



稳态轴对称黑洞量子隧穿特征 及辐射谱的研究

杨树政* 李慧玲¹⁾ 蒋青权²⁾ 刘门全

(西华师范大学理论物理研究所, 南充 637002)

摘要 de Sitter 时空背景下稳态轴对称 Kerr-Newman 黑洞事件视界和宇宙视界处荷电粒子的隧穿率与 Bekenstein-Hawking 熵变有关, 真实的辐射谱不再是严格的纯热谱, 但满足量子力学中的么正性原理, 从而为黑洞信息丢失疑难提供了一个可能的解释. 在考虑自引力作用和能量守恒、角动量守恒及电荷守恒的条件下, 所得的辐射谱是对 Hawking 纯热谱的正确修正.

关键词 Kerr-Newman de Sitter 黑洞 能量守恒 电荷守恒 角动量守恒
隧穿率 Bekenstein-Hawking 熵

Hawking 提出了黑洞信息丢失疑难^[1], 此问题的提出根源于 20 世纪 70 年代初, Carter 和 Robinson 等人提出的黑洞无毛定理指出, 形成黑洞的物质会失去绝大部分信息, 洞外的观测者只能知道其质量、电荷和角动量^[2,3]. 在经典理论中, 信息丢失很容易被理解, 因为作为一个经典黑洞它将永远存在, 在其视界处不会有粒子辐射出来, 因而黑洞信息可以看作一个守恒量, 进而也就不存在信息丢失疑难. 但是, 考虑到量子效应时情况发生了改变. 1974 年 Hawking 证明了黑洞会发生热辐射, 黑洞的温度是真实的温度, 并且证明其辐射谱为纯热谱, 其基本观点是黑洞视界附近由于真空涨落而引发的一种量子隧穿效应, 即产生于黑洞视界内部附近的一对虚粒子, 正能虚粒子通过隧道效应穿过视界并实化为真实粒子, 而负能粒子被黑洞吸收; 或者叙述为: 产生于黑洞视界外部附近的粒子对, 负能虚粒子向视界内隧穿(黑洞内部存在负能轨道, 负能粒子在视界处不允许存在)而留下正能粒子, 那么, 在黑洞蒸发的最后阶段, 由于辐射谱是纯热谱(黑体谱)不带有任何更多的信息, 其洞内信息将归属哪里? 如果信息在黑洞内丢失, 那么, 纯量子态(初态)将衰变成混合态, 违背了量子力学中的么正性原理. 因而, 要解决信息丢失疑难惟一的出路是认为黑洞辐射谱不是纯热谱, 对纯热谱应进行正确的修正.

2004 年, Parikh 运用 Kraus 和 Wilczek 提出的半经典量子隧穿方法研究了球对称静态 Schwarzschild 和 Reissner-Nordström 黑洞的量子隧穿辐射^[4], 其结果表明, 在能量守恒的条件下,

收稿日期: 2005-12-11; 接受日期: 2006-10-11

四川省科技厅基础研究基金资助项目(批准号: 05JY029-092)

* E-mail: szyangcwnu@126.com

现在通讯地址: 1) 沈阳师范大学物理系, 2) 华中师范大学物理系

视界处标量粒子的隧穿率与Bekenstein-Hawking熵变有关, 真实的辐射谱不再是严格的纯热谱, 这就为黑洞的信息丢失疑难提供了一个可能的解释. 在整个讨论过程中, 为了消除视界处的坐标奇异性, Parikh引进了Painlevé坐标变换. 运用同样的方法Hemming和Keski-Vakkuri研究了Anti-de Sitter黑洞的量子隧穿辐射^[5], Medved得出了de Sitter时空中宇宙视界处的隧穿辐射特征^[6], 所得结果支持了Parikh的观点, 但其讨论的范围只局限于静态球对称黑洞. 2005年, 赵峥和张靖仪等人把Parikh的工作推广到了稳态轴对称黑洞, 并研究了隧穿率与Bekenstein-Hawking熵的关系^[7~10]. 事实上, 对于一般的带电黑洞而言, 其出射粒子可以考虑是荷电粒子, 因而出射粒子的静质量 $\mu_0 \neq 0$ 且荷电量 $q \neq 0$, 这才是一般而真实的情况^[11]. 在此一般情况下, 带电粒子的测地线不是类光的, 而是类时的. 下面我们针对一个具有不同拓扑结构的Kerr-Newman de Sitter黑洞的量子隧穿辐射特征进行了研究, 在考虑到自引力作用、能量守恒、角动量守恒和电荷守恒的前提下, 对Hawking纯热谱进行了正确的修正.

