

关联与黑洞信息丢失问题

何东山¹, 蔡庆宇^{2*}

1. 咸阳师范学院物理与电子工程学院, 咸阳 712000;

2. 中国科学院武汉物理与数学研究所, 波谱与原子分子国家重点实验室, 武汉 430071

* 联系人, E-mail: qycail@wipm.ac.cn

2018-06-04 收稿, 2018-08-11 修回, 2018-08-13 接受, 2018-09-17 网络版发表

国家杰出青年科学基金(11725524)和国家自然科学基金(11647060)资助 s

摘要 霍金计算发现黑洞会发出热辐射. 由于热辐射之间不存在关联, 因此辐射粒子无法将信息携带出黑洞, 伴随着霍金辐射, 黑洞内部的物质信息逐渐丢失. 量子力学么正性要求信息守恒, 黑洞信息丢失与量子力学么正性存在明确的冲突, 此即黑洞信息丢失之谜. 霍金辐射之间是否存在关联是解决黑洞信息丢失问题的关键. 霍金最初的计算中没有考虑辐射粒子的反冲, 得到的辐射谱为纯热谱. 后来, Parikh和Wilczek的计算表明, 如果计入辐射粒子的反冲, 则辐射谱可能会轻微地偏离热谱. 本文首先介绍了Parikh和Wilczek使用包含辐射粒子反冲的量子隧穿方法得到的非热谱. 其次, 介绍了张保成等人在非热谱基础上证明黑洞辐射粒子之间存在关联, 并且黑洞辐射过程信息守恒的工作. 最后, 介绍了黑洞辐射之间如何产生关联的一种可能的物理机制, 黑洞辐射粒子之间的引力关联可以携带信息, 使得黑洞辐射过程中信息守恒.

关键词 黑洞信息之谜, 黑洞熵, 关联, 互信息

20世纪70年代, 霍金预言黑洞能像普通黑体一样发出热辐射^[1,2], 但是热辐射粒子之间没有关联不能携带信息, 因此当黑洞完全蒸发时黑洞的信息全部丢失了^[3,4], 这与量子力学的么正性相冲突. 量子力学的么正性表明信息既不会丢失也不会创生, 信息是守恒的自然界的一个基本定律^[5]. 黑洞信息丢失之谜反映了引力理论和量子理论的潜在冲突. 因而“黑洞信息丢失之谜”引起了相关领域科学家的广泛关注. 霍金最开始认为黑洞信息都丢失了^[4], 但是很多科学家认为信息应该守恒, 特别是20世纪90年代末弦理论的发展, 使得信息守恒的观点得到了广泛认同^[6,7]. 物理学家们引入了各种理论来维持信息守恒, 这些理论大多假设黑洞能够以某种方式隐藏或者释放信息. 常见的一类维持信息守恒的观点认为黑洞不会完全辐射, 黑洞在辐射到一定时候就会停

止, 留下一个普朗克尺度的残余(remnant), 黑洞的所有信息都存储于这个稳定或者寿命很长的残余中^[8-10]. 然而这个模型仍存在问题, 如果从任意大的黑洞开始, 那么就要求最后普朗克尺度的残余中包含无穷多的自由度, 而根据量子力学, 一个拥有无穷多自由度的小系统无法稳定的存在. 另外一种有趣的观点认为黑洞奇点连接着另一个“婴儿宇宙”, 黑洞信息通过爱因斯坦-罗森桥转移到“婴儿宇宙”中, 从而维持信息守恒^[11]. 2016年, Hawking及合作者^[12]认为存储在黑洞边缘的低能量甚至零能量的量子粒子(soft hair)能够捕捉和存储落入黑洞的信息. 这意味着所有落入黑洞的物质的信息会以这种量子粒子的形式存储在视界边缘. 然而, 量子毛发如何存储信息, 霍金辐射如何带走量子毛发上存储的信息仍没有理论描述.

