



4 维 Lorentz 空间中类空极值图的曲率估计

献给彭家贵教授 80 寿辰

倪睿洁, 王长平, 王鹏*

福建师范大学数学与统计学院, 福州 350117

E-mail: niruijie721@sina.com, cpwang@fjnu.edu.cn, pengwang@fjnu.edu.cn

收稿日期: 2024-04-30; 接受日期: 2024-08-05; 网络出版日期: 2024-10-29; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11831005 和 12371052) 资助项目

摘要 本文研究 4 维 Lorentz 空间 $\mathbb{R}_1^4$ 中的非平坦类空极值图的曲率估计. 首先证明如下的 Bernstein 型定理: 若 $\mathbb{R}_1^4$ 中的类空极值图满足 $K \leq 0$, 则 $K = K^\perp \equiv 0$. 进一步, 设非平坦完备类空极值图的 Gauss 映射 $(\phi, \psi) = (Ae^{-\beta(z)}, Be^{-\beta(z)})$, 其中 A, B 为非零常数, 本文证明: 当 $\beta(z)$ 是非常值多项式时, K 整体有界当且仅当 $K^\perp$ 整体有界当且仅当 $\beta(z)$ 是非常值线性函数; 当 $\beta(z)$ 是形如 $g(z)e^{P(z)} + Q(z)$ 的超越整函数时, 其中 $g(z), P(z), Q(z)$ 均为多项式, 则 K 与 $K^\perp$ 均无界; 对于其他的一般情形, Gauss 曲率 K 与法曲率 $K^\perp$ 至少有一个是无界的.

关键词 4 维 Lorentz 空间 类空极值图 整函数 曲率估计

MSC (2020) 主题分类 53A10, 53C42

1 引言

极小曲面作为微分几何中的重要研究对象, 一直深受几何学家重视. 关于极小曲面的一个重要的整体定理是著名的 Bernstein 定理^[3]: $\mathbb{R}^3$ 中的整体极小图一定是平面. 这一定理的进一步研究对几何分析、偏微分方程、复分析及几何测度论等多个数学分支产生了重要影响 (详见文献 [4, 12, 15, 17–19]). 特别地, 关于 Bernstein 定理的一个重要推广是由 do Carmo 和 Peng^[5]、Fischer-Colbrie 和 Schoen^[6]、Pogorelov^[16] 等用不同的方法独立证明的如下重要定理: $\mathbb{R}^3$ 中的稳定完备极小曲面一定是平面. 读者也可参考彭家贵和陈卿^[14] 的经典教材《微分几何》第 10.4 节.

在极小曲面的 Bernstein 型定理的相关研究中, 一个自然而又重要的问题是关于极小曲面的曲率估计: 1952 年, Heinz^[8] 首先利用 Schwarz 引理, 给出了在坐标平面上以原点为圆心、半径为 r 的极小圆盘上原点的 Gauss 曲率估计, 并由此给出了 Bernstein 定理的另一个证明; 1968 年 Simons 的经典工作 [18] 中引入的 Bochner 型技巧也成为极小子流形研究的基本工具; 1975 年, Schoen 等在其经典著

英文引用格式: Ni R J, Wang C P, Wang P. Curvature estimates for spacelike stationary graphs in the 4-dimensional Lorentz space (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 93–106, doi: 10.1360/SSM-2024-0139

作 [17] 中讨论了极小超曲面的曲率估计, 这也是关于极小曲面曲率估计最重要的文献之一; 关于极小曲面曲率估计在高余维下的推广, 读者也可参阅教材 [19].

近年来, 关于 $\mathbb{R}_1^4$ 中的完备类空极值曲面的研究开始受到关注 (参见文献 [2, 9, 10, 13]): 在文献 [2] 中, Alías 和 Palmer 证明, $\mathbb{R}_1^4$ 中满足 $K \geq 0$ 的完备类空极值曲面一定是平坦的; 在文献 [9] 中, Ma 等建立了 $\mathbb{R}_1^4$ 中的完备类空极值曲面的一些整体性定理; 进一步, 在文献 [10] 中, Ma 等通过推广 Osserman 的一个经典定理, 建立了类空极值图的一个全局等温参数, 并且证明, 若全局类空极值图非平坦, 则它的全 Gauss 曲率发散; Ou 等在文献 [13] 中讨论了完备的类空曲面的 Gauss 映射值分布问题.

在前述文献基础上, 本文讨论了 $\mathbb{R}_1^4$ 中的全局类空极值图的 Gauss 曲率 K 以及法曲率 $K^\perp$ 的逐点值分布问题. 主要结果如下:

定理 1.1 设 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 是 $\mathbb{R}_1^4$ 中的类空极值图, 且 $K \leq 0$, 则必有 $K = K^\perp \equiv 0$.

注意到, 3 维欧氏空间中的极小图是 $\mathbb{R}_1^4$ 空间中的类空极值图的特殊情形, 并且 Gauss 曲率非正, 因此上述定理是经典的 Bernstein 定理的自然推广. 当类空极值图的 Gauss 曲率 $K \leq 0$ 时, 类空极值图的具体刻画参见文献 [10, 定理 4.1] 中的前两类.

进一步, 由文献 [10] 知, $\mathbb{R}_1^4$ 中非平坦的全局类空极值图的 Gauss 映射为 $(\phi, \psi) = (Ae^{-\beta(z)}, Be^{-\beta(z)})$, 其中 A, B 为非零常数, $\beta(z)$ 为非常值的整函数. 利用此定理, 可以证明:

定理 1.2 设 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 是 $\mathbb{R}_1^4$ 中非平坦的全局类空极值图, 其具有 Gauss 映射 $(\phi, \psi) = (Ae^{-\beta(z)}, Be^{-\beta(z)})$, 其中 A, B 为非零常数, $\beta(z)$ 为非常值的整函数. 若 $\beta(z)$ 是非常值多项式, 则

- (1) 当 $\beta(z)$ 是线性函数时, K 和 $K^\perp$ 均整体有界;
- (2) 当 $\beta(z)$ 是次数大于 1 的多项式函数时, K 和 $K^\perp$ 均无界.

进一步, 当 $\beta(z)$ 为超越整函数时, 有

定理 1.3 设 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 是 $\mathbb{R}_1^4$ 中非平坦的全局类空极值图, 其具有 Gauss 映射 $(\phi, \psi) = (Ae^{-\beta(z)}, Be^{-\beta(z)})$, 其中 A, B 为非零常数, $\beta(z)$ 为非常值的整函数. 若 $\beta(z)$ 是超越整函数, 则 $|-K + iK^\perp|$ 无界. 特别地, M 的 Gauss 曲率 K 与法曲率 $K^\perp$ 至少有一个是无界的.

我们自然猜测, 此时 M 的 Gauss 曲率 K 与法曲率 $K^\perp$ 应当都是无界的, 但其证明需要更多对超越整函数的分析性质的分析. 可以证明, 如果超越整函数满足下述猜想, 则 M 的 Gauss 曲率 K 与法曲率 $K^\perp$ 都是无界的.