1 拖曳坐标变换和 Painlevé 坐标变换及相速度方程

Kerr-Newman de Sitter黑洞的时空线元为^[11]

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r^2}{\rho^2} \left(dt_{\text{KNS}} - \frac{a}{\Xi} \sin^2 \theta d\varphi \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_r^2} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(a dt_{\text{KNS}} - \frac{(r^2 + a^2)}{\Xi} d\varphi \right)^2, \quad (1)$$

式中 t_{KNS} 为 Kerr-Newman de Sitter 黑洞的时间坐标, 且 $\Delta_r^2 = (r^2 + a^2) \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \right) - 2Mr + Q^2$,

$\Delta_\theta = 1 + \frac{a^2}{l^2} \cos^2 \theta$, $\Xi = 1 + \frac{a^2}{l^2}$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. 由零超曲面方程 $g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} = 0$ 可得一负根为 r_- (无意义而舍去), 另有 3 个正根 r_0 , r_h 和 r_c 分别对应于此黑洞的内视界(IH)、事件视界(EH)和宇宙视界(CH), 两两间不重合, 并且

$$\begin{aligned} r_{\text{ih}} &= r_0 = -\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_3}, \\ r_{\text{eh}} &= r_h = \sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_3}, \\ r_{\text{ch}} &= r_c = \sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_3}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \sqrt{Z_1} &= \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{6}} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{12l^2(Q^2 + a^2)}{(l^2 - a^2)^2} \cos \frac{\alpha}{3}} \right]^{1/2}, \\ \sqrt{Z_2} &= \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{6}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{12l^2(Q^2 + a^2)}{(l^2 - a^2)^2} \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right)} \right]^{1/2}, \\ \sqrt{Z_3} &= \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{6}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{12l^2(Q^2 + a^2)}{(l^2 - a^2)^2} \cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right)} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\alpha = \arccos \left\{ -\frac{(l^2 - a^2) \left[(l^2 - a^2)^2 + 36l^2(Q^2 + a^2) \right] - 54m^2l^4}{\left[(l^2 - a^2)^2 - 12l^2(Q^2 + a^2) \right]^{3/2}} \right\}. \quad (3)$$

与之相对应的事件视界和宇宙视界的面积分别为

$$A_h = \frac{4\pi}{\Xi} (r_h^2 + a^2), \quad A_c = \frac{4\pi}{\Xi} (r_c^2 + a^2), \quad (4)$$

其电磁势为

$$A_\mu = (A_t, 0, 0, A_\varphi), \quad (5)$$

其中, $A_t = -\frac{Qr}{\rho^2\Xi}$, $A_\varphi = \frac{Qra \sin^2 \theta}{\rho^2\Xi}$. 由于转动自由度的出现, Kerr-Newman de Sitter 解的这一

形式对于我们的应用来说仍有一些不便之处: (i) 由于无限红移面 (由 $g_{tt} = 0$ 给出) 与黑洞视界 (由零超曲面方程 $g^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f = 0$ 定义) 不重合, 几何光学近似不能应用; (ii) 由于转动的出现, 时空存在着坐标系的拖曳效应, 黑洞视界附近能层中的物质场也必然被拖曳着进行运动. 因此, 一个合理的有物理意义的描述应该是在拖曳系中给出的. 因而对线元(1)作拖曳坐标变换

$$\frac{d\varphi}{dt_{\text{KNS}}} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} = \Omega \text{ 可得}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \hat{g}_{00} dt_{\text{KNS}}^2 + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 \\ &= -\frac{\Delta_\theta \Delta_r^2 \rho^2}{\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r^2 a^2 \sin^2 \theta} dt_{\text{KNS}}^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_r^2} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2, \end{aligned} \quad (6)$$

