

L-型域上 Toeplitz 算子代数的广群结构*

严绍宗 陈晓漫 徐胜芝

(复旦大学数学研究所, 上海 200433)

摘要 讨论 L-型域上 Toeplitz C^* -代数 $C^*(\Omega)$ 所对应广群 G 的拓扑结构. 用 Euclid 空间加法闭子群的分类方法对 G 的单位空间 M_∞ 的拓扑结构进行了详细刻画.

关键词 L-型域 Toeplitz C^* -代数

在文献[1]中, 我们讨论了 $\mathbb{C}^n$ 中 L-型域上的 Toeplitz C^* -代数的一般性质. 找到了一个广群, 它的 C^* -代数忠实地表示了 L-型域上的 Toeplitz C^* -代数. 如文献[1]所言, 揭示这个广群的单位空间 M_∞ 的拓扑结构很重要. 本文要给 M_∞ 一个细致的刻画.

设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个 L-型域, 即对于某些正数 $\delta_1, \dots, \delta_n < 1$,

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < \delta_1, |z_2| < 1, \dots, |z_n| < 1;$$

$$\text{或 } |z_1| < 1, |z_2| < \delta_2, |z_n| < 1;$$

$$\dots; \text{或 } |z_1| < 1, |z_2| < 1, \dots, |z_n| < \delta_n\}.$$

则 Ω 是一个完备的 Reinhardt 域. 受 Muhly 和 Renault^[2] 及 Curto 和 Muhly^[3] 的工作的影响, 我们在文献[1]中研究了 Ω 上的 Bergman 空间上的 Toeplitz C^* -代数 $C^*(\Omega)$, 指出 $C^*(\Omega)$ 与一个广群 C^* -代数 $C^*(G)$ 同构. 本文将刻画广群 G 的拓扑结构.

1 预备知识

M_∞ 的拓扑结构对应于 Euclid 空间的加法闭子群的分类. 以下结果在直线上是众所周知的 (见文献[4]), 在一般情形也可能为大多数人所知.

定理 A Euclid 空间 $\mathbb{R}^N$ 的任意的加法闭子群 G 必是一个正交和的形式 $G = G_l \oplus G_d$, 此处 G_l 称为 G 的线性部分, 它是 $\mathbb{R}^N$ 的一个线性子空间, G_d 称为 G 的自由部分, 是 G 的一个离散子群. 如果 G_d 是非退化的, 则有一些线性无关的向量 $u_1, \dots, u_n$ 使得 $G_d = \mathbb{Z}u_1 + \dots + \mathbb{Z}u_n$.

用此定理, 我们得到以下判断 $\mathbb{R}^N$ 的加法闭子群在其中稠密的标准.

定理 1 设 G 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^N$ 的加法闭子群. 则 G 在 $\mathbb{R}^N$ 中稠密的充要条件是对于 $\mathbb{R}^N$ 中的每个向量 u , G 在 u 方向上的投影在直线 $\mathbb{R}u$ 上稠密.

证 必要性是显然的.

反之, 写 $\bar{G} = \bar{G}_l \oplus \bar{G}_d$.

(i) 如果 $\bar{G}_l \neq \mathbb{R}^N$ 及 $\bar{G}_d = \{0\}$, 则 G 在每个方向 $u \in \bar{G}_l^\perp$ 上的投影是 $\{0\}$, 矛盾.

1995-12-19 收稿, 1996-07-09 收修稿

* 国家自然科学基金、霍英东教育基金和国家教育委员会基金资助项目

(ii) 如果 $\bar{G}_1 \neq \mathbb{R}^N$ 及 $\bar{G}_d \neq \{0\}$, 则有线性无关的向量 $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^N$ 使得 $\bar{G}_d = \mathbb{Z}u_1 + \dots + \mathbb{Z}u_n$.