引用格式: 何东山, 蔡庆宇. 关联与黑洞信息丢失问题. 科学通报, 2018, 63: 3089-3095

He D S, Cai Q Y. Correlation and the black hole information loss problem (in Chinese). Chin Sci Bull, 2018, 63: 3089-3095, doi: 10.1360/N972018-00541

黑洞信息丢失问题的症结在于黑洞辐射是热辐射. 霍金在最初得到热谱的文章中假设时空背景不变, 未计入辐射粒子的反冲, 不满足能量守恒. 2000年Parikh和Wilczek^[13]考虑辐射粒子的反冲作用后, 基于量子力学的隧穿方法重新计算了黑洞辐射谱. 他们的结果表明黑洞辐射谱并不是一个纯热谱. 2009年, Zhang等人^[14-16]从Parikh和Wilczek给出的非热谱出发, 证明黑洞辐射粒子之间存在关联, 而辐射粒子之间的关联可以携带信息. 基于此他们证明黑洞信息不会丢失. 该工作被英国皇家学院院士, 著名黑洞物理学家Israel称赞为“把解决长期存在的黑洞信息丢失问题向前推进了一大步”^[17]. 此项工作也获得了引力领域国际学术最高奖——(美国)引力基金会论文竞赛一等奖^[16]. 他们的工作证明了黑洞辐射之间的关联为黑洞信息泄露出黑洞提供了一条通道, 然而并没有解决黑洞辐射粒子之间如何产生关联, 以及产生关联的物理机制等问题.

最近, 本文作者研究了引力系统中物质之间的关联, 认为黑洞辐射过程中黑洞辐射之间存在引力关联, 黑洞信息通过引力关联被携带出黑洞^[18]. 统计力学中, 如果系统A和系统B之间没有相互作用, 则二者彼此独立, 它们构成的总系统的熵为子系统A和B的熵之和. 而实际物理系统中总存在各种各样的相互作用, 如引力、电磁力等, 此时系统内的粒子之间不再相互独立. 对于黑洞而言, 构成黑洞的粒子之间存在强烈的引力作用, 因而黑洞辐射以及黑洞辐射与剩余黑洞之间的引力关联能够携带信息并维持黑洞信息守恒, 即黑洞辐射非热谱之间的关联来源于引力作用.

本文首先回顾了Parikh和Wilczek^[13]通过量子隧穿效应给出黑洞辐射非热谱以及Zhang等人^[14-16]证明非热谱之间存在关联的过程, 其次介绍了施瓦兹黑洞及其辐射粒子之间的引力关联以及引力关联携带的信息量的计算. 最后, 给出了黑洞辐射粒子之间以及辐射粒子与剩余黑洞之间的引力关联携带的信息使得黑洞辐射过程中信息守恒的证明.

1 霍金辐射为非热谱

霍金基于固定的时空背景得到黑洞辐射为热谱的结果, 他的计算没有考虑辐射粒子的反冲, 即自引力效应, 因而不满足能量守恒, 也就是说霍金最初的结果并不严格成立. 为了维持能量守恒, Parikh和

Wilczek^[13]考虑了辐射粒子的反冲作用后利用量子隧穿的方法重新计算了黑洞辐射谱.

为了描述黑洞视界附近的量子隧穿现象, 引入坐标变换,

$$t = t_s + 2\sqrt{2Mr} + 2M \ln \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}}, \quad (1)$$

其中, t_s 和 r 分别是施瓦兹度坐标系的时间和径向坐标, M 为黑洞质量. 通过坐标变换(1), 施瓦兹黑洞的度规可以写成,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}}drdt + dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2)$$

其中, $d\Omega^2$ 为二维球面度规, 此度规在黑洞视界 $r=2M$ 处没有奇点, 可以用来研究粒子的隧穿现象. 考虑能量守恒, 当黑洞产生一个能量为 ω 的辐射粒子时, 时空背景坐标系变为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2(M-\omega)}{r}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2(M-\omega)}{r}}drdt + dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3)$$

从式(3)可得黑洞辐射粒子的径向零测地线,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dH}{dp_r} \Big|_r = \pm 1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega)}{r}}, \quad (4)$$

其中, 正号($\dot{r} > 0$)表示出射粒子的测地线, 负号($\dot{r} < 0$)表示落入黑洞的入射粒子的测地线, H 和 p_r 分别为哈密顿量和动量. 考虑一个正能的 s 波粒子从黑洞内 r_{in} 穿过视界到达黑洞外 r_{out} 时, 作用 S 的虚部可以写为

$$\text{Im } S = \text{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = \text{Im} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp_r' dr. \quad (5)$$

利用式(4)以及哈密顿量 $H = M - \omega'$, 式(5)可以写为

$$\begin{aligned} \text{Im } S &= \text{Im} \int_M^{M-\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{\dot{r}} dH \\ &= \text{Im} \int_0^{+\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r}}} (-d\omega') = 4\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

同样的方法可以得到落入黑洞的负能粒子的作用量的虚部, $\text{Im } S = 4\pi\omega(M - \omega/2)$. 因此黑洞辐射粒子的隧穿几率为

$$\Gamma \sim e^{-2\text{Im } S} = e^{-8\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right)} = e^{\Delta S_{\text{BH}}}, \quad (7)$$

其中, S_{BH} 表示施瓦兹黑洞的Bekenstein-Hawking熵. 式(7)表明考虑能量守恒后, 新的黑洞辐射不是一个

纯热谱, 而是对纯热谱有一个小的偏离. 量子隧穿的方法已经被推广到其他类型的黑洞辐射研究中^[19-24], 并得到其他类型黑洞辐射谱也为非热谱的结论. 此外Ma等人^[25]利用非度规依赖的方法证明黑洞辐射谱为非热谱.