在拖曳坐标系中, 电磁势的非零分量为

$$A'_t = -\frac{Qr}{\rho^2\Xi} \left\{ 1 + \frac{\Xi a^2 \sin^2 \theta [\Delta_r^2 - \Delta_\theta (r^2 + a^2)]}{\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r^2 a^2 \sin^2 \theta} \right\}. \quad (7)$$

由方程(6)可知经拖曳坐标变换后, 无限红移面与视界面重合, 但在视界处仍存在坐标奇异性, 这种奇异性对粒子穿越视界的隧穿行为的研究带来了不便, 因此就必须做坐标变换. Parikh 运用 Painlevé 坐标变换 $dt_s = dt + f'(r)dr$ 研究了球对称静态黑洞的 Hawking 隧穿辐射. 现在研究稳态轴对称黑洞的量子隧穿效应时, 其坐标变换与 Parikh 运用的坐标变换不同, 应根据赵峥和张靖仪的方法作如下广义 Painlevé 坐标变换 [\[7,8\]](#)

$$dt_{\text{KNS}} = dt + F(r, \theta)dr + G(r, \theta)d\theta, \quad (8)$$

由可积性条件可知

$$\frac{\partial F(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial G(r, \theta)}{\partial r}, \quad (9)$$

把(8)式代入(6)式, 再考虑到径向空间的欧氏化, 可以得到广义的 Painlevé 坐标下的 Painlevé-Kerr-Newman de Sitter 时空线元为

$$ds^2 = \hat{g}_{00} dt^2 + dr^2 \pm 2\sqrt{\hat{g}_{00}(1 - g_{11})} dt dr + [\hat{g}_{00} G^2(r, \theta) + g_{22}] d\theta^2$$

$$+2\sqrt{\hat{g}_{00}(1-g_{11})}G(r,\theta)drd\theta+2\hat{g}_{00}G(r,\theta)dtd\theta, \quad (10)$$

其中第三项+号代表黑洞解(黑洞视界处的时空线元), -号代表白洞解(宇宙视界处的时空线元). 把线元(10)代入Landau的坐标钟同时条件可得到可积性条件(9)^[12]. 因而, 在广义Painlevé坐标变换下, 此时空线元具有优良的特性: 即在视界处没有坐标奇异性; 黑洞视界与无限红移面重合; 某一时空片上的三维空间超曲面是径向欧氏化的; 满足Landau的坐标钟同时条件. 这些特性对于研究Kerr-Newman de Sitter黑洞的量子隧穿辐射提供了优越的条件^[13-15].

对于黑洞的量子隧穿辐射, 考虑到粒子的径向运动, 则由(10)式可得到不带电荷粒子的类光测地线方程为

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{\pm \rho^2 \sqrt{\Delta_\theta} - \sqrt{\rho^2 \Delta_\theta (\rho^2 - \Delta_r^2)}}{\sqrt{\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r^2 a^2 \sin^2 \theta}}. \quad (11)$$

本文考虑的是带电荷粒子的隧穿辐射行为, 所以, 对辐射荷电粒子而言, 方程(11)将不成立. 因此, 我们必须找出与带电粒子相应的方程. 根据 de Broglie 假设, 我们可以得出粒子的相速度和群速度满足条件

$$v_p = \frac{1}{2} v_g. \quad (12)$$

由于粒子的隧穿效应是一个瞬时效应, 线元(10)式满足 Landau 的对钟条件. 因此, 我们可以得到在不同地点同时发生的两个事件的坐标钟满足

$$dt = -\frac{g_{01}}{g_{00}} dr_t \quad (d\theta = d\varphi = 0). \quad (13)$$

其中 r_t 是隧穿辐射粒子的径向坐标. 因此, 我们可以进一步得到与荷电粒子相应的相速度方程是

$$\dot{r} = v_p = \frac{1}{2} \frac{dr_c}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{g_{00}}{g_{01}} = \pm \frac{1}{2} \Delta_r^2 \rho \sqrt{\frac{\Delta_\theta}{(\rho^2 - \Delta_r^2) [\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r^2 a^2 \sin^2 \theta]}}, \quad (14)$$

在上式中, 正号对应于荷电粒子在事件视界处的出射方程, 负号对应于荷电粒子在宇宙视界处的入射方程.