因为向量 $u_1, u_2, \dots, u_n$ 是线性无关的, 矩阵 $(\langle u_i, u_j \rangle)_{n \times n}$ 是非奇异的, 此处 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 记 Euclid 内积. 固定一个 n -元有理数 $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0\}$, 存在一个唯一的 n -元实数 $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_n, u_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

令 $u = \sum_{j=1}^n r_j u_j$, 则 G 在方向 u 上的投影是 $\left\{ \left(\sum_{j=1}^n p_j s_j \right) \frac{u}{|u|^2} \mid p \in \mathbb{Z}^n \right\}$. 因为 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 是有理数, 系数集 $\left\{ \sum_{j=1}^n p_j s_j \mid p \in \mathbb{Z}^n \right\}$ 必形如 $\mathbb{Z}\gamma$, 此处 $\gamma \in \mathbb{R}$, 矛盾.

给定一个实数 $x \in \mathbb{R}$, (x) 表示它的小数部分. 命 $(x)' = \min\{(x), (-x)\}$.

引理 1 给定有限个实数 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$, 存在一列严格上升的自然数 $\{p_m\}_{m=1}^\infty$ 使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (p_m \gamma_1)' = 0, \lim_{m \rightarrow \infty} (p_m \gamma_2)' = 0, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} (p_m \gamma_n)' = 0. \quad (2)$$

证 我们将用数学归纳法找一列 $\{p_m\}$ 满足下列不等式: 对于 $m \in \mathbb{N}$

$$(p_m \gamma_1)' < \frac{1}{m}, (p_m \gamma_2)' < \frac{1}{m}, \dots, (p_m \gamma_n)' < \frac{1}{m}. \quad (3)$$

取 $p_1 = 1$, 则 $(p_1 \gamma_1)' < 1, (p_1 \gamma_2)' < 1, \dots, (p_1 \gamma_n)' < 1$.

设 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 已经取到满足不等式(3). 因为集合 $\{((l\gamma_1), (l\gamma_2), \dots, (l\gamma_n)) \mid l \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界子集, 它有一个收敛的子序列, 比如说 $\{((l_k \gamma_1), (l_k \gamma_2), \dots, (l_k \gamma_n))\}_{k=1}^\infty$ 收敛. 存在一个自然数 k_0 , 使得对于所有的 $k > k_0$

$$|(l_k \gamma_1) - (l_{k_0} \gamma_1)| < \frac{1}{m+1}, \dots, |(l_k \gamma_n) - (l_{k_0} \gamma_n)| < \frac{1}{m+1}. \quad (4)$$

注意到对于 $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|(a) - (b)| = \begin{cases} (a - b) & \text{如果 } (a) \geq (b), \\ (b - a) & \text{如果 } (a) < (b). \end{cases} \quad (5)$$

不等式(4)等价于下列不等式: 对于 $i = 1, 2, \dots, n$,

$$(l_k \gamma_i - l_{k_0} \gamma_i) < \frac{1}{m+1} \text{ 或 } (l_{k_0} \gamma_i - l_k \gamma_i) < \frac{1}{m+1}. \quad (6)$$

令 $k = \min\{k' \mid k' > k_0 \text{ 且 } l_{k'} - l_{k_0} > p_m\}$, $p_{m+1} = l_k - l_{k_0}$. 则不等式(6)简化为

$$(p_{m+1} \gamma_1)' < \frac{1}{m+1}, \dots, (p_{m+1} \gamma_n)' < \frac{1}{m+1}. \quad (7)$$