2 非热谱的关联

概率论中, 假设两个事件独立发生的概率分别为 p_1 与 p_2 , 如果两个事件同时发生的概率 $p=p_1p_2$, 则表明这两个事件相互独立, 不存在关联, 否则我们说这两个事件之间存在关联. 下面介绍Zhang等人^[14]通过非热谱证明霍金辐射之间存在关联的工作.

利用前文得到的非热谱公式(7), 得质量为 M 的施瓦兹黑洞向外辐射能量为 ω_1 的粒子的概率为

$$\Gamma(\omega_1) = e^{-8\pi\omega_1\left(M-\frac{\omega_1}{2}\right)}. \quad (8)$$

同理, 质量为 M 的黑洞向外辐射能量为 ω_2 的粒子的概率为

$$\Gamma(\omega_2) = e^{-8\pi\omega_2\left(M-\frac{\omega_2}{2}\right)}. \quad (9)$$

黑洞相继辐射两个能量分别为 ω_1 与 ω_2 的粒子的概率为

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2|\omega_1) = e^{-8\pi(\omega_1+\omega_2)\left(M-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}, \quad (10)$$

其中, $\Gamma(\omega_2|\omega_1) = \exp[-8\pi\omega_2(M-\omega_1-\omega_2/2)]$ 表示条件概率, 即当第一个粒子辐射出黑洞之后, 黑洞的质量变为 $M-\omega_1$ 时, 再辐射第二个粒子的概率. 容易验证辐射一个能量为 $\omega_1+\omega_2$ 的粒子的概率 $\Gamma(\omega_1+\omega_2)$ 和辐射两个能量分别为 ω_1 与 ω_2 的粒子的概率相同, 即

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2) = \Gamma(\omega_1+\omega_2). \quad (11)$$

从式(8)~(11), 可以得到,

$$\Gamma(\omega_1+\omega_2) \neq \Gamma(\omega_1)\Gamma(\omega_2). \quad (12)$$

这证明黑洞辐射粒子之间不是相互独立的, 而存在相互关联. 另一方面, $\Gamma(\omega_2|\omega_1) \neq \Gamma(\omega_2)$ 表明 ω_2 辐射的概率之前的辐射粒子 ω_1 有关, 即 ω_2 与 ω_1 之间的确存在关联.

根据香农熵的定义,

$$S(\omega_i) = -\ln \Gamma(\omega_i). \quad (13)$$

在信息论中互信息 $I(A:B)$ 表示两个系统A, B之间的相互关联, 其定义为

$$I(A:B) \equiv S(A) + S(B) - S(A,B) = S(A) - S(A|B). \quad (14)$$

因此可得黑洞辐射粒子 ω_1 与 ω_2 之间的关联为

$$I(\omega_2:\omega_1) \equiv S(\omega_1) + S(\omega_2) - S(\omega_1, \omega_2) = 8\pi\omega_1\omega_2. \quad (15)$$

第一个能量为 ω_1 的辐射粒子从质量为 M 的黑洞中带走的熵为

$$S(\omega_1) = 8\pi\omega_1\left(M - \frac{\omega_1}{2}\right). \quad (16)$$

第一个粒子辐射后, 第二个能量为 ω_2 粒子带走的熵为

$$S(\omega_2|\omega_1) = 8\pi\omega_2\left(M - \omega_1 - \frac{\omega_2}{2}\right). \quad (17)$$

ω_1 和 ω_2 带走的总熵为

$$S(\omega_1, \omega_2) = S(\omega_1) + S(\omega_2|\omega_1). \quad (18)$$

以此类推, 当辐射第 i 个粒子时黑洞剩余质量为 $M - \sum_{n=1}^{i-1} \omega_n$, 第 i 个辐射粒子带走的熵为

$$S(\omega_i|\omega_1, \dots, \omega_{i-1}) = 8\pi\omega_i\left(M - \sum_{n=1}^{i-1} \omega_n - \frac{\omega_i}{2}\right). \quad (19)$$

那么当黑洞完全蒸发时, 假设共有 N 个辐射粒子, 即 $\sum_{i=1}^N \omega_i = M$, 这些辐射粒子带走的总熵为

$$S(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) = \sum_{i=1}^N S(\omega_i|\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1}). \quad (20)$$

容易验证 $S(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) = 4\pi M^2$ 正好等于最初黑洞的熵, 这表明当黑洞完全蒸发时辐射粒子可以带走黑洞的全部信息, 黑洞熵在辐射过程中保持不变.