猜想 1.1 若 $\beta(z)$ 为超越整函数, 则对几乎所有的 $\xi \in \mathbb{R}$, 都存在一点列 $\{z_n\}$, 使得

$$\text{Im}\beta(z_n) = \xi, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta'(z_n)| = +\infty.$$

特别地, 对于一类比较简单的超越整函数, 我们有如下曲率估计.

定理 1.4 设 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 是 $\mathbb{R}_1^4$ 中非平坦的全局类空极值图, 其具有 Gauss 映射 $(\phi, \psi) = (Ae^{-\beta(z)}, Be^{-\beta(z)})$, 其中 A, B 为非零常数, $\beta(z)$ 为非常值的整函数. 若超越整函数 $\beta(z) = g(z)e^{P(z)} + Q(z)$, 其中 $g(z), P(z), Q(z)$ 均为多项式, 则 K 与 $K^\perp$ 均无界.

本文安排如下: 第 2 节为预备知识, 回顾 $\mathbb{R}_1^4$ 中类空极值曲面的几何; 第 3 节为主要内容, 完成上述定理的证明, 并给出 $\mathbb{R}_1^4$ 中一些非平坦全局类空极值图的逐点曲率估计.

2 预备知识

2.1 $\mathbb{R}_1^4$ 中类空极值曲面的 Weierstrass 表示

首先回顾四维 Lorentz-Minkowski 空间 $\mathbb{R}_1^4$ 的类空极值曲面的几何 (详见文献 [9]). 四维 Lorentz-Minkowski 空间 $\mathbb{R}_1^4$ 的 Lorentz 内积定义如下:

$$\langle X, X \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

设 $X: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ 是可定向完备类空极值曲面, 即其平均曲率 $H = 0$. 则在局部复坐标 $z = u + iv$ 下, 其 Weierstrass 表示为

$$X = 2\operatorname{Re} \int (\phi + \psi, -i(\phi - \psi), 1 - \phi\psi, 1 + \phi\psi) dh, \quad (2.1)$$

其中 $dh = h'(z)dz$ 是全纯 1-形式, ϕ 及 ψ 为亚纯函数. 这里 (ϕ, ψ) 表示 X 的 Gauss 映射 (参见文献 [9]). 从而,

$$X_z dz = (\phi + \psi, -i(\phi - \psi), 1 - \phi\psi, 1 + \phi\psi) dh. \quad (2.2)$$

其度量为

$$ds^2 = |dX|^2 = e^{2\omega} |dz|^2 = \langle X_z, X_z \rangle |dz|^2 = 2|\phi - \bar{\psi}|^2 |dh|^2. \quad (2.3)$$

进一步, 曲面 X 的 Gauss 曲率和法曲率公式为

$$-K + iK^\perp = 4e^{-4\omega} e^{-2i\theta} |h'|^2 \phi_z \bar{\psi}_z = 4e^{-2\omega} \frac{\phi_z \bar{\psi}_z}{(\phi - \bar{\psi})^2} = \Delta \ln(\phi - \bar{\psi}), \quad (2.4)$$

其中 $\Delta \triangleq 4e^{-2\omega} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ 为关于度量 ds^2 的 Laplace 算子.

2.2 $\mathbb{R}_1^4$ 中的全局类空极值图

本小节主要给出 $\mathbb{R}_1^4$ 中的全局类空极值图的定义, 以及 $\mathbb{R}_1^4$ 中的全局类空极值图的分类 (详见文献 [10]).

定义 2.1 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ 是光滑的向量值函数, 若满足 $M = \operatorname{graph} f := \{(x, f(x)): x \in \mathbb{R}^2\}$ 是 $\mathbb{R}_1^4$ 中的类空极值曲面, 则称曲面 M 是向量值函数 f 的全局类空极值图.

定理 2.1 ^[10] 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ 是光滑的向量值函数, 且满足 $M = \operatorname{graph} f := \{(x, f(x)): x \in \mathbb{R}^2\}$ 是 $\mathbb{R}_1^4$ 中的类空极值曲面, 则存在常数 $a, b \in \mathbb{R}$ 满足如下的非奇异性变换:

$$\begin{cases} x_1 = u_1, \\ x_2 = au_1 + bu_2 \quad (b > 0), \end{cases} \quad (2.5)$$

使得 (u_1, u_2) 是类空极值曲面 M 的全局等温参数.

定理 2.1 给出类空极值曲面 $M = \operatorname{graph} f$ 的一个全局等温参数 (u_1, u_2) . 由文献 [9] 及 [10, 定理 4.1] 可得如下定理:

定理 2.2 (参见文献 [10, 定理 4.1]) 设 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 是 $\mathbb{R}_1^4$ 中的完备类空极值图. 记 $z = u_1 + iu_2$, $X = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$. 则 M 为以下三种情形之一:

(1) f 是仿射线性函数, 此时 M 满足:

$$X_z = \frac{1}{2}(1, c, C_1, C_2), \quad c = a - ib,$$

其中 C_1, C_2 为常值函数. 此时 $K = K^\perp \equiv 0$.

(2) 存在定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的非线性调和函数 h , $\mathbb{R}_1^2$ 上的非零类光向量 y_0 , 以及常值向量 y_1 , 使得

$$f = hy_0 + y_1, \quad X_z = \frac{1}{2}(1, -i, \beta', \mp\beta'),$$

其中全纯函数 β 满足 $\text{Re}\beta(z) = 2h$ 及 $\beta(0) = 0$, $\beta' = \beta_z$. 此时 $K = K^\perp \equiv 0$.

(3) $K \neq 0, K^\perp \neq 0$. 此时

$$X_z = \frac{1}{2}(1, c, \mu \cosh \beta, \mu \sinh \beta), \quad c = a - ib, \quad (2.6)$$

其中 $\beta = \beta(z)$ 是定义在复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常值整函数, $\mu^2 = -(1 + c^2) \neq 0$. 此时 μ 和 c 均为复值常数.

2.3 整函数

本小节主要介绍与后续定理证明有关的整函数的性质.

定义 2.2 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析的函数称为整函数.

定理 2.3 ^[7] 若 $f(z)$ 为一整函数, 则

- (1) $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点的充要条件为 $f(z)$ 为常数 c_0 ;
- (2) $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点的充要条件为 $f(z)$ 是一个 m 次多项式 $c_0 + c_1z + \cdots + c_mz^m$ ($c_m \neq 0$);
- (3) $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点的充要条件为 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 中有无穷多个 c_n 不等于 0, 并称这样的 $f(z)$ 为超越整函数.

定理 2.4 ^[20] 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 ∞ 为极点的充要条件是 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.

定理 2.5 ^[20] 函数 $f(z)$ 的孤立奇点 ∞ 为本性奇点的充要条件是 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 不存在 (即当 z 趋向于 ∞ 时, $f(z)$ 不趋向于任何 (有限或无穷) 极限).

定理 2.6 ^[1] 设 $f(z)$ 是一个超越整函数, 则对于任意有限复数 E , 除去一个可能的例外, 方程

$$f(z) = E$$

都有无穷多个根.

定义 2.3 ^[11] 设 $f(z)$ 是一个整函数, 定义

$$M(r, f(z)) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

其中, 若 $f(z)$ 为超越整函数, 当 r 充分大时, 有

$$r^n < M(r, f(z)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3 $\mathbb{R}_1^4$ 中全局类空极值图的曲率估计

结合定理 2.2 中情形 (3) 的公式 (2.6) 及曲率计算公式 (2.4), 我们有如下引理.

