γ_k 由下式确定,

$$\gamma_k=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j\cos\frac{2jk\pi}{n},\quad k=0,1,2,\ldots,n-1.\tag{3.2}$$

根据前面的讨论, 当 $\lambda_1=\frac{1}{3}$ 时, 计算结果为对 $3\leqslant n\leqslant 20$, x_v^0 的 Bézier 控制顶点按分量都是正的, 此时, 三进制 Loop 细分曲面是 C^1 连续的, 并且曲率有界.

当 $n=3$ 时, 若取 $\lambda_1=\frac{1}{9}$, 此时, 计算 x_v^0 的 Bézier 控制顶点按分量都是非负的, 但其中会出现一些分量为零的情形. 因为我们是基于特征映射是正则和单射的充分条件来讨论的, 所以, 此时不能否

定 Loop 的选择. 而当取 $\lambda_1 > \frac{1}{9}$ 时, 所有 x_v^0 的 Bézier 控制顶点按分量是正的, 我们估计对于目前的充分条件而言, $\frac{1}{9}$ 是 λ_1 的一个下界. 所以, 我们建议对 λ_1 在 $(1/9, 1/3]$ 之间取值, 如取 $\lambda_1 = \frac{1}{6}$, 则对 $3 \leqslant n \leqslant 20$, 都有 x_v^0 的 Bézier 控制顶点按分量是正的, 即细分曲面是 C^1 连续的. 进一步, 当取 $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ 时, 三进制 Loop 细分曲面不仅是 C^1 连续的, 而且是曲率有界的.

(2) 其次给出 $\lambda_1 = \mu$ 的取值范围

定理 3 设三进制 Loop 细分算法的细分矩阵的 2 重次优势特征值为

$$\lambda_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-k} \gamma_k = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \cos \frac{2k\pi}{n},$$

则当 $4 \leqslant n \leqslant 20$ 且 $\lambda_1 \in [1/9, 1/2]$ 时, 对几乎所有的初始控制网格, 细分曲面是 C^1 连续的; 当 $n = 3$ 时, λ_1 应在 $(1/9, 1/2]$ 的范围内取值. 若还要求细分曲面是曲率有界的, 则应取 $\lambda_1 = 1/3$.

将 λ_1 限定在 $[1/9, 1/2]$ 之间, 此时对 $4 \leqslant n \leqslant 20$, 对所有 x_v^0 的 Bézier 点 $b_{v,k}^0$ 按分量取最小值, 通过计算机代数系统进行符号计算判断 $b_{v,k}^0$ 按分量都是正的, 因此, 这时三进制 Loop 细分曲面都是 C^1 连续的. 因为

$$\lambda_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{-k} \gamma_k = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \cos \frac{2k\pi}{n}, \quad \gamma_0 \leqslant \beta, \quad n \geqslant 3,$$

有

$$|\lambda_1| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \cos \frac{2k\pi}{n} \right| \leqslant \gamma_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k = \frac{1}{2}\gamma_0 + \frac{1-\beta}{2} = \frac{1-\beta+\gamma_0}{2} \leqslant \frac{1}{2},$$

所以, λ_1 的值不会大于 1/2. 因此, 定理中的 λ_1 的上界是最优的.

当 $n = 3$ 时, 取 $\lambda_1 \in [1.000001/9, 1/2]$, 对所有 x_v^0 的 Bézier 点 $b_{v,k}^0$ 按分量取最小值, 通过计算机代数系统进行符号计算判断 $b_{v,k}^0$ 按分量都是正的, 因此, 这时三进制 Loop 细分曲面都是 C^1 连续的. 结合上面对 $n = 3$ 时 Loop 的选择的讨论, 此时, λ_1 应在大于 1/9 的范围内取值.

关于 λ_1 的更精确的下界, 需要更深入的分析. 注意到规则情况 ($n = 6$) 时 $\lambda_1 = 1/3$, 所以建议 λ_1 取得靠近 1/3, 以保证细分曲面都是 C^1 连续的.

关于曲率有界的情况, 在上面的 (1) 中已经讨论.