2 事件视界和宇宙视界处荷电粒子的隧穿辐射特征

首先, 考虑带电粒子在黑洞视界处的量子隧穿特征. 根据量子场论, 若在黑洞事件视界内产生了虚粒子对, 其正能粒子通过隧道效应穿越视界并实化为实粒子, 而负能粒子被黑洞吸收. 当有粒子隧穿出去时, 根据自引力作用, 将会引起黑洞视界面的收缩, 黑洞收缩前后的视界分别为 r_{ih} 和 r_{fb} , 此即势垒的两个转折点. 考虑到能量守恒、电荷守恒和角动量守恒, 当固定时空总能量(即ADM质量)和电荷量而允许黑洞质量及电荷量涨落时, 能量为 ω , 电荷量为 q , 角动量为 ωa 的粒子隧穿出射后, 黑洞的质量、电荷量和角动量分别为 $(M - \omega)$ 、 $(Q - q)$ 和 $(M - \omega)a$. 由WKB近似, 可得隧穿率与粒子作用量的虚部的关系式为^[13]

$$\Gamma \approx e^{-2\text{Im}S}. \quad (15)$$

当研究一个带电荷粒子的隧穿辐射特征时, 应该考虑到电磁场效应, 因而物质引力系统应该

包括黑洞及其外的电磁场. 总的 Langrange 函数应该由表征物质场的 Lagrange 函数和电磁场决定的 Langrange 函数构成, 其中 $L_e = -1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ 为广义坐标 $A'_\mu = (A'_t, 0, 0)$ 的 Langrange 函数, 是由电磁场决定的 Langrange 函数. 当一个粒子隧穿出射后, 系统将由一个态变为另一个态. 从 L_e 的表达式可知, A'_t 为电磁场 Langrange 函数的一个可遗坐标. 为了消除与 φ 和 A'_t 对应的自由度, 方程(15)的作用量虚部应该写为

$$S = \int_{t_i}^{t_f} (L - P_\varphi \dot{\varphi} - P_t \dot{A}'_t) dt = \text{Im} \left[\int_{r_{\text{ih}}}^{r_{\text{th}}} \int_0^{P_r} dP'_r dr - \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \int_0^{P_r} dP'_\varphi d\varphi - \int_{A_{\text{ti}}}^{A_{\text{tf}}} \int_0^{P_t} dP'_t dA'_t \right], \quad (16)$$

式中 r_{ih} 和 r_{th} 分别为荷电粒子出射前后的黑洞视界的始末位置. 由于黑洞视界的收缩, 可将此两点视为势垒的两个转折点, 此两点间的距离由粒子的能量决定. 在黑洞视界处, 当辐射出能量为 ω 、电荷量为 q 的粒子后, 考虑到此时黑洞总 ADM 能量 $H = \frac{M - \omega}{\Xi^2}$ 和角动量以及电磁能

的变化, 由 Hamilton 正则方程可得

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dH}{dP_r} \bigg|_{(r, \varphi, P_\varphi; A'_t, P'_t)}, & dH \big|_{(r, \varphi, P_\varphi; A'_t, P'_t)} &= -\frac{1}{\Xi^2} d\omega, \\ \dot{\varphi} &= \frac{dH}{dP_\varphi} \bigg|_{(\varphi, r, P_r; A'_t, P'_t)}, & dH \big|_{(\varphi, r, P_r; A'_t, P'_t)} &= -\frac{a\Omega'_h}{\Xi^2} d\omega, \\ \dot{A}'_t &= \frac{dH}{dP'_t} \bigg|_{(A'_t, r, P_r; \varphi, P_\varphi)}, & dH \big|_{(A'_t, r, P_r; \varphi, P_\varphi)} &= \frac{A'_t}{\Xi^2} dq, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\Omega'_h = \frac{a\Xi}{r_h'^2 + a^2}$, $A'_t = -\frac{(Q-q)r}{\rho^2 \Xi} \left\{ 1 + \frac{\Xi a^2 \sin^2 \theta [\Delta_r'^2 - \Delta_\theta (r^2 + a^2)]}{\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r'^2 a^2 \sin^2 \theta} \right\}$. 把方程(17)代入(16)式,