引理 3.1 设 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 满足定理 2.2 中的情形 (3). 则其 Weierstrass 表示参数为

$$\phi = \frac{1+ic}{\mu}e^{-\beta}, \quad \psi = \frac{1-ic}{\mu}e^{-\beta}, \quad h' = \frac{\mu}{4}e^{\beta}. \quad (3.1)$$

曲率为

$$\begin{cases} K = \frac{32(2 + (\rho^2 + \rho^{-2}) \cos 2v_2)}{|\mu|^2 |\rho e^{-iv_2} + \rho^{-1} e^{iv_2}|^6} |\beta'|^2, \\ K^\perp = \frac{32(\rho^{-2} - \rho^2) \sin 2v_2}{|\mu|^2 |\rho e^{-iv_2} + \rho^{-1} e^{iv_2}|^6} |\beta'|^2, \end{cases} \quad (3.2)$$

其中 $\rho := |\frac{1+ic}{\mu}|$, $\beta := v_1 + iv_2$.

证明 结合 (2.2) 及 (2.6), 有

$$2(\phi + \psi)h' = 1, \quad -2i(\phi - \psi)h' = c, \quad 2(1 - \phi\psi)h' = \mu \cosh \beta, \quad 2(1 + \phi\psi)h' = \mu \sinh \beta.$$

由此得到 (3.1), 即

$$\begin{cases} \phi = \frac{1+ic}{\mu}e^{-\beta}, \\ \psi = \frac{1-ic}{\mu}e^{-\beta}, \\ h' = \frac{\mu}{4}e^{\beta}. \end{cases}$$

注意到 $\frac{1+ic}{\mu} \frac{1-ic}{\mu} = -1$, 且由 $b > 0$, 可得 $|\frac{1+ic}{\mu}| > |\frac{1-ic}{\mu}|$. 记 $\frac{1+ic}{\mu} := \rho e^{i\theta}$, 其中 $\rho > 1$ 且 $\theta \in \mathbb{R}$, 则 $\frac{1-ic}{\mu} = -\rho^{-1}e^{-i\theta}$. 于是有 $\phi = \rho e^{i\theta}e^{-\beta}$, $\psi = -\rho^{-1}e^{-i\theta}e^{-\beta}$. 代入 (2.3) 中, 得

$$e^{2\omega} = 2|\phi - \bar{\psi}|^2 |h'|^2 = \frac{|\mu|^2 |\rho + \rho^{-1}e^{2iv_2}|^2}{8}. \quad (3.3)$$

进一步, 我们有

$$\frac{\phi_z \bar{\psi}_{\bar{z}}}{(\phi - \bar{\psi})^2} = \frac{-e^{2i\theta} e^{-\beta - \bar{\beta}}}{[e^{i\theta}(\rho e^{-\beta} + \rho^{-1} e^{-\bar{\beta}})]^2} |\beta'|^2 = \frac{-(\rho e^{iv_2} + \rho^{-1} e^{-iv_2})^2}{|\rho e^{-iv_2} + \rho^{-1} e^{iv_2}|^4} |\beta'|^2. \quad (3.4)$$

结合 (2.4)、(3.3)、(3.4), 得到

$$K = -4e^{-2\omega} \text{Re} \frac{\phi_z \bar{\psi}_{\bar{z}}}{(\phi - \bar{\psi})^2} = \frac{32[2 + (\rho^2 + \rho^{-2}) \cos 2v_2]}{|\mu|^2 |\rho e^{-iv_2} + \rho^{-1} e^{iv_2}|^6} |\beta'|^2.$$

同理可得

$$K^\perp = 4e^{-2\omega} \text{Im} \frac{\phi_z \bar{\psi}_{\bar{z}}}{(\phi - \bar{\psi})^2} = \frac{32(\rho^{-2} - \rho^2) \sin 2v_2}{|\mu|^2 |\rho e^{-iv_2} + \rho^{-1} e^{iv_2}|^6} |\beta'|^2.$$

证毕. □

定理 1.1 的证明 若 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 满足定理 2.2 的情形 (3), 则由引理 3.1, 此时曲率的表达式为 (3.2). 由于 $\beta(z)$ 为非常值的整函数, 于是存在一点 $z_0 \in \mathbb{C}$, 使得 $\text{Im}\beta(z_0) = 0$. 若此时 $\beta'(z_0) \neq 0$, 代入 (3.2) 中, 即得 $K(z_0) > 0$; 若此时 $\beta'(z_0) = 0$, 取 z_0 的邻域 D_{z_0} , 满足对任意 $z \in D_{z_0}$, 都有 $2 + (\rho^2 + \rho^{-2}) \cos 2v_2(z) > 0$, 若对于任意 $z \in D_{z_0}$, 都有 $\beta'(z) = 0$, 由零点孤立性定理可知 $\beta'(z) \equiv 0$, 矛盾. 因此存在一点 $w \in D_{z_0}$, 使得 $\beta'(w) \neq 0$, 代入 (3.2) 中, 即得 $K(w) > 0$.

综上, 若 $\beta(z)$ 为非常值的整函数, 则存在一点 $z \in \mathbb{C}$, 使得 $K(z) > 0$. 其与 $K \leq 0$ 矛盾. 于是 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 为定理 2.2 中的情形 (1) 或 (2), 此时 $K = K^\perp \equiv 0$. $\square$

将定理中的条件 $K \leq 0$ 替换为 $K^\perp \leq 0$, 证明类似, 于是有:

定理 3.1 设 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 是 $\mathbb{R}_1^4$ 中的类空极值图, 且 $K^\perp \leq 0$, 则必有 $K = K^\perp \equiv 0$.

由引理 3.1 可知, 若 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 满足定理 2.2 中的情形 (3), 则 K 与 $K^\perp$ 均不恒为零. 我们称此时 M 是非平坦的. 进一步, 结合 (3.2) 以及整函数的性质, 可以考虑其变号性质, 得到如下推论:

推论 3.1 设 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 是 $\mathbb{R}_1^4$ 中非平坦的全局类空极值图, 其具有 Gauss 映射 $(\phi, \psi) = (Ae^{-\beta(z)}, Be^{-\beta(z)})$, 其中 A, B 为非零常数, $\beta(z)$ 为非常值的整函数. 则在 ∞ 的任意去心邻域内, K 与 $K^\perp$ 都变号.

在证明推论 3.1 之前, 我们先证明如下引理:

引理 3.2 若 $\beta(z)$ 为非常值整函数, 则对于任意 $\xi \in \mathbb{R}$, 在 ∞ 的任意去心邻域内, 都存在一点 z_0 , 使得 $\text{Im}\beta(z_0) = \xi$.

证明 由定理 2.3 知 $\beta(z)$ 可能为非常值的多项式或超越整函数. 故下面分情况讨论.