2 M_∞ 的结构

设 X 是 M_∞ 在单形 S 中的像. 对于 $1 \leq \sigma(1) < \dots < \sigma(i) \leq n$, 命

$$S(\sigma(1), \dots, \sigma(i)) = \{x \in S \mid x_j = 0, \text{ 如果 } j \notin \{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\}\},$$

$$\overset{\circ}{S}(\sigma(1), \dots, \sigma(i)) = \{x \in S(\sigma(1), \dots, \sigma(i)) \mid x_j > 0, \text{ 对于 } j = \sigma(1), \dots, \sigma(i)\},$$

$$X(\sigma(1), \dots, \sigma(i)) = X \cap S(\sigma(1), \dots, \sigma(i)),$$

$$\overset{\circ}{X}(\sigma(1), \dots, \sigma(i)) = X \cap \overset{\circ}{S}(\sigma(1), \dots, \sigma(i)).$$

我们称 $X(\sigma(1), \dots, \sigma(i))$ 是 X 的一个闭面, 而 $\overset{\circ}{X}(\sigma(1), \dots, \sigma(i))$ 是 X 的一个开面. 所有的开面和闭面是在 $\mathbb{Z}^n$ 的作用下不变的子集.

引理 2 开面 $\overset{\circ}{X}$ 包含子集

$$D = \left\{ (\delta_1^{2p_1}, \delta_2^{2p_2}, \dots, \delta_n^{2p_n}) / \sum_{j=1}^n \delta_j^{2p_j} \mid p \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

作为一个稠密子集.

证 先证明 $\overset{\circ}{X}$ 包含点 $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$. 对于固定的实数 $\frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_1}, \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_2}, \dots, \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_{n-1}}$, 由引理 1 存在一列严格上升的自然数 $\{k_m\}$ 使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(k_m \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_1} \right)' = 0, \lim_{m \rightarrow \infty} \left(k_m \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_2} \right)' = 0, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} \left(k_m \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_{n-1}} \right)' = 0. \quad (8)$$

取 $p_n(m) = k_m$. 对于 $j = 1, \dots, n-1$, 取

$$p_j(m) = \begin{cases} \left\lceil k_m \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_j} \right\rceil & \text{如果 } \left(k_m \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_j} \right)' = \left(k_m \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_j} \right), \\ - \left\lceil -k_m \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_j} \right\rceil & \text{如果 } \left(k_m \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_j} \right)' = \left(-k_m \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_j} \right). \end{cases} \quad (9)$$

则对于 $j = 1, \dots, n-1$,

$$\left| p_j(m) - p_n(m) \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_j} \right| = \left(k_m \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_j} \right)' \quad (10)$$

因此对于 $j = 1, \dots, n-1$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| p_j(m) - p_n(m) \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_j} \right| = 0. \quad (11)$$

等价地对于 $j = 1, \dots, n-1$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_j^{2p_j(m)} / \delta_n^{2p_n(m)} = 1. \quad (12)$$

因而对于 $j = 1, \dots, n-1$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\delta_j^{2(p_j(m)-1)+2}}{\sum_{i=1}^n \delta_i^{2(p_i(m)-1)+2}} = \frac{1}{n}. \quad (13)$$

从而点 $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ 在开面 $\overset{\circ}{X}$ 中. 由 $\overset{\circ}{X}$ 的不变性, 它也包含所有的如下形式的点

$$x = (\delta_1^{2p_1}, \delta_2^{2p_2}, \dots, \delta_n^{2p_n}) / \sum_{j=1}^n \delta_j^{2p_j}, \quad (14)$$

此处 $p \in \mathbb{Z}^n$. 由 $\overset{\circ}{X}$ 的定义, $\overset{\circ}{X}$ 由下列所有可能的极限点

$$(t_1, t_2, \dots, t_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\delta_1^{2p_1(m)+2}, \delta_2^{2p_2(m)+2}, \dots, \delta_n^{2p_n(m)+2}) / \sum_{j=1}^n \delta_j^{2p_j(m)+2} \quad (15)$$

组成, 此处 $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$. 因此子集 D 在开面 $\overset{\circ}{X}$ 中稠密.

同样的方法给出下列推论.