3 引力关联

前文提到, 未计入黑洞辐射的引力反冲时, 黑洞辐射为热谱, 辐射粒子之间无关联. 而计入黑洞辐射的引力反冲之后得到了存在关联的非热谱. 因此, Jiang等人^[20]认为引力在霍金辐射关联之间起重要作用.

3.1 引力关联熵

2010年, Verlinde^[26]的文章受到了大家的广泛关注, 他假设一个质量为 m 的探测粒子在全息屏附近距离变化 Δx 时, 全息屏上的熵将增加 $\Delta S \sim 2\pi m \Delta x$, 应用热力学第一定律, 这个熵的变化会产生一种被称作熵力的力, 他将引力解释成这样一种熵力, 但是引力来源于熵力的观点引起了大家的争论, 其是否正确还未有定论. Jiang等人^[20]认为全息屏上的熵增来源于探测粒子和全息屏内部物质的引力相互作用.

考虑质量为 M 和 m 两个物体, 根据牛顿万有引力定律可知二者距离为 x 时引力为

$$F = -G \frac{Mm}{x^2}, \quad (21)$$

其中, G 为万有引力常数, 假设物体 M 周围存在全息屏且全息屏的半径为 r_{scr} , 全息屏上的温度 T 由能量均分定理给出, 文献[27,28]指出能量均分定理在高温时有效, 当温度低时需要修正. 由于通常黑洞的温度非常低, 因此利用修正的能量均分定理^[29~31],

$$Mc^2 = \alpha N k_B T, \quad (22)$$

其中, k_B 为玻耳兹曼常数, c 为光速, α 是一个正常数, $N = 4\pi r_{\text{scr}}^2 c^3 / G\hbar$ 为全息屏上的比特数, $\hbar$ 为约化普朗克常数. 为了简便后文, 令 $c = \hbar = G = k_B = 1$. 测试粒子 m 靠近物体 M 时系统的总能量不变, 即 $dE_M = 0$. 根据热力学第一定律可以得到,

$$F \Delta x = T \Delta S_{\text{scr}}. \quad (23)$$

结合式(21)~(23), 容易得到当测试粒子 m 靠近 M 的全息屏时全息屏上的熵变为

$$\Delta S_{\text{scr}} = -4\alpha\pi m \left(\frac{r_{\text{scr}}}{x} \right)^2 \Delta x. \quad (24)$$

根据式(24)可以计算出探测粒子 m 相对物体 M 从 R_1 移动到 R_2 时, M 的全息屏上熵的变化量,

$$\Delta S_{\text{scr}} = -\int_{R_1}^{R_2} 4\alpha\pi m \left(\frac{r_{\text{scr}}}{x} \right)^2 dx = 4\alpha\pi m r_{\text{scr}}^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right). \quad (25)$$

当 m 从 R_1 移动到 R_2 时, 系统的熵增 ΔS_{scr} 应该为常数, 而式(25)中熵的变化还取决于全息屏的半径 r_{scr} , 因此对于一个给定的物体 M , 其全息屏半径也应该为某一定值. 对于黑洞, 一个自然的选择是要求全息屏的半径等于施瓦兹黑洞半径 r_{scr} , 即 $r_{\text{scr}} = r_{\text{Sch}} = 2M$. 此时全息屏恰好为黑洞视界. 在此假设式(24)可以写为

$$\Delta S_{\text{scr}} = -16\alpha\pi M^2 m \frac{\Delta x}{x^2}. \quad (26)$$

式(26)表示探测粒子 m 靠近或者远离全息屏时全息屏上熵的变化, 当探测粒子靠近全息屏时 $\Delta x < 0$ 引力做正功全息屏上熵增加; 反之, 引力做负功熵减小. 从式(26)可看出, 探测粒子距离全息屏越远引力越小时, 两个物体之间的相互关联就越小, 它对全息屏熵影响越小. 因此将系统中由于引力做功而改变的熵称为引力关联熵.