若 $\beta(z)$ 为非常值的多项式, 不妨假设 $\beta(z)$ 为 m 次多项式且 $m \geq 1$. 对于任意 $\xi \in \mathbb{R}$, 取 $s_1 \in \mathbb{R}$, 设 $\beta(z) = s_1 + i\xi$ 的解为 $z_{11}, \dots, z_{1m}$, 不妨取 $z_1 = z_{11}$, 此时 $\text{Im}\beta(z_1) = \xi$. 假设对于任意 $s \in \mathbb{R}$, $\beta(z) = s + i\xi$ 的解均在 $|z| \leq |z_1|$ 内, 于是 $|\beta(z)|$ 在 $|z| \leq |z_1|$ 内无界, 与 $\beta(z)$ 是整函数矛盾. 故而在 $|z_2| > |z_1|$ 以及 $s_2 \in \mathbb{R}$, 使得 $\beta(z_2) = s_2 + i\xi$, 此时 $\text{Im}\beta(z_2) = \xi$. 不妨假设 z_k 已取出, 则存在 $|z_{k+1}| > |z_k|$ 以及 $s_{k+1} \in \mathbb{R}$, 使得 $\beta(z_{k+1}) = s_{k+1} + i\xi$, 此时 $\text{Im}\beta(z_{k+1}) = \xi$. 由此我们得到点列 $\{z_n\}$, 满足对于任一 n , 都有 $\text{Im}\beta(z_n) = \xi$, 且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

若 $\beta(z)$ 为超越整函数, 则结论由定理 2.6 即得. $\square$

推论 3.1 的证明 由引理 3.2 可知在 ∞ 的任一去心邻域内, 对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 都存在点 $\{z_0, z_\pm\}$, 使得

$$\text{Im}\beta(z_0) = \frac{1}{2} \arccos \frac{-2}{\rho^2 + \rho^{-2}}, \quad \text{Im}\beta(z_\pm) = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{-2}{\rho^2 + \rho^{-2}} \pm \varepsilon \right).$$

代入 (3.2) 中的 Gauss 曲率表达式, 得 $K(z_0) = 0$, $K(z_+) > 0$, $K(z_-) < 0$. 对于 $K^\perp$, 证明类似. $\square$

接下来我们期望对 K 与 $K^\perp$ 进行更为细致的估计. 由于 $\beta(z)$ 可能为非常值的多项式整函数或超越整函数, 我们分下面两种情况讨论.

3.1 整函数: 多项式情形

对 K 与 $K^\perp$ 进行估计之前, 我们先证明下述命题成立.

命题 3.1 若 $\beta(z)$ 为次数大于 1 的多项式整函数, 则对于任意 $\xi \in \mathbb{R}$, 都存在一点列 $\{z_n\}$, 使得 $\text{Im}\beta(z_n) = \xi, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta'(z_n)| = +\infty$.

证明 由于 $\beta(z)$ 为次数大于 1 的多项式, 则 $\beta'(z)$ 为非常值多项式. 由引理 3.2 可知, 对于任意 $\xi \in \mathbb{R}$, 存在点列 $\{z_n\}$, 满足对于任一 n , 都有 $\operatorname{Im}\beta(z_n) = \xi$, 且此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$. 又 $\beta'(z)$ 为非常值多项式, 故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta'(z_n)| = +\infty$. $\square$

定理 1.2 的证明 若 $\beta(z)$ 是线性函数, 不妨设 $\beta(z) = Az + B$, 其中 $A \neq 0$. 于是 $\beta'(z) = A$. 由 (3.2) 得

$$|K| = \frac{32|2 + (\rho^2 + \rho^{-2}) \cos 2v_2|}{|\mu|^2 |\rho e^{-iv_2} + \rho^{-1} e^{iv_2}|^6} |A|^2 \leq \frac{32|2 + (\rho^2 + \rho^{-2}) \cos 2v_2|}{|\mu|^2 |\rho - \rho^{-1}|^6} |A|^2 \leq \frac{32(2 + \rho^2 + \rho^{-2})}{|\mu|^2 |\rho - \rho^{-1}|^6} |A|^2.$$

即 K 整体有界. 同理, 由 (3.2) 得

$$|K^\perp| = \frac{32(\rho^{-2} - \rho^2) \sin 2v_2}{|\mu|^2 |\rho e^{-iv_2} + \rho^{-1} e^{iv_2}|^6} |\beta'|^2 \leq \frac{32|\rho^{-2} - \rho^2|}{|\mu|^2 |\rho - \rho^{-1}|^6} |A|^2.$$

即 $K^\perp$ 整体有界.

若 $\beta(z)$ 为次数大于 1 的多项式整函数, 不妨设 $\beta(z)$ 为 m 次多项式且 $m \geq 2$. 对于 K , 首先由 (3.2) 可得

$$|K| = \frac{32|2 + (\rho^2 + \rho^{-2}) \cos 2v_2|}{|\mu|^2 |\rho e^{-iv_2} + \rho^{-1} e^{iv_2}|^6} |\beta'|^2 \geq \frac{32|2 + (\rho^2 + \rho^{-2}) \cos 2v_2|}{|\mu|^2 |\rho + \rho^{-1}|^6} |\beta'|^2. \quad (3.5)$$

由于 $\beta(z)$ 是 m 次多项式, 则由命题 3.1 可知存在点列 $\{z_n\}$, 使得对任一 n , $\operatorname{Im}\beta(z_n) = \frac{\pi}{4}$, 即 $\cos 2v_2(z_n) \equiv 0$, 且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta'(z_n)| = +\infty$. 代入 (3.5) 中, 有

$$|K(z_n)| \geq \frac{64}{|\mu|^2 |\rho + \rho^{-1}|^6} |\beta'(z_n)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

对于 $K^\perp$, 将上述点列 $\{z_n\}$ 代入 (3.2), 同样有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |K^\perp(z_n)| = +\infty$. $\square$

注 3.1 由文献 [10] 可知, 若 $\mathbb{R}_1^4$ 中全局类空极值图 M 非平坦, 则 $\int_M |K| dM$ 与 $\int_M |K^\perp| dM$ 均发散. 但由定理 1.2 可知, 当 $\beta(z)$ 为线性函数时, K 与 $K^\perp$ 均整体有界.

命题 3.2 $\mathbb{R}_1^4$ 中存在 K 与 $K^\perp$ 均整体有界但其 $\int_M |K| dM$ 与 $\int_M |K^\perp| dM$ 均发散的非常平坦全局类空极值图 M .

著名的 Heinz 估计建立了曲率与极小图半径的不等式, 可以看作是 Bernstein 定理的精细估计. 对于定理 1.2 中的类空图, 当 $\beta(z)$ 是次数大于 1 的多项式时, 我们自然也期望建立此时 K 和 $K^\perp$ 与图的半径之间的不等式, 即下述定理.