推论 1 开面 $\overset{\circ}{X}(\sigma(1), \dots, \sigma(i))$ 包含子集

$$D(\sigma(1), \dots, \sigma(i)) = \left\{ (0, \dots, \delta_1^{2p_1}, \dots, \delta_{\sigma(i)}^{2p_i}, \dots, 0) \mid \sum_{j=1}^i \delta_{\sigma(j)}^{2p_j} \mid p \in \mathbb{Z}^i \right\}$$

作为它的一个稠密子集.

定理 2 参数化 $\beta: M_\infty \rightarrow S$ 是满射的充要条件是 $\left\{ \frac{1}{\ln \delta_1}, \frac{1}{\ln \delta_2}, \dots, \frac{1}{\ln \delta_n} \right\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的秩是 n .

证 定义 $\mathbb{Z}^n$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的作用

$$x + p = (x_1 + p_1 \ln \delta_1^2 - p_n \ln \delta_n^2, \dots, x_{n-1} + p_{n-1} \ln \delta_{n-1}^2 - p_n \ln \delta_n^2). \quad (16)$$

定义同胚 $h: \overset{\circ}{S} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$

$$h(t) = (\ln t_1 - \ln t_n, \ln t_2 - \ln t_n, \dots, \ln t_{n-1} - \ln t_n), \quad (17)$$

此处 $t \in \overset{\circ}{S}$. 则 h 保持 $\mathbb{Z}^n$ 在 $\overset{\circ}{S}$ 和 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的作用. D 在映射 h 下的像是

$$h(D) = \left\{ (p_1 \ln \delta_1^2 - p_n \ln \delta_n^2, p_2 \ln \delta_2^2 - p_n \ln \delta_n^2, \dots, p_{n-1} \ln \delta_{n-1}^2 - p_n \ln \delta_n^2) \mid p \in \mathbb{Z}^n \right\},$$

它是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的一个子群, 记为 G . 它在 $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ 方向上的投影是

$$G_u = \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n-1} p_j u_j \ln \delta_j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} p_n u_j \ln \delta_n^2 \right) \frac{u}{|u|^2} \mid p \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

考虑系数集 $C = \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n-1} p_j u_j \ln \delta_j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} p_n u_j \ln \delta_n^2 \right) \mid p \in \mathbb{Z}^n \right\}$. 置 $u_1 = \frac{v_1}{\ln \delta_1^2}, u_2 = \frac{v_2}{\ln \delta_2^2}, \dots, u_{n-1} = \frac{v_{n-1}}{\ln \delta_{n-1}^2}$, 则 $C = \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} p_j v_j - p_n \left(\sum_{j=1}^{n-1} v_j \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_j} \right) \mid p \in \mathbb{Z}^n \right\}$.

设秩是 n . 我们首先需要证明开面 $\overset{\circ}{X}$ 与开面 $\overset{\circ}{S}$ 相等. 只要证明 D 在 $\overset{\circ}{S}$ 中稠密即可.

如果对于某对 $(i, j), i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\frac{v_i}{v_j}$ 是无理数, 则作为 $\mathbb{R}$ 的子群, C 在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 因此 G_u 在直线 $\mathbb{R}u$ 上稠密.

如果对于所有的 $(i, j), i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\frac{v_i}{v_j}$ 是有理数, 则不失一般性可设所有的 v_i 是有理数, 这可以通过适当乘上一个常数做到. 从而 $v_1 \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_1} + v_2 \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_2} + \dots + v_{n-1} \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_{n-1}}$ 一定是有理数, 因为 $\frac{1}{\ln \delta_1}, \frac{1}{\ln \delta_2}, \dots, \frac{1}{\ln \delta_n}$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上是线性无关的. 所以系数集 C 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 因此 G_u 在直线 $\mathbb{R}u$ 上稠密.

由以上讨论, 我们看到子群 $h(D)$ 在每个方向 u 上的投影都在直线 $\mathbb{R}u$ 上稠密, 因此由定理 1, 它在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中稠密, 也即 $\overline{h(D)} = \mathbb{R}^{n-1}$. 这证明 D 在 $\overset{\circ}{S}$ 中稠密, 同样在 S 中稠密. 所以 $X = S$.