3.2 互信息与黑洞熵

下面计算施瓦兹黑洞的引力关联熵. 考虑一个

质量为 m 的物体从无穷远处落入质量为 M 的施瓦兹黑洞, 根据式(26)可以得到 M 全息屏上的熵增为

$$\Delta S_{(M)m} = -\int_{+\infty}^{2M} 16\alpha\pi M^2 m \frac{dx}{x^2} = 16\alpha\pi M^2 m \frac{1}{x} \Big|_{+\infty}^{2M} = 8\alpha\pi Mm. \quad (27)$$

式(27)表明黑洞增加的熵不仅与落入黑洞的粒子有关, 还和黑洞自身的质量有关^[32]. 黑洞和物体 m 构成一个总系统, 总系统中黑洞 M 及其全息屏上的熵为

$$S'(M) = 4\pi M^2 + 8\alpha\pi Mm, \quad (28)$$

其中, 第一项为孤立黑洞 M 的熵, 即物体 m 处于无穷远时黑洞的熵; 第二项为黑洞和物体 m 之间的引力相互作用产生的引力关联熵.

同理, 在 m 从无穷远处落入黑洞 M 的同时, 黑洞同样在不断靠近物体 m 的全息屏, 因此物体 m 的全息屏上熵也会改变. 假设物体 m 与黑洞相互作用过程处于热平衡状态, 根据式(22), 选择 m 的全息屏半径为 $r'_{\text{scr}} = 2\sqrt{Mm}$. 将式(24)中 m 替换为 M , r_{scr} 替换成 r'_{scr} , 可得物体 m 的全息屏上熵的变化为

$$\Delta S_{(m)M} = -\int_{+\infty}^{2\sqrt{Mm}} 16\alpha\pi M \left(\frac{r'_{\text{scr}}}{x} \right)^2 dx = -\int_{+\infty}^{2\sqrt{Mm}} 16\alpha\pi M^2 \frac{dx}{x^2} = 8\alpha\pi Mm. \quad (29)$$

可得, 黑洞 M 和物体 m 构成的总系统中 m 及其全息屏上的熵为

$$S'(m) = 4\pi m^2 + 8\alpha\pi Mm, \quad (30)$$

其中, 第一项表示在 m 落入黑洞时其自身先坍缩成一个小黑洞自身引力产生的引力关联熵^[18,33], 第二项为黑洞和物体 m 之间的引力相互作用产生的引力关联熵. 从式(28)和(30)可以看出, M 和 m 构成的新系统中, 它们各自都含有一部分相同的来自于引力关联的熵 $8\alpha\pi Mm$, 根据信息论这部分相同的信息被称为互信息 $I(M:m) = 8\alpha\pi Mm$, 因此新系统的总熵为

$$S(M+m) = S'(M) + S'(m) - I(M:m) = 4\pi M^2 + 8\alpha\pi Mm + 4\pi m^2 = 4\pi (M+m)^2, \quad (31)$$

其中, 最后一步中取 $\alpha=1$. 从式(31)可得新系统的熵等于质量为 $M+m$ 的黑洞熵.

考虑黑洞的形成过程, 所有落入黑洞的粒子在形成新黑洞后都与组成黑洞的其他粒子达到最大引力关联状态. 假设黑洞 M 由 N 个粒子组成, 第 j 个粒子靠近第 i 个粒子时导致粒子 i 的引力关联熵为 $\Delta S_{(m_i)m_j}$, 根据式(27)可得, $\Delta S_{(m_i)m_j} = \Delta S_{(m_j)m_i} = 8\pi m_i m_j$. 二者间的互信息即它们之间的关联为 $I(m_i:m_j) = 8\pi m_i m_j$, 这个

结果与从非热谱给出的黑洞辐射粒子之间的关联结果(式(15))相同. 由于 N 个粒子之间均达到最大引力

关联状态, 因此所有粒子构成的总系统的引力关联熵之和为

$$\begin{aligned} S_c(M) &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (4\pi m_i^2 + \Delta S_{m_i m_j}) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (4\pi m_j^2 + \Delta S_{m_j m_i}) - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N I(m_i : m_j) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \Delta S_{m_i m_j} + \sum_{i=1}^N 4\pi m_i^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N 8\pi m_i m_j + \sum_{i=1}^N 4\pi m_i^2 = 4\pi M^2. \end{aligned} \quad (32)$$

上述计算表明黑洞内部物质之间的引力关联熵之和恰好等于黑洞的熵, 即 $S_c(M) = S_{\text{BH}}$. 这表明黑洞熵来源于黑洞内部物质的引力关联熵.