定理 3.2 设 $M = \operatorname{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 是 $\mathbb{R}_1^4$ 中非平坦的全局类空极值图, 其具有 Gauss 映射 $(\phi, \psi) = (Ae^{-\beta(z)}, Be^{-\beta(z)})$, 其中 A, B 为非零常数, $\beta(z)$ 为非常值的整函数. 若 $\beta(z)$ 是次数为 $m+1$ 的多项式 ($m \in \mathbb{N}$), 则当 r 充分大时, 存在常数 $G \in \mathbb{R}^+$, 使得当 $|z| \leq r$ 时, 有

$$|K| \leq Gr^{2m}, \quad |K^\perp| \leq Gr^{2m}. \quad (3.6)$$

证明 不妨设 $\beta(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{m+1} z^{m+1}$ ($c_{m+1} \neq 0, m \in \mathbb{N}$), 于是, $\beta'(z) = c_1 + 2c_2 z + \cdots + (m+1)c_{m+1} z^m$. 若 $|z| \leq r$, 则有

$$\begin{aligned} |\beta'(z)|^2 &= |c_1 + 2c_2 z + \cdots + (m+1)c_{m+1} z^m|^2 \\ &\leq |c_1|^2 + |2c_2|^2 |z|^2 + \cdots + |(m+1)c_{m+1}|^2 |z|^{2m} \\ &\leq |c_1|^2 + |2c_2|^2 r^2 + \cdots + |(m+1)c_{m+1}|^2 r^{2m}. \end{aligned}$$

于是,

$$|\beta'(z)|^2 \leq |(m+1)c_{m+1}|^2 r^{2m} \left[1 + \left(\frac{|mc_m|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|c_1|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^{2m}} \right) \right].$$

当 $r \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{|mc_m|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|c_1|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^{2m}} \rightarrow 0$, 因而对于任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $r(\varepsilon)$, 使得当 $r > r(\varepsilon)$ 时, 有

$$\frac{|mc_m|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|c_1|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^{2m}} < \varepsilon.$$

不妨取 $\varepsilon = 1$, 于是存在 r_1 , 使得当 $r > r_1$ 时, 有

$$\frac{|mc_m|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|c_1|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^{2m}} < 1.$$

因此, 当 $r > r_1$ 及 $|z| \leq r$ 时, 有

$$|\beta'(z)|^2 \leq 2|(m+1)c_{m+1}|^2 r^{2m}. \quad (3.7)$$

此时, 对于 K , 由 (3.2) 和 (3.7), 可得

$$|K| \leq \frac{64(m+1)^2(2+\rho^2+\rho^{-2})|c_{m+1}|^2}{|\mu|^2|\rho-\rho^{-1}|^6} r^{2m}.$$

因此, 取 $G_1 = \frac{64(m+1)^2(2+\rho^2+\rho^{-2})|c_{m+1}|^2}{|\mu|^2|\rho-\rho^{-1}|^6} > 0$, 则有

$$|K| \leq G_1 r^{2m}.$$

对于 $K^\perp$, 由 (3.2) 和 (3.7), 可得

$$|K^\perp| \leq \frac{64(m+1)^2(\rho^2-\rho^{-2})|c_{m+1}|^2}{|\mu|^2|\rho-\rho^{-1}|^6} r^{2m}.$$

因此, 取 $G_2 = \frac{64(m+1)^2(\rho^2-\rho^{-2})|c_{m+1}|^2}{|\mu|^2|\rho-\rho^{-1}|^6} > 0$, 则有

$$|K^\perp| \leq G_2 r^{2m}.$$

于是取 $G = \max\{G_1, G_2\}$, 当 r 充分大且 $|z| \leq r$ 时, (3.6) 成立. $\square$

3.2 整函数: 超越整函数情形

定理 1.3 的证明 由 (2.4)、(3.3)、(3.4), 可得

$$|-K + iK^\perp| = 4e^{-2\omega} \left| \frac{\phi_z \bar{\psi}_z}{(\phi - \bar{\psi})^2} \right| \geq \frac{32}{|\mu|^2|\rho + \rho^{-1}|^4} |\beta'|^2. \quad (3.8)$$

由于 $\beta(z)$ 为超越整函数, 则 $\beta'(z)$ 也为超越整函数. 由定理 2.6 可知, 存在满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$ 的点列 $\{z_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta'(z_n)| = +\infty$. 代入 (3.8), 我们有

$$|(-K + iK^\perp)(z_n)| \geq \frac{32}{|\mu|^2|\rho + \rho^{-1}|^4} |\beta'(z_n)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

即 $|-K + iK^\perp|$ 无界. $\square$

若要对 K 与 $K^\perp$ 分别进行估计, 由定理 2.5 可知 $\lim_{z \rightarrow \infty} \beta'(z)$ 不存在. 又由定理 2.6 知 $\beta(z)$ 在 ∞ 的任意去心邻域可以取到任意有限复数 E (除一点例外), 因此 $\beta'(z)$ 与 $\operatorname{Im} \beta = v_2$ 在 ∞ 处的情形非常复杂. 为了对 K 与 $K^\perp$ 进行估计, 我们考虑先从常见的整函数出发, 例子如下:

例 3.1 设 $\beta(z) = \cos z$, 此时有

$$v_2(z) = -\sin u_1 \sinh u_2, \quad |\beta'(z)|^2 = \sinh^2 u_2 + \sin^2 u_1. \quad (3.9)$$

对于 K , 取 $\{z_n\} = \arcsin \frac{-\pi}{4 \sinh n} + in$, 于是对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 都有 $v_2(z_n) = \frac{\pi}{4}$, 故 $\cos 2v_2(z_n) \equiv 0$. 另一方面, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $|\beta'(z_n)|^2 = \sinh^2 n + \frac{\pi^2}{16 \sinh^2 n} \rightarrow +\infty$. 将点列 $\{z_n\}$ 代入 (3.5), 有

$$|K(z_n)| \geq \frac{64}{|\mu|^2 |\rho + \rho^{-1}|^6} |\beta'(z_n)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

即 K 无界.

对于 $K^\perp$, 将上述点列 $\{z_n\}$ 代入 (3.2), 同样有

$$|K^\perp(z_n)| \geq \frac{32(\rho^2 - \rho^{-2})}{|\mu|^2 |\rho + \rho^{-1}|^6} |\beta'(z_n)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

即 $K^\perp$ 无界.

例 3.2 设 $\beta(z) = \sin z$, 此时有

$$v_2(z) = \cos u_1 \sinh u_2, \quad |\beta'(z)|^2 = \cosh^2 u_2 - \sin^2 u_1. \quad (3.10)$$

对于 K , 取 $\{z_n\} = \arccos \frac{\pi}{4 \sinh n} + in$. 于是对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 都有 $v_2(z_n) = \frac{\pi}{4}$, 故 $\cos 2v_2(z_n) \equiv 0$. 另一方面, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $|\beta'(z_n)|^2 = \cosh^2 n + \frac{\pi^2}{16 \sinh^2 n} - 1 \rightarrow +\infty$. 将点列 $\{z_n\}$ 代入 (3.5), 有

$$|K(z_n)| \geq \frac{64}{|\mu|^2 |\rho + \rho^{-1}|^6} |\beta'(z_n)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

即 K 无界.

对于 $K^\perp$, 将上述点列 $\{z_n\}$ 代入 (3.2), 同样有

$$|K^\perp(z_n)| \geq \frac{32(\rho^2 - \rho^{-2})}{|\mu|^2 |\rho + \rho^{-1}|^6} |\beta'(z_n)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

即 $K^\perp$ 无界.