反之, 如果 $\text{rank}_{\mathbb{Q}} \left\{ \frac{1}{\ln \delta_1}, \frac{1}{\ln \delta_2}, \dots, \frac{1}{\ln \delta_n} \right\}$ 小于 n , 则存在有理数 $v_1, \dots, v_{n-1}$ 使 $v_1 \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_1} + v_2 \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_2} + \dots + v_{n-1} \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_{n-1}}$ 是有理数. 取方向 $u = \left(\frac{v_1}{\ln \delta_1^2}, \dots, \frac{v_{n-1}}{\ln \delta_{n-1}^2} \right)$, 则 G_u 的系数集是

$$C = \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} p_j u_j \ln \delta_j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} p_n u_j \ln \delta_n^2 \mid p \in \mathbb{Z}^n \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} p_j v_j - p_n \sum_{j=1}^{n-1} v_j \frac{\ln \delta_n}{\ln \delta_j} \mid p \in \mathbb{Z}^n \right\},$$

它是离散的. 因此 G_u 不在直线 $\mathbb{R}u$ 中稠密. 由定理 1, $\overline{h(D)} \neq \mathbb{R}^{n-1}$, 矛盾.

推论 2 如果 $\text{rank}_{\mathbb{Q}} \left\{ \frac{1}{\ln \delta_1}, \dots, \frac{1}{\ln \delta_n} \right\} = r$, 不失一般性, 假设 $\text{rank}_{\mathbb{Q}} \left\{ \frac{1}{\ln \delta_1}, \dots, \frac{1}{\ln \delta_r} \right\} = r$, 则

$$\overset{\circ}{X}(\sigma(1), \dots, \sigma(r)) = \overset{\circ}{S}(\sigma(1), \dots, \sigma(r)).$$

3 $n = 3$ 时的 M_{∞} 的详细分类

$n = 3$ 时, 我们可以给出 $X = M_{\infty}$ 的详细分类

- (i) $\text{rank}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{1}{\ln \delta_1}, \frac{1}{\ln \delta_2}, \frac{1}{\ln \delta_3} \right) = 1$, 我们已在文献[1]中详细讨论了 X .
- (ii) $\text{rank}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{1}{\ln \delta_1}, \frac{1}{\ln \delta_2}, \frac{1}{\ln \delta_3} \right) = 3$, 我们已在第 2 节中详细讨论了 X (见定理 2 和推论 2).
- (iii) $\text{rank}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{1}{\ln \delta_1}, \frac{1}{\ln \delta_2}, \frac{1}{\ln \delta_3} \right) = 2$, 不失一般性设 $\frac{1}{\ln \delta_3} = r_1 \frac{1}{\ln \delta_1} + r_2 \frac{1}{\ln \delta_2}$, 此处 $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$.

情形 I 系数 r_1 或 r_2 是零. 不失一般性设 $r_2 = 0$. 在这种情形, $\frac{\ln \delta_3}{\ln \delta_1}$ 是有理的, 因此 $\frac{\ln \delta_3}{\ln \delta_2}$ 及 $\frac{\ln \delta_1}{\ln \delta_2}$ 是无理的. 所以开面 $\overset{\circ}{X}(1, 3)$ 是离散的, 而 $\overset{\circ}{X}(1, 2)$ 和 $\overset{\circ}{X}(2, 3)$ 分别与 $\overset{\circ}{S}(1, 2)$ 和 $\overset{\circ}{S}(2, 3)$ 相等. 为得到 $\overset{\circ}{X}$ 的图象, 我们应用同胚 $h: \overset{\circ}{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$. D 在映射 h 下的像 (见 (17) 式) 是 $h(D) = \{ p_1 \ln \delta_1^2 - p_3 \ln \delta_3^2, p_2 \ln \delta_2^2 - p_3 \ln \delta_3^2 \mid p \in \mathbb{Z}^3 \}$. 因为 $\frac{\ln \delta_3}{\ln \delta_1}$ 是有理的, 记为 $\frac{b}{a}$, 此处整数 a, b 互素, 由 $\{ p_1 \ln \delta_1^2 - p_3 \ln \delta_3^2 \mid p_1, p_3 \in \mathbb{R} \}$ 生成的闭子群是离散的 $\mathbb{Z} \frac{\ln \delta_1^2}{a}$, 而由 $\{ p_2 \ln \delta_2^2 - p_3 \ln \delta_3^2 \mid p_2, p_3 \in \mathbb{R} \}$ 生成的闭子群是整个直线. 因此群 $\overline{h(D)}$ 包含于 $\mathbb{Z} \frac{\ln \delta_1^2}{a} \times \mathbb{R}$ 中.