4 黑洞辐射的引力关联携带信息

前文证明了黑洞熵起源于黑洞内部物质之间的引力关联熵. 这一部分将介绍施瓦兹黑洞向外辐射的过程中黑洞和辐射粒子之间的引力关联.

首先, 对于一个质量为 M 的施瓦兹黑洞, 它的熵为 $4\pi M^2$. 假设, 质量为 m_1 的粒子逃离黑洞时黑洞熵的变化为 ΔS_1 . 由于粒子逃离黑洞时引力做负功, 根据式(24)黑洞与逃离粒子的引力关联熵减小. 黑洞熵的变化 ΔS_1 包含两部分: 辐射粒子 m_1 携带走的自熵和 m_1 与剩余黑洞的互信息. 因此黑洞熵的变化可以写为

$$\Delta S_1 = -S_c(m_1) - I(m_1 : M - m_1), \quad (33)$$

其中, 第一项中的 $S_c(m_1)$ 为辐射粒子 m_1 的自熵, $S_c(m_1) = 4\pi m_1^2$, 第二项为辐射粒子 m_1 与剩余黑洞 $M - m_1$ 之间的互信息 $I(m_1 : M - m_1) = 8\pi(M - m_1)m_1$. 因此可得,

$$\Delta S_1 = -4\pi m_1^2 - 8\pi m_1(M - m_1). \quad (34)$$

在信息论中, 熵衡量一个系统的不确定性, 它也表示当系统变得已知时, 可以从该系统中获得的信息量, 封闭系统熵和信息之间关系为 $\Delta I = -\Delta S$, 因此也常说信息即负熵. 黑洞辐射过程中, 辐射粒子 m_1 携带的信息量 $I(m_1) = 4\pi m_1^2 + I(m_1 : M - m_1)$, 即辐射粒子带走自身信息的同时还带走了与剩余黑洞之间的互信息.

当黑洞继续辐射第二个粒子 m_2 时, 黑洞熵的变化为

$$\Delta S_2 = -4\pi m_2^2 - 8\pi m_2(M - m_1 - m_2). \quad (35)$$

第二个粒子携带的信息为

$$I(m_2 | m_1) = -\Delta S_2 = 4\pi m_2^2 + I(m_2 : M - m_1 - m_2). \quad (36)$$

$I(m_2 | m_1)$ 表示粒子 m_1 辐射之后辐射粒子 m_2 携带的信

息量, 从式(36)可以看出第二个粒子携带的信息量与第一个粒子 m_1 有关, 即 m_1 与 m_2 之间存在关联. 容易验证,

$$I(m_1, m_2) = I(m_1) + I(m_2 | m_1) = I(m_1 + m_2), \quad (37)$$

其中, $I(m_1, m_2)$ 表示两个质量分别为 m_1 和 m_2 的辐射粒子携带的总信息量, $I(m_1 + m_2)$ 表示一个质量为 $m_1 + m_2$ 的辐射粒子携带的信息量. 上述公式为黑洞辐射过程中信息守恒, 黑洞辐射是么正过程的充要条件^[34].

以此类推, 黑洞辐射第 i 个粒子 m_i 时黑洞熵的变化量为

$$\Delta S_i = -4\pi m_i^2 - 8\pi m_i \left(M - \sum_{j=1}^i m_j \right). \quad (38)$$

那么第 i 个粒子 m_i 带走的信息量为

$$I(m_i | m_1, m_2, \dots, m_{i-1}) = -\Delta S_i = 4\pi m_i^2 + I\left(m_i : M - \sum_{j=1}^i m_j\right). \quad (39)$$

重复上述过程直到黑洞完全蒸发 ($\sum_{i=1}^N m_i = M$), 可以得到在黑洞完全蒸发的整个过程中辐射粒子带走的总信息为

$$\begin{aligned} I(m_1, m_2, \dots, m_N) &= I(m_1) + I(m_2 | m_1) + \dots \\ &\quad + I(m_N | m_1, m_2, \dots, m_{N-1}) \\ &= \sum_{i=1}^N 4\pi m_i^2 + \sum_{i=1}^N 8\pi m_i \left(M - \sum_{j=1}^i m_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^N 4\pi m_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N I(m_i : m_j) \\ &= 4\pi M^2. \end{aligned} \quad (40)$$

式(40)表明黑洞完全蒸发时, 黑洞信息完全被黑洞辐射粒子通过引力关联将黑洞内部信息携带出黑洞.