注 3.2 猜想 1.1 是基于对上述例子的观察得到的, 事实上, 若 $\beta(z) = \cos z$, 则对于任意的 $\xi \in \mathbb{R}$, 存在 $\eta \in \mathbb{R}^+$, 使得 $|\xi| < \sinh \eta$. 于是取 $\{z_n\} = \arcsin \frac{-\xi}{\sinh \eta n} + i\eta n$. 从而对任一 n , 都有 $v_2(z_n) = \xi$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\beta'(z_n)|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sinh^2 \eta n + \frac{\xi^2}{\sinh^2 \eta n}) = +\infty$.

虽然本文无法证明对于所有超越整函数, K 与 $K^\perp$ 均无界, 但结合定理 2.4、2.6 以及 1.2 的证明方法, 可以证明若 $\beta(z)$ 是一类形如 $g(z)e^{P(z)} + Q(z)$ 的特殊超越整函数, 其中 $g(z), P(z), Q(z)$ 均为多项式, 则 K 与 $K^\perp$ 均无界, 即前述定理 1.4.

定理 1.4 的证明 要证 K 无界, 同样只需证明存在点列 $\{z_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |K(z_n)| = +\infty$. 由于 $\beta(z)$ 是超越整函数, 易知 $g(z)$ 为非零多项式, $P(z)$ 为非常值多项式. 由定理 2.6 知, 对于任意的有限复数 E (除去一个可能的例外), 在 ∞ 的任意去心邻域, 都至少存在一点 z_0 使得 $e^{P(z_0)} = E$. 于是取有限复常数列 $\{E_n = n + it \mid t \in \mathbb{R} \text{ 为常数}, n \in \mathbb{N}^+\}$, 满足下述条件:

(i) E_n 不是例外值, $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

(ii) $2 + (\rho^2 + \rho^{-2}) \cos 2t = \lambda_1 \neq 0$.

(iii) $(\rho^{-2} - \rho^2) \sin 2t = \lambda_2 \neq 0$.

则存在满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$ 的点列 $\{z_n\}$, 使得对任一 n , 都有 $e^{P(z_n)} = E_n$. 事实上, 若取 $N_1 = 1$, 则存在 $|z_1| > N_1$, 使得 $e^{P(z_1)} = E_1$. 取 $N_2 = |z_1|$, 则存在 $|z_2| > N_2$, 使得 $e^{P(z_2)} = E_2$. 不妨假设 N_k 已取出, 取 $N_{k+1} = |z_k|$, 则存在 $|z_{k+1}| > N_k$, 使得 $e^{P(z_{k+1})} = E_{k+1}$.

考虑对 $\beta(z)$ 求导, 得到

$$\beta'(z) = g'(z)e^{P(z)} + P'(z)g(z)e^{P(z)} + Q'(z). \quad (3.11)$$

将上述点列 $\{z_n\}$ 代入 (3.11), 则有

$$\beta'(z_n) = g'(z_n)E_n + P'(z_n)g(z_n)E_n + Q'(z_n).$$

易知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |E_n| = +\infty$, 且 $(g'(z_n) + P'(z_n)g(z_n))E_n \neq 0$. 从而有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\beta'(z_n)| = +\infty$. 代入 (3.5), 得到

$$|K(z_n)| \geq \frac{32|\lambda_1|}{|\mu|^2|\rho + \rho^{-1}|^6} |\beta'(z_n)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

对于 $K^\perp$, 将上述点列 $\{z_n\}$ 代入 (3.2), 同样有

$$|K^\perp(z_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

证毕. □

进一步, 对于定理 1.4 中的类空图, 我们自然也期望建立此时 K 和 $K^\perp$ 与图的半径之间的不等式, 即下述定理.

定理 3.3 设 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 是 $\mathbb{R}_1^4$ 中非平坦的全局类空极值图, 其具有 Gauss 映射 $(\phi, \psi) = (Ae^{-\beta(z)}, Be^{-\beta(z)})$, 其中 A, B 为非零常数, $\beta(z)$ 为非常值的整函数. 若 $\beta(z) = g(z)e^{P(z)} + Q(z)$, 其中 $P(z)$ 为首项系数为 c_{m+1} 的 $m+1$ 次多项式 ($m \in \mathbb{N}$), 且 $g(z), Q(z)$ 均为多项式, 则当 r 充分大时, 存在常数 $G \in \mathbb{R}^+$, 使得当 $|z| \leq r$ 时, 有

$$|K| \leq Ge^{4|c_{m+1}|r^{m+1}}, \quad |K^\perp| \leq Ge^{4|c_{m+1}|r^{m+1}}. \quad (3.12)$$

证明 易知当 $|z| \leq r$ 时, 有 $|e^{z^k}| \leq e^{r^k}$, $\forall k \in \mathbb{N}^+$. 由于 $g(z), P(z), Q(z)$ 均为多项式, 不妨设 $g(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ ($a_n \neq 0$), $P(z) = c_0 + c_1z + \cdots + c_{m+1}z^{m+1}$ ($c_{m+1} \neq 0$), $Q(z) = b_0 + b_1z + \cdots + b_lz^l$, 其中 $n, m, l \in \mathbb{N}$. 则有

$$\begin{aligned} |\beta'(z)|^2 &= |g(z)P'(z)e^{P(z)} + g'(z)e^{P(z)} + Q'(z)|^2 \\ &\leq |g(z)P'(z)e^{P(z)}|^2 + |g'(z)e^{P(z)}|^2 + |Q'(z)|^2. \end{aligned}$$

当 $|z| \leq r$ 时, 首先考虑

$$\begin{aligned}
 |g(z)P'(z)e^{P(z)}|^2 &= |a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n|^2 |c_1z + \cdots + (m+1)c_{m+1}z^m|^2 |e^{c_0+c_1z+\cdots+c_{m+1}z^{m+1}}|^2 \\
 &\leq (|a_0|^2 + |a_1|^2|z|^2 + \cdots + |a_n|^2|z|^{2n})(|c_1|^2 + |2c_2|^2|z|^2 + \cdots + |(m+1)c_{m+1}|^2|z|^{2m}) \\
 &\quad \times |e^{c_0}|^2 |e^{c_1z}|^2 \cdots |e^{c_{m+1}z^{m+1}}|^2 \\
 &\leq (|a_0|^2 + |a_1|^2r^2 + \cdots + |a_n|^2r^{2n})(|c_1|^2 + |2c_2|^2r^2 + \cdots + |(m+1)c_{m+1}|^2r^{2m}) \\
 &\quad \times (e^{|c_0|})^2 (e^{|c_1|r})^2 \cdots (e^{|c_{m+1}r^{m+1}}|)^2 \\
 &\leq (|a_0|^2 + |a_1|^2r^2 + \cdots + |a_n|^2r^{2n})(|c_1|^2 + |2c_2|^2r^2 + \cdots + |(m+1)c_{m+1}|^2r^{2m}) \\
 &\quad \times (e^{2|c_0|})(e^{2|c_1|r}) \cdots (e^{2|c_{m+1}r^{m+1}}|) \\
 &= |a_n|^2r^{2n} \left(1 + \frac{|a_{n-1}|^2}{|a_n|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|a_0|^2}{|a_n|^2} \frac{1}{r^{2n}} \right) e^{2|c_{m+1}|r^{m+1}(1 + \frac{|c_m|}{|c_{m+1}|} \frac{1}{r} + \cdots + \frac{|c_0|}{|c_{m+1}|} \frac{1}{r^{m+1}})} \\
 &\quad \times |(m+1)c_{m+1}|^2r^{2m} \left(1 + \frac{|mc_m|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|c_1|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^{2m}} \right).
 \end{aligned}$$