给定 $t \in \mathbb{R}$, 存在一个序列 $\{(p_2(m), p_3(m))\}_{m=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (p_2(m) \ln \delta_2^2 - p_3(m) \ln \delta_3^2) = \frac{t}{a}, \quad (18)$$

对于 $m = 1, 2, \dots$, 取 $p_1(m) = b p_3(m)$, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (p_1(m) \ln \delta_1^2 - a p_3(m) \ln \delta_3^2) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \ln \delta_1^2 \left(p_1(m) - a p_3(m) \frac{b}{a} \right) = 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} (a p_2(m) \ln \delta_2^2 - a p_3(m) \ln \delta_3^2) &= t. \end{aligned} \quad (19)$$

从而 $\overline{h(D)}$ 的线性部分是 $\{0\} \times \mathbb{R}$. 因为自由部分与线性部分垂直, $\overline{h(D)}$ 的自由部分一定形如 $\mathbb{Z} \left(n \frac{\ln \delta_1^2}{a}, 0 \right)$, 此处 n 是个自然数.

存在一对 $(p_1, p_3) \in \mathbb{Z}^2$ 使得 $p_1 \ln \delta_1^2 - p_3 \ln \delta_3^2 = \frac{\ln \delta_1^2}{a}$. 取 $p_2 = \left[\frac{p_3 \ln \delta_3}{\ln \delta_2} \right]$, 则对于某个 $t \in \mathbb{R}$ 有 $p_2 \ln \delta_2^2 - p_3 \ln \delta_3^2 = t$. 从而点 $\left(\frac{\ln \delta_1^2}{a}, t \right)$ 在群 $\overline{h(D)}$ 中. 因为 $\left(\frac{\ln \delta_1^2}{a}, 0 \right) = \left(\frac{\ln \delta_1^2}{a}, t \right) - (0, t)$, 所以 $\left(\frac{\ln \delta_1^2}{a}, 0 \right)$ 在群 $\overline{h(D)}$ 中.

总之, $\overline{h(D)} = \mathbb{Z} \frac{\ln \delta_1^2}{a} \times \mathbb{R}$. 从几何上来看, $\overline{h(D)}$ 由可数无限条平行于坐标轴的直线组成.

第 n 条直线 $\left\{ n \frac{\ln \delta_1}{a} \right\} \times \mathbb{R}$ 记为 L_n , 它的参数方程是

$$\begin{cases} y_1 = n \frac{\ln \delta_1^2}{a}, \\ y_2 = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (20)$$

它在 $\mathring{S}$ 的逆图象的参数方程是

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\exp((n \ln \delta_1^2)/a)}{\exp((n \ln \delta_1^2)/a) + \exp t + 1}, \\ x_2 = \frac{\exp t}{\exp((n \ln \delta_1^2)/a) + \exp t + 1}, \\ x_3 = \frac{1}{\exp((n \ln \delta_1^2)/a) + \exp t + 1}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

因此, 在开的单形 $\mathring{S}$ 中, $\mathring{X}$ 由可数无限条开曲线组成, $(0, 1, 0)$ 是它们的一个共公端点而 $\mathring{X}(1, 3)$ 上的点 $\left(\frac{\exp((n \ln \delta_1^2)/a)}{\exp((n \ln \delta_1^2)/a) + 1}, 0, \frac{1}{\exp((n \ln \delta_1^2)/a) + 1} \right)$ 是它们的另一个端点 (见图 1).