根据香农熵的定义, 可得质量为 M 的黑洞辐射质量为 m_1 的粒子的概率为

$$\begin{aligned} \Gamma(M, m_1) &\sim \exp(\Delta S_1) \\ &= \exp[-4\pi m_1^2 - 8\pi m_1(M - m_1)] \\ &= \exp[-8\pi m_1(M - m_1/2)]. \end{aligned} \quad (41)$$

这个结果与Parikh和Wilczek通过隧穿的方法给出的黑洞辐射谱相同^[13].

5 结论

本文首先介绍了Parikh和Wilczek^[13]考虑黑洞辐射过程引力反冲作用得到黑洞辐射非热谱的过程,

并回顾了Zhang等人^[14]基于非热谱证明黑洞辐射之间存在关联的工作. 最后介绍了He和Cai^[18]提出的霍金辐射之间关联的一种可能的物理机制. 他们的理论中引力关联的为霍金辐射之间关联的原因, 基于此证明了黑洞辐射之间的引力关联可以携带出黑洞的全部信息.

参考文献

- Hawking S W. Black hole explosions? *Nature*, 1974, 248: 30–31
- Hawking S W. Particle creation by black holes. *Commun Math Phys*, 1975, 43: 199–220
- Preskill J. Do black holes destroy information? In: Kalara S, Nanopoulos D V, eds. *Proceedings of the International Symposium on Black Holes, Membranes, Wormholes and Superstrings*. Singapore: World Scientific, 1993. 22–39
- Hawking S W. Breakdown of physics in gravitational collapse. *Phys Rev D*, 1976, 14: 2460
- Susskind L. Twenty years of debate with Stephen. In: *The Future of Theoretical Physics and Cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 330–347
- Landauer R. Information is physical. *Phys Today*, 1976, 44: 23–29
- Susskind L. The world as a hologram. *J Math Phys*, 1995, 36: 6377–6396
- Aharonov Y, Casher A, Nussinov S. The unitarity puzzle and Planck mass stable particles. *Phys Lett B*, 1987, 191: 51–55
- Chen P, Ong Y C, Yeom D. Black hole remnants and the information loss paradox. *Phys Rep*, 2015, 603: 1–45
- Polchinski J. *New Frontiers in Fields and Strings*. Singapore: World Scientific, 2017. 353–397
- Marolf D. The black hole information problem: Past, present, and future. *Rep Prog Phys*, 2017, 80: 0920001
- Hawking S W, Perry M J, Strominger A. Soft hair on black holes. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 231301
- Parikh M, Wilczek F. Hawking radiation as tunneling. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 5042
- Zhang B C, Cai Q Y, You L, et al. Hidden messenger revealed in Hawking radiation: A resolution to the paradox of black hole information loss. *Phys Lett B*, 2012, 675: 98–101
- Zhang B C, Cai Q Y, Zhan M S, et al. Entropy is conserved in Hawking radiation as tunneling: A revisit of the black hole information loss paradox. *Ann Phys New York*, 2011, 326: 350–363
- Zhang B C, Cai Q Y, Zhan M S, et al. Information conservation is fundamental: Recovering the lost information in Hawking radiation. *Int J Mod Phys D*, 2013, 22: 1341014
- Israel W, Yun Z. Band-Aid for information loss from black holes. *Phys Rev D*, 2010, 82: 124036
- He D S, Cai Q Y. Gravitational correlation, black hole entropy, and information conservation. *Sci China Phys Mech Astron*, 2017, 60: 40011
- Parikh M. New coordinates for de Sitter space and de Sitter radiation. *Phys Lett B*, 2002, 546: 189–195
- Jiang Q Q, Yang S Z, Wu S Q. Hawking radiation of charged particles via tunneling from arbitrarily dimensional Reissner-Nordström black holes. *Int J Theor Phys*, 2006, 45: 2274–2281
- Jiang Q Q, Wu S Q. Hawking radiation of charged particles as tunneling from Reissner-Nordstrom-de sitter black holes with a global monopole. *Phys Lett B*, 2006, 635: 151–155
- Cai R G, Cao L M, Hu Y P. Hawking radiation of apparent horizon in a FRW universe. *Class Quant Grav*, 2009, 26: 155018
- Ma Y H, Chen J F, Sun C P. Dark information of black hole radiation raised by dark energy. *Nucl Phys B*, 2018, 931: 418–436
- Zhang J Y, Hu Y, Zhao Z. Information loss in black hole evaporation. *Mod Phys Lett A*, 2006, 21: 1865–1868
- Ma Y H, Cai Q Y, Dong H, et al. Non-thermal radiation of black hole off canonical typicality. *Europhys Lett*, 2018, 122: 30001
- Verlinde E. On the origin of gravity and the laws of Newton. *J High Energy Phys*, 2011, 2011: 29
- Gao C J. Modified entropic force. *Phys Rev D*, 2010, 81: 087306
- Kiselev V V, Timofeev S A. The Holographic screen at low temperatures. *Mod Phys Lett A*, 2011, 26: 109–118
- Sahlmann H. Energy equipartition and minimal radius in entropic gravity. *Phys Rev D*, 2011, 84: 104010
- Neto J A. Fundamental constants, entropic gravity and nonextensive equipartition. *Theorem Phys A Stat Mech Appl*, 2012, 391: 4320–4324
- Klinkhamer F R. Newton's gravitational coupling constant from a quantum of area. *Mod Phys Lett A*, 2011, 26: 1301–1308
- Blaschke M, Stuchlík Z, Blaschke F, et al. Classical corrections to black hole entropy in D dimensions: A rear window to quantum gravity? *Phys Rev D*, 2017, 96: 104012
- Zhang B C, Cai Q Y, Zhan M S, et al. Correlation, entropy, and information transfer in black hole radiation. *Chin Sci Bull*, 2014, 59: 1057–1065
- Cai Q Y, Sun C P, You L. Information-carrying Hawking radiation and the number of microstate for a black hole. *Nucl Phys B*, 2016, 905: 327–336