当 $r \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{|a_{n-1}|^2}{|a_n|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|a_0|^2}{|a_n|^2} \frac{1}{r^{2n}} \rightarrow 0$, 于是存在 $r_1(1)$, 使得当 $r > r_1(1)$ 时, 有

$$\frac{|a_{n-1}|^2}{|a_n|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|a_0|^2}{|a_n|^2} \frac{1}{r^{2n}} < 1.$$

另一方面, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{|c_m|}{|c_{m+1}|} \frac{1}{r} + \cdots + \frac{|c_0|}{|c_{m+1}|} \frac{1}{r^{m+1}} \rightarrow 0$, 于是存在 $r_2(\frac{1}{2})$, 使得当 $r > r_2(\frac{1}{2})$ 时, 有

$$\frac{|c_m|}{|c_{m+1}|} \frac{1}{r} + \cdots + \frac{|c_0|}{|c_{m+1}|} \frac{1}{r^{m+1}} < \frac{1}{2}.$$

同样, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{|mc_m|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|c_1|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^{2m}} \rightarrow 0$, 于是存在 $r_3(1)$, 使得当 $r > r_3(1)$ 时,

$$\frac{|mc_m|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|c_1|^2}{|(m+1)c_{m+1}|^2} \frac{1}{r^{2m}} < 1.$$

故而取 $\tilde{r} = \max\{r_1(1), r_2(\frac{1}{2}), r_3(1)\}$, 当 $r > \tilde{r}$ 及 $|z| \leq r$ 时, 有

$$|g(z)P'(z)e^{P(z)}|^2 \leq 4|a_n|^2|(m+1)c_{m+1}|^2r^{2n+2m}e^{3|c_{m+1}|r^{m+1}}. \quad (3.13)$$

其次考虑 $g'(z)e^{P(z)}$. 易知当 $n = 0$ 时, $g'(z)e^{P(z)} = 0$. 下设 $n \geq 1$, 则当 $|z| \leq r$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 |g'(z)e^{P(z)}|^2 &= |a_1 + 2a_2z + \cdots + na_nz^{n-1}|^2 |e^{c_0+c_1z+\cdots+c_{m+1}z^{m+1}}|^2 \\
 &\leq (|a_1|^2 + |2a_2|^2r^2 + \cdots + |na_n|^2r^{2n-2})(e^{2|c_0|})(e^{2|c_1|r}) \cdots (e^{2|c_{m+1}r^{m+1}}|) \\
 &= |na_n|^2r^{2n-2} \left(1 + \frac{|(n-1)a_{n-1}|^2}{|na_n|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|a_1|^2}{|na_n|^2} \frac{1}{r^{2n-2}} \right) \\
 &\quad \times e^{2|c_{m+1}|r^{m+1}(1 + \frac{|c_m|}{|c_{m+1}|} \frac{1}{r} + \cdots + \frac{|c_0|}{|c_{m+1}|} \frac{1}{r^{m+1}})}.
 \end{aligned}$$

当 $r \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{|(n-1)a_{n-1}|^2}{|na_n|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|a_1|^2}{|na_n|^2} \frac{1}{r^{2n-2}} \rightarrow 0$, 于是存在 $r_4(1)$, 使得当 $r > r_4(1)$ 时, 有

$$\frac{|(n-1)a_{n-1}|^2}{|na_n|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|a_1|^2}{|na_n|^2} \frac{1}{r^{2n-2}} < 1.$$

故而, 取 $\tilde{r} = \max\{r_4(1), r_2(\frac{1}{2})\}$, 当 $r > \tilde{r}$ 及 $|z| \leq r$ 时, 有

$$|g'(z)e^{P(z)}|^2 \leq 2|na_n|^2 r^{2n-2} e^{3|c_{m+1}|r^{m+1}}. \quad (3.14)$$

最后考虑 $Q'(z)$. 易知当 $l = 0$ 时, $Q(z) = 0$. 下设 $l \geq 1$, 则当 $|z| \leq r$ 时, 有

$$\begin{aligned} |Q'(z)|^2 &= |b_1 + 2b_2z + \cdots + lb_lz^{l-1}|^2 \\ &\leq |lb_l|^2 r^{2l-2} \left(1 + \frac{|(l-1)b_{l-1}|^2}{|lb_l|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|b_1|^2}{|lb_l|^2} \frac{1}{r^{2l-2}} \right). \end{aligned}$$

当 $r \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{|(l-1)b_{l-1}|^2}{|lb_l|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|b_1|^2}{|lb_l|^2} \frac{1}{r^{2l-2}} \rightarrow 0$, 于是存在 $r_5(1)$, 使得当 $r > r_5(1)$ 时, 有

$$\frac{|(l-1)b_{l-1}|^2}{|lb_l|^2} \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{|b_1|^2}{|lb_l|^2} \frac{1}{r^{2l-2}} < 1.$$

于是当 $r > r_5(1)$ 及 $|z| \leq r$ 时, 有

$$|Q'(z)|^2 \leq 2|lb_l|^2 r^{2l-2}. \quad (3.15)$$

记 $G_1 = \max\{4|a_n|^2|(m+1)c_{m+1}|^2, 2|na_n|^2, 2|lb_l|^2\}$, 取 $\hat{r} = \max\{\tilde{r}, \tilde{r}, r_5(1)\}$, 由 (3.13)–(3.15) 易知, 当 $r > \hat{r}$ 及 $|z| \leq r$ 时, 有

$$\begin{aligned} |\beta'(z)|^2 &\leq 4|a_n|^2|(m+1)c_{m+1}|^2 r^{2n+2m} e^{3|c_{m+1}|r^{m+1}} + 2|na_n|^2 r^{2n-2} e^{3|c_{m+1}|r^{m+1}} + 2|lb_l|^2 r^{2l-2} \\ &\leq G_1(r^{2n+2m} e^{3|c_{m+1}|r^{m+1}} + r^{2n-2} e^{3|c_{m+1}|r^{m+1}} + r^{2l-2}). \end{aligned}$$

易知 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+2m} e^{3|c_{m+1}|r^{m+1}} + r^{2n-2} e^{3|c_{m+1}|r^{m+1}} + r^{2l-2}}{e^{4|c_{m+1}|r^{m+1}}} = 0$. 则存在 $r_6(1)$, 使得当 $r > r_6(1)$ 时, 有

$$\frac{r^{2n+2m} e^{3|c_{m+1}|r^{m+1}} + r^{2n-2} e^{3|c_{m+1}|r^{m+1}} + r^{2l-2}}{e^{4|c_{m+1}|r^{m+1}}} < 1,$$

即此时,

$$r^{2n+2m} e^{3|c_{m+1}|r^{m+1}} + r^{2n-2} e^{3|c_{m+1}|r^{m+1}} + r^{2l-2} < e^{4|c_{m+1}|r^{m+1}}.$$

进一步取 $\hat{\hat{r}} = \max\{\hat{r}, r_6(1)\}$, 当 $r > \hat{\hat{r}}$ 及 $|z| \leq r$ 时, 有

$$|\beta'(z)|^2 \leq G_1 e^{4|c_{m+1}|r^{m+1}}.$$

故取 $G = \max\{\frac{32(2+\rho^2+\rho^{-2})}{|\mu|^2|\rho-\rho^{-1}|^6} G_1, \frac{32(\rho^2-\rho^{-2})}{|\mu|^2|\rho-\rho^{-1}|^6} G_1\}$, 则当 r 充分大且 $|z| \leq r$ 时, (3.12) 成立. $\square$

对于 $\beta(z)$ 为一般的超越整函数的情形, 结合定义 2.3, 同样也可以建立 K 和 $K^\perp$ 与图的半径之间的不等式.