情形 II r_1 和 r_2 都非零. 此时, $\frac{\ln \delta_1}{\ln \delta_2}$, $\frac{\ln \delta_1}{\ln \delta_3}$ 和 $\frac{\ln \delta_2}{\ln \delta_3}$ 是无理的, 因此 $\mathring{X}(1, 2)$, $\mathring{X}(1, 3)$, $\mathring{X}(2, 3)$ 分别与 $\mathring{S}(1, 2)$, $\mathring{S}(1, 3)$, $\mathring{S}(2, 3)$ 相等. 然而, $\mathring{X}$ 不与 $\mathring{S}$ 相等.

因此, 对于某个 $u \in \mathbb{R}^2$, $\overline{h(D)} = L \oplus \mathbb{Z}u$ 且 $u \perp L$ 以及 $u_1, u_2 \neq 0$. 相差一个因子 1 或者 -1, u 由 $\overline{h(D)}$ 唯一确定. 易证明 u 是 L 中的唯一的方向使得群 $\overline{h(D)}$ 在这个方向上的投影是离散的. 下面我们就来确定这个方向.

设 $r_1 = \frac{b_1}{a_1}$, $r_2 = \frac{b_2}{a_2}$, 此处 (a_1, b_1) 互素, (a_2, b_2) 互素, $a_1, a_2 > 0$. 取 $v_1 = \frac{b_1}{a_1 \ln \delta_1^2}$, $v_2 = \frac{b_2}{a_2 \ln \delta_2^2}$, 则 $\overline{h(D)}$ 在方向 $v := (v_1, v_2)$ 上的投影是 $\left\{ \left(p_1 \frac{b_1}{a_1} + p_2 \frac{b_2}{a_2} - p_3 \right) \frac{v}{|v|^2} \mid p \in \mathbb{Z}^3 \right\}$, 它是 $\mathbb{R}^2$ 的离散子群. 因此 $\mathbb{Z}u = \left\{ \left(p_1 \frac{b_1}{a_1} + p_2 \frac{b_2}{a_2} - p_3 \right) \frac{v}{|v|^2} \mid p \in \mathbb{Z}^3 \right\}$, 易证明 $u = \frac{v}{[a_1, a_2] |v|^2}$, 此处 $[a_1, a_2]$ 记它们的最小公倍数.

命 $u^\perp := (-u_2, u_1)$, 则 $\overline{h(D)} = \mathbb{R}u^\perp \oplus \mathbb{Z}u$, 它由可数无限条平行于 $u^\perp$ 的直线组成. 记第 n 条直线为 L_n , 它的方程是

$$y_2 = -\frac{u_1}{u_2} y_1 + n \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2} = -\frac{v_1}{v_2} y_1 + n \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2} = -\frac{a_2 b_1 \ln \delta_2}{a_1 b_2 \ln \delta_1} y_1 + n \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2}, y_1 \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

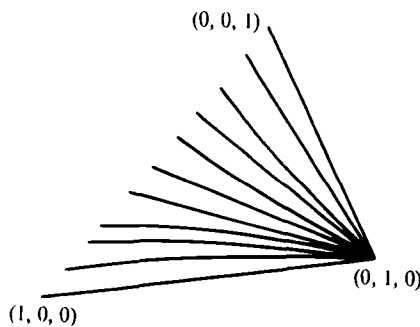


图 1
秩 = 2, $r_2 = 0$

它的斜率 $-\frac{a_2 b_1 \ln \delta_2}{a_1 b_2 \ln \delta_1}$ 非零. 它在 $\overset{\circ}{S}$ 中的逆图象的方程是