Summary for “关联与黑洞信息丢失问题”

Correlation and the black hole information loss problem

Dongshan He¹ & Qingyu Cai^{2*}

¹ College of Physics & Electronic Engineering, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, China;

² State Key Laboratory of Magnetic Resonances and Atomic and Molecular Physics, Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China

* Corresponding author, E-mail: qycal@wipm.ac.cn

Information is physical, it cannot simply disappear in any physical process. This basic principle of information science constitutes one of the most important elements for the very foundation to our daily life and to our understanding of the universe. However, this fundamental principle is challenged by the physics of black holes. Classic black holes was viewed as only capable of absorbing but not emitting particles, so black holes look completely black. All matter that falls into the black hole will be stored in the black hole forever, and the information carry by these matter will always be stored in the black hole. Although the information in the black hole cannot be seen, we know that the information has not been lost. After considering the quantum effect, the black hole is no longer completely black. By considering quantum effect of black hole, Hawking shows that black holes emit thermal radiation like ordinary hot bodies. It is well known that there is no correlation between thermal radiation, therefore no information can be carried out by Hawking radiation. With the black hole evaporating, the information inside the black hole will gradually be lost. However, the unitary property of quantum mechanics indicates that information is conserved, therefore, the loss of black hole information conflicts with the unitary of quantum mechanics, this is the so-called mystery of black hole information loss. This problem reflects the conflict between gravitational theory and quantum theory, and attracts wide attention of scientists. Whether there is a correlation between Hawking radiation is the key to solving the problem of black hole information loss. Without considering the self-gravitating of the radiating particles in Hawking's initial calculations, he obtained the results of the pure thermal spectrum, so his result is inconsistent with energy conservation. Kraus and Wilczek show that the thermal spectrum may be corrected if the self-gravitating of the radiant particles is taken into account, thus Hawking radiations must be correlated, and their correlations can carry away information encoded within. This paper firstly introduced the black hole radiation non-thermal spectrum obtained by Parikh and Wilczek, who use the method of quantum tunneling after counting the self-gravitating of radiation particles; then it also introduced the research of Zhang et al., which proves that the entropy is conservation during black hole radiation process based on the non-thermal spectrum obtained by Parikh and Wilczek; and finally we proposed a possible physical mechanism for the correlation between black hole radiation, which shows that the gravitational correlation between the black hole radiation particles can carry information, so that the information is conserved during the black hole radiation process. The series of research on black hole information loss problem reveals that information conservation remains true when gravitational correlations among Hawking radiations are properly taken into account. Information conservation principle thus states Hawking radiation is unitary, which shows that the dynamics of a black hole obey the laws of quantum mechanics. Since a black hole is a result of general relativity, the unitarity of a black hole definitely indicates the possibility of a unified gravity and quantum mechanics.

black hole information problem, black hole entropy, correlation, mutual information

doi: 10.1360/N972018-00541