定理 3.4 设 $M = \text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ 是 $\mathbb{R}_1^4$ 中非平坦的全局类空极值图, 其具有 Gauss 映射 $(\phi, \psi) = (Ae^{-\beta(z)}, Be^{-\beta(z)})$, 其中 A, B 为非零常数, $\beta(z)$ 为非常值的整函数. 若 $\beta(z)$ 为超越整函数, 则当 r 充分大时, 存在常数 $G \in \mathbb{R}^+$, 使得当 $|z| \leq r$ 时, 有

$$|K| \leq GM^2(r, \beta'(z)), \quad |K^\perp| \leq GM^2(r, \beta'(z)). \quad (3.16)$$

证明 由定义 2.3, 当 $|z| \leq r$ 时, 可得

$$|\beta'(z)|^2 \leq M^2(r, \beta'(z)). \quad (3.17)$$

于是由 (3.2) 和 (3.17), 当 $|z| \leq r$ 时, 有

$$|K| \leq \frac{32(2 + \rho^2 + \rho^{-2})}{|\mu|^2|\rho - \rho^{-1}|^6} M^2(r, \beta'(z)), \quad |K^\perp| \leq \frac{32(\rho^2 - \rho^{-2})}{|\mu|^2|\rho - \rho^{-1}|^6} M^2(r, \beta'(z)).$$

故取 $G = \max\{\frac{32(2+\rho^2+\rho^{-2})}{|\mu|^2|\rho-\rho^{-1}|^6}, \frac{32(\rho^2-\rho^{-2})}{|\mu|^2|\rho-\rho^{-1}|^6}\}$, 当 $|z| \leq r$ 时, (3.16) 成立. $\square$

注 3.3 由定理 3.4 可知, 对于一般的超越整函数, 若 K 与 $K^\perp$ 均无界, 则此时它们趋向于无穷的最大速度与其导数在半径为 r 的圆内的最大模有关. 且当 r 充分大时, 对于任意 $m \in \mathbb{N}$ 和常数 $L \in \mathbb{R}^+$, 有

$$Lr^m \leq M^2(r, \beta'(z)),$$

即超越整函数的最大模趋向于无穷的速度远大于多项式整函数.

致谢 感谢审稿人的修改意见.

参考文献

- Ahlfors L V. Complex Analysis. New York: McGraw-Hill, 1979
- Alías L J, Palmer B. Curvature properties of zero mean curvature surfaces in four-dimensional Lorentzian space forms. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1998, 124: 315–327
- Bernstein S. Sur un théorème de géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique. Comm de la Soc Math de Kharkov, 1915–1917, 15: 38–45
- Colding T H, Minicozzi W P II. A Course in Minimal Surfaces. Providence: Amer Math Soc, 2011
- do Carmo M, Peng C K. Stable complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ are planes. Bull Amer Math Soc (NS), 1979, 1: 903–906
- Fischer-Colbrie D, Schoen R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. Comm Pure Appl Math, 1980, 33: 199–211
- Gong S. Concise Complex Analysis (in Chinese). Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2009 [龚升. 简明复分析. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009]
- Heinz E. Über die Lösungen der Minimal flächengleichung. Nachr Akad Wiss Göttingen II Math Phys Kl, 1952, 1: 51–56
- Ma X, Wang C P, Wang P. Global geometry and topology of spacelike stationary surfaces in the 4-dimensional Lorentz space. Adv Math, 2013, 249: 311–347
- Ma X, Wang P, Yang L. Bernstein-type theorems for spacelike stationary graphs in Minkowski spaces. Pacific J Math, 2017, 287: 159–175
- Markushevich. Entire Functions. New York: Elsevier, 1966 [马尔库什维奇. 整函数. 张顺燕, 译. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2012]
- Osserman R. A Survey of Minimal Surfaces, 2nd ed. New York: Dover, 1986
- Ou L, Cheng C, Yang L. On complete space-like stationary surfaces in 4-dimensional Minkowski space with graphical Gauss image. Math Z, 2024, 306: 16
- Peng C K, Chen Q. Differential Geometry (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2002 [彭家贵, 陈卿. 微分几何. 北京: 高等教育出版社, 2002]
- Peng C K, Tong Z Y. Some problems in minimal surfaces (in Chinese). Adv Math (China), 1995, 24: 1–27 [彭家贵, 童占业. 极小曲面中的若干问题. 数学进展, 1995, 24: 1–27]
- Pogorelov A V. On the stability of minimal surfaces. Dokl Akad Nauk SSSR, 1981, 260: 293–295
- Schoen R, Simon L, Yau S T. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. Acta Math, 1975, 134: 275–288
- Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. Ann of Math (2), 1968, 88: 62–105
- Xin Y L. Minimal Submanifolds and Related Topics. Nankai Tracts in Mathematics, vol. 8. Singapore: World Sci Publ, 2018

- 20 Zhong Y Q. Function Theory of Complex Variables (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2013 [钟玉泉. 复变函数论. 北京: 高等教育出版社, 2013]

Curvature estimates for spacelike stationary graphs in the 4-dimensional Lorentz space

Ruijie Ni, Changping Wang & Peng Wang

Abstract In this paper, we investigate the curvature estimates for non-flat spacelike stationary graphs in the 4-dimensional Lorentz space $\mathbb{R}_1^4$. We first prove the following Bernstein-type theorem: If a spacelike stationary graph in $\mathbb{R}_1^4$ satisfies $K \leq 0$, then $K = K^\perp \equiv 0$. Furthermore, let $(\phi, \psi) = (Ae^{-\beta(z)}, Be^{-\beta(z)})$ be the Gauss map of a non-flat complete spacelike stationary graph, where A and B are non-zero constants. We show that when $\beta(z)$ is a non-constant polynomial, K is globally bounded if and only if $K^\perp$ is globally bounded if and only if $\beta(z)$ is a non-constant linear function. When $\beta(z)$ is a transcendental entire function of the form $g(z)e^{P(z)} + Q(z)$, where $g(z), P(z)$ and $Q(z)$ are all polynomials, both K and $K^\perp$ are unbounded. For other general cases, at least one of the Gauss curvature K and the normal curvature $K^\perp$ is unbounded.

Keywords 4-dimensional Lorentz space, spacelike stationary graphs, entire function, curvature estimates

MSC(2020) 53A10, 53C42

doi: 10.1360/SSM-2024-0139