4 一种三进制 Loop 细分算法边点的掩模计算公式

上面给出了细分矩阵 A 的次优势特征值 λ_1 的取值范围. 在实际计算时, 还要确定边点的掩模系数 γ_i, $i = 0, \ldots, n-1$. 对 $n \geqslant 4$, 我们给出一种掩模计算公式. 参考规则情形的边点掩模系数, 定义所谓 "边点细分特征多项式": $L(t) = \frac{1-\beta}{45}(20 + 20\cos t + 4\cos 2t + \cos 3t)$, 参考值 $\beta = 4/9$. 利用下式计算掩模系数 γ_k,

$$\gamma_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} L\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{2jk\pi}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

取参考值计算, 对 $n = 4, 5, 6$, 计算得到的 γ_k 的数值见表 1. 相应的特征值为

$$\lambda_j = L\left(\frac{2j\pi}{n}\right), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

对 $n = 4, 5, 6$, 计算得到的特征值见表 2.

表 1 掩模系数 γ_k 的值

n	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
6	20/81	10/81	2/81	1/81	2/81	10/81
5	0.246914	0.123457	0.0308642	0.0308642	0.123457	
4	20/81	7/54	4/81	7/54		

表 2 特征值 λ_j 的值

n	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
6	5/9	1/3	1/9	1/27	1/9	1/3
5	5/9	0.273275	0.0662314	0.0662314	0.273275	
4	5/9	16/81	1/27	16/81		

当 $n = 3$ 时, 我们取 $\mu = \lambda_1 = \lambda_2 = 1/3$, 此时, 按照 Loop 给出的 (3.1) 和 (3.2) 计算得到相应的掩模系数和细分矩阵的特征值, 保证了细分曲面是 C^1 连续的, 同时还保证曲率有界. 另一种方案是取 $\mu = \lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{3}/9$, 此时, 按照 Loop 给出的 (3.1) 和 (3.2) 计算得到相应的掩模系数和细分矩阵的特征值, 保证了细分曲面是 C^1 连续的, 同时还保证曲率有界.

我们通过计算证明了, 对 $3 \leqslant n \leqslant 20$, 掩模系数都是正的. 显然, 我们给出的掩模公式在规则点处与三进制 Loop 细分算法的掩模是一致的, 而在奇异点处, 注意到我们得到的 λ_1 小于 Loop 给出的值, 同时大于 1/9, 所以利用我们给出的掩模不仅能保证细分算法在奇异点是 C^1 连续的, 而且计算更简单, 算法在奇异点附近收敛更快.

参考文献

1 Catmull E, Clark J. Recursive generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. Computer Aided Design, 1987, 10: 350–355
2 Doo D, Sabin M. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. Computer Aided Design, 1987, 10: 356–360
3 Loop C. Smooth subdivision surfaces based on triangles. Master's Thesis. Salt Lake City: University of Utah, 1987
4 Reif U. A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices. Comput Aided Geom Design, 1995, 12: 153–174
5 Umlauf G. Analyzing the characteristic map of triangular subdivision schemes. Constr Approx, 2000, 16: 145–155
6 Loop C. Smooth ternary subdivision of triangle meshes. In: Curve and Surface Fitting: Saint-Malo. Nashville, TN: Nashboro Press, 2002
7 Prautzsch H. Smoothness of subdivision surfaces at extraordinary points. Adv Comput Math, 1998, 14: 377–390
8 Peters J, Reif U. Analysis of algorithms generalizing B-spline subdivision. SIAM J Numer Anal, 1998, 35: 728–748

The analysis of C^1 regularity of ternary Loop subdivision surface

ZHAO YiWu, LIANG XueZhang & LI Qiang

Abstract In this paper, by using a computer algebra system, we prove that ternary Loop subdivision scheme can guarantee C^1 regularity at the extraordinary point of the subdivision surface based on the construction and analysis of its subdivision matrix and the characteristic maps. Besides, an interval is given for the sub-dominant

eigenvalue of the subdivision matrix, which can guarantee that ternary Loop rules always generate C^1 subdivision surface. Finally, we propose a new edge rule. This can guarantee the C^1 regularity of the subdivision surface. And also comparing with Loop rules, this scheme has simpler form and faster convergence speed around the extraordinary point.

Keywords **subdivision surface, ternary, subdivision matrix, characteristic map**

MSC(2010) **65D10, 65D15, 65D17, 65D18**

doi: 10.1360/N012013-00154