我们可以得到粒子作用量虚部

$$\begin{aligned} \text{Im} S &= \text{Im} \int_{r_i}^{r_f} \int_{\frac{1}{\Xi^2}(M, Q)}^{\frac{1}{\Xi^2}(M - \omega, Q - q)} \frac{1}{\dot{r}} \left[dH \big|_{(r, \varphi, P_\varphi; A'_t, P'_t)} - dH \big|_{(\varphi, r, P_r; A'_t, P'_t)} - dH \big|_{(A'_t, r, P_r; \varphi, P_\varphi)} \right] dr \\ &= -\frac{1}{\Xi^2} \text{Im} \int_{r_i}^{r_f} \int_{(0,0)}^{(\omega, q)} \frac{2 \sqrt{(\rho^2 - \Delta_r'^2) [\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r'^2 a^2 \sin^2 \theta]}}{\rho \sqrt{\Delta_\theta \Delta_r'^2}} [(1 - a\Omega'_h) d\omega' + A'_t dq'] dr. \end{aligned} \quad (18)$$

在积分(18)式中, 在视界处 $\Delta_r'^2 = (r^2 + a^2) \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \right) - 2(M - \omega')r + (Q - q)^2$, 因而在视界处存在一个奇点. 围绕此奇点对被积函数作路径积分可得

$$\text{Im} S = \int_{r_{\text{ih}}}^{r_{\text{th}}} -\frac{\pi r i}{\Xi} dr = -\frac{\pi}{2\Xi} (r_{\text{th}}^2 - r_{\text{ih}}^2), \quad (19)$$

所以, 粒子在黑洞视界处的隧穿率与作用量虚部满足

$$\Gamma \approx e^{-2\text{Im} S} = e^{\frac{\pi}{\Xi} (r_{\text{th}}^2 - r_{\text{ih}}^2)} = e^{\frac{A_{\text{th}} - A_{\text{ih}}}{4}} = e^{\Delta S_{\text{BH}}}. \quad (20)$$

式中 ΔS_{BH} 是 Bekenstein-Hawking 熵变, A_{th} 中的质量和电荷参数分别为 $(M - \omega)$ 和 $(Q - q)$, 而

A_{ih} 中的质量和电荷参数分别为 M 和 Q , 与(4)式中的 A_h 相同. (20)式满足么正性原理, 其对应的辐射谱不再是纯热谱, 它是对 Hawking 纯热辐射谱的正确修正.

下面我们研究宇宙视界处荷电粒子的隧穿辐射特征. 在宇宙视界处入射的荷电粒子的相速度方程为

$$\dot{r} = -\frac{1}{2}\Delta_r^2 \rho \sqrt{\frac{\Delta_\theta}{(\rho^2 - \Delta_r^2) \left[\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r^2 a^2 \sin^2 \theta \right]}}. \quad (21)$$

根据能量守恒、电荷守恒和角动量守恒, 当能量为 ω 、电荷量为 q 的粒子隧穿入射后, 黑洞的质量和电荷参数 M 和 Q 应由 $(M + \omega)$ 和 $(Q + q)$ 代替. 此时黑洞的总能量 $H' = -\frac{M + \omega}{\Xi^2}$. 因此, 在宇宙视界处, 粒子穿越势垒的作用量虚部为