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\exp t}{\exp t + \exp\left(-\frac{a_2 b_1 \ln \delta_2}{a_1 b_2 \ln \delta_1} t + n \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2}\right) + 1}, \\ x_2 = \frac{\exp\left(-\frac{u_1}{u_2} t + n \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2}\right)}{\exp t + \exp\left(-\frac{a_2 b_1 \ln \delta_2}{a_1 b_2 \ln \delta_1} t + n \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2}\right) + 1}, \\ x_3 = \frac{1}{\exp t + \exp\left(-\frac{a_2 b_1 \ln \delta_2}{a_1 b_2 \ln \delta_1} t + n \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2}\right) + 1}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

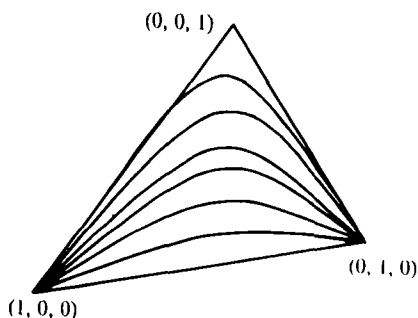


图 2

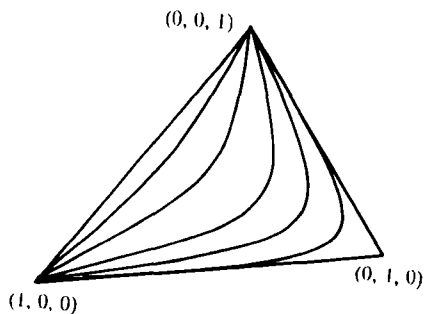
秩 = 2, $k < 0$ 

图 3

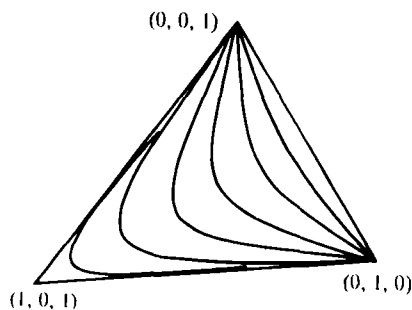
秩 = 2, $0 < k < 1$ 

图 4

秩 = 2, $k > 1$

因此在开单形 $\overset{\circ}{S}$ 中, $\overset{\circ}{X}$ 由可数无限条开曲线组成.

如果斜率 $k := -\frac{a_2 b_1 \ln \delta_2}{a_1 b_2 \ln \delta_1} < 0$, 则 $(0, 1, 0)$ 和 $(1, 0, 0)$ 是这些曲线的公共端点 (见图 2).

如果 $0 < k < 1$, 则 $(0, 0, 1)$ 和 $(1, 0, 0)$ 是这些曲线的公共端点 (见图 3).

如果 $k > 1$, 则 $(0, 0, 1)$ 和 $(0, 1, 0)$ 是这些曲线的公共端点 (见图 4).

参 考 文 献

- 1 Xu Shengzhi, Chen Xiaoman, Yan Shaozong. The Toeplitz C^* -algebra over the L-shaped domain in $\mathbb{C}^n$. Chinese Annals of Mathematics, Ser B, 1996, 17 (3): 325 ~ 334
- 2 Muhly P, Renault J. C^* -algebra of multivariable Wiener-Hopf operators. Transactions of American Mathematical Society, 1982, 274(570): 1 ~ 44
- 3 Curto R, Muhly P. C^* -algebras of multiplication operators on Bergman spaces. Journal of Functional Analysis, 1985, 64: 315 ~ 329
- 4 Dieudonné J. Éléments d'analyse. Paris: Gauthier-Villars, 1974