$$\begin{aligned} \text{Im } S_c &= \text{Im} \int_{r_{ic}}^{r_{fc}} \int_{\frac{1}{\Xi^2}(M, Q)}^{\frac{1}{\Xi^2}(M + \omega, Q + q)} \frac{1}{\dot{r}} \left[dH' \Big|_{(r; \varphi, p_\varphi; A'_t, P'_t)} - dH' \Big|_{(\varphi; r, p_r; A'_t, P'_t)} - dH' \Big|_{(A'_t; r, p_r; \varphi, P_\varphi)} \right] dr \\ &= -\frac{1}{\Xi^2} \text{Im} \int_{r_{ic}}^{r_{fc}} \int_{(0,0)}^{(\omega, q)} \frac{2 \sqrt{(\rho^2 - \Delta_r'^2) \left[\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r'^2 a^2 \sin^2 \theta \right]}}{\rho \sqrt{\Delta_\theta \Delta_r'^2}} \left[(1 - a\Omega'_c) d\omega' + A'_t dq' \right] dr, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\Delta_r'^2 = (r^2 + a^2) \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \right) - 2(M + \omega')r + (Q + q')^2$, r_{ic} 和 r_{fc} 分别代表荷电粒子出射前后宇宙视界的位置. 在宇宙视界处被积函数仍存在一个奇点, 采用以上同样的路径积分方法可得

$$\text{Im } S_c = \text{Im} \int_{r_{ic}}^{r_{fc}} -\frac{i\pi r}{\Xi} dr = -\frac{\pi}{2\Xi} (r_{fc}^2 - r_{ic}^2). \quad (23)$$

所以, 粒子在宇宙视界处的隧穿率为

$$\Gamma \approx e^{-2\text{Im } S_c} = e^{\frac{\pi}{\Xi}(r_{fc}^2 - r_{ic}^2)} = e^{\frac{A_{fc} - A_c}{4}} = e^{\Delta S_{CH}}. \quad (24)$$

式中 $\Delta S_{CH} = S_{CH}(M + \omega, Q + q) - S_{CH}(M, Q)$ 是宇宙视界处的 Bekenstein-Hawking 熵变, 式中 A_{fc} 中的质量参数项和电荷参数项分别为 $(M + \omega)$ 和 $(Q + q)$, 而 A_c 中的质量参数项和电荷参数项分别为 M 和 Q , 与(4)式中的 A_c 相同. 因而在宇宙视界处荷电粒子的隧穿率仍与 Bekenstein-Hawking 熵变有关, 真实的辐射谱不再是纯热谱, 它是对 Hawking 纯热辐射谱的又一正确修正.

3 对 Hawking 纯热谱的修正

通过解弯曲时空中 Klein-Gordon 粒子的动力学方程, 采用 Damour-Ruffini 方法, 可以求出稳态 Kerr-Newman de Sitter 黑洞事件视界处的 Hawking 纯热谱为

$$N_\omega^h \approx e^{-\beta_h(\omega - \omega_0)}, \quad (25)$$

用 $\zeta = \omega a$ 表示辐射粒子的角动量, 式中

$$\omega_0 = \frac{a\zeta\Xi + qQr_h\Xi}{r_h^2 + a^2}, \quad \beta_h = \frac{4\pi(r_h^2 + a^2)}{(r_h - r_-)(r_h - r_0)(r_c - r_h)}. \quad (26)$$

同理可以将此黑洞宇宙视界处的纯热谱表示为

$$N_{\omega}^c \approx e^{-\beta_c(\omega-\omega_0')}, \quad (27)$$

其中

$$\omega_0' = \frac{a\zeta\Xi + qQr_c\Xi}{r_c^2 + a^2}, \quad \beta_c = \frac{4\pi(r_c^2 + a^2)}{(r_c - r_-)(r_c - r_0)(r_c - r_h)}. \quad (28)$$

对此黑洞视界处的粒子隧穿率表达式(20)作 Taylor 展开并保留到 $(\omega - \omega_0)^2$ 项可得

$$\Gamma_h \approx \exp \left\{ -\beta_h(\omega - \omega_0) \left[1 - \frac{3(r_h - r_-)(r_h - r_0)(r_c - r_h)}{2(r_h^2 + a^2)\Xi} \frac{B - 54M^2l^8}{\sqrt{A^2 - (B^2 - 54m^2l^4)^2}} \frac{ZY}{A} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{3}}{\sqrt[3/2]{1 + Y \cos \frac{\alpha}{3}}} + \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt[3/2]{1 - Y \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right)}} - \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt[3/2]{1 - Y \cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right)}} \right) (\omega - \omega_0) \right] \right\}, \quad (29)$$

其中

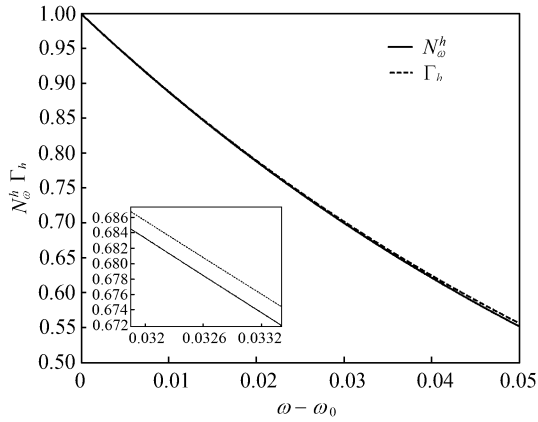
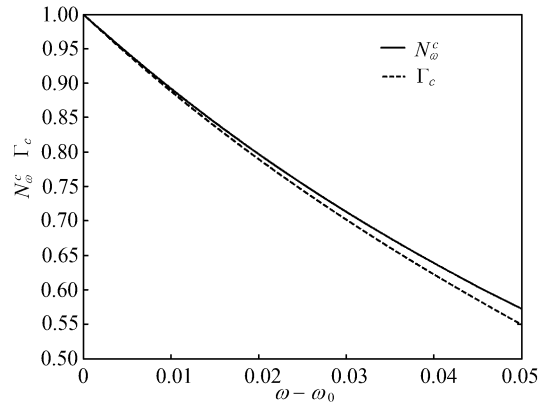
$$Z = \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{6}}, \quad Y = \sqrt{1 - \frac{12l^2(Q^2 + a^2)}{(l^2 - a^2)^2}}, \quad A = \left[(l^2 - a^2)^2 - 12l^2(Q^2 + a^2) \right]^{3/2}, \\ B = (l^2 - a^2) \left[(l^2 - a^2)^2 + 36l^2(Q^2 + a^2) \right]. \quad (30)$$

同理, 对此黑洞宇宙视界处的粒子隧穿率表达式(24)作 Taylor 展开保留到 $(\omega - \omega_0')^2$ 项可得

$$\Gamma \approx \exp \left\{ -\beta_c(\omega - \omega_0') \left[1 - \frac{3(r_c - r_-)(r_c - r_0)(r_c - r_h)}{2(r_c^2 + a^2)\Xi} \frac{B - 54M^2l^8}{\sqrt{A^2 - (B^2 - 54m^2l^4)^2}} \frac{ZY}{A} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{3}}{\sqrt[3/2]{1 + Y \cos \frac{\alpha}{3}}} - \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt[3/2]{1 - Y \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right)}} + \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt[3/2]{1 - Y \cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right)}} \right) (\omega - \omega_0') \right] \right\}, \quad (31)$$

显然, (20)和(29)式不同于(25)式; (24)和(31)式也不同于(27)式, 可以说(20)或(29)式以及(24)或(31)式是分别对黑洞事件视界和宇宙视界处的Hawking纯热谱的修正^[14,15]. 为了直观地表达 Kerr-Newman de Sitter黑洞量子隧穿的特征及以上所得结果对Hawking纯热谱的修正, 分别作出以下几种情况下的 $\Gamma - (\omega - \omega_0)$ 图形:

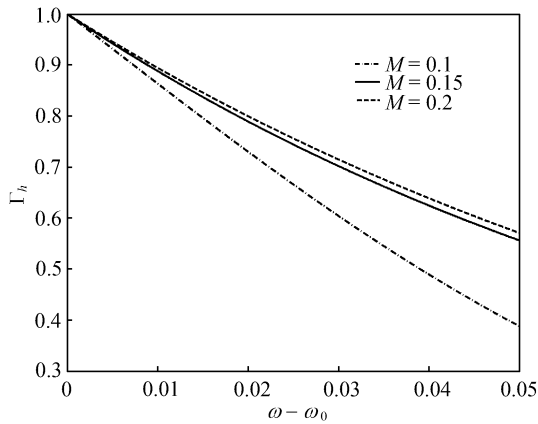
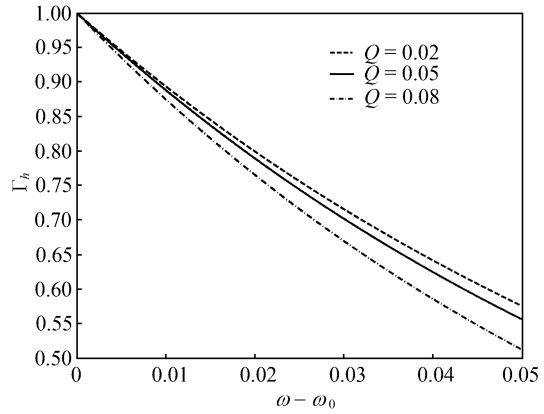
由图 1 和图 2 可见, 当取 $l = 1$, $a = 0.01$, $q = 0.05$, $M = 0.15$ 时^[9], Γ_h 与 N_{ω}^h 不重合, Γ_c 与 N_{ω}^c 也不重合. Γ_h 与 N_{ω}^h 相比, 当辐射粒子的能量较高时, Γ_h 与 N_{ω}^h 的差异较明显; 类似地, Γ_c 与 N_{ω}^c

图 1 事件视界处 Γ_h 和 N_ω^h 的比较
 $l = 1; a = 0.01; q = 0.05; M = 0.15$
图 2 宇宙视界处 Γ_c 和 N_ω^c 的比较
 $l = 1; a = 0.01; q = 0.05; M = 0.15$

相比, 当辐射粒子的能量较高时, 差异也较明显. 显然, Γ_h 是对 Hawking 纯热谱 N_ω^h 的修正; Γ_c 是对 Hawking 纯热谱 N_ω^c 的修正.

图 3 和 4 是进一步研究黑洞质量和电荷量对 Γ_h 影响而作的图形. 由图 3 和 4 可以看出, 黑洞质量及电荷量的不同对 Γ_h 有不同的影响, 同时, 这种影响与辐射粒子能量密切相关.

图 5 和 6 为宇宙视界处 Γ_c 随黑洞质量和电荷量而变化的情况, 由此可以看出, 宇宙视界处隧穿率不仅与辐射粒子能量有关, 还与质量 M 和电量 Q 有关.

图 3 不同 M 的 Γ_h 比较
 $l = 1; a = 0.01; Q = 0.05$
图 4 不同 Q 的 Γ_h 比较
 $l = 1; a = 0.01; M = 0.15$

由图 1~6 可见, Γ_h 或 Γ_c 与 $\omega - \omega_0$ 有关, 黑洞质量和电荷对 Γ_h 和 Γ_c 有一定影响, 只要 $\omega - \omega_0 \neq 0$ 或只要隧穿辐射的粒子的能量不等于零, 则 Γ_h 不同于 N_ω^h , Γ_c 也不同于 N_ω^c , 当 $(\omega - \omega_0)$ 较大时, 这种差别更明显.

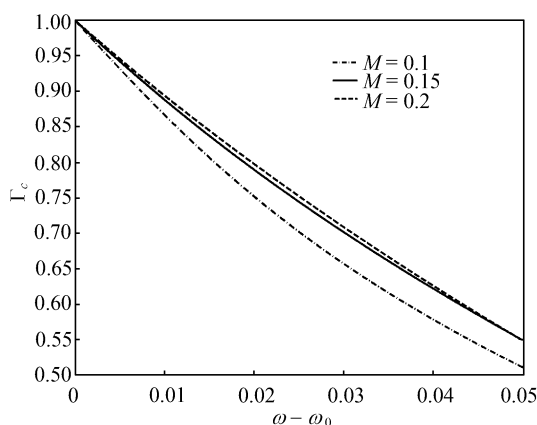


图 5 不同 M 的 Γ_c 比较
 $l = 1; a = 0.01; Q = 0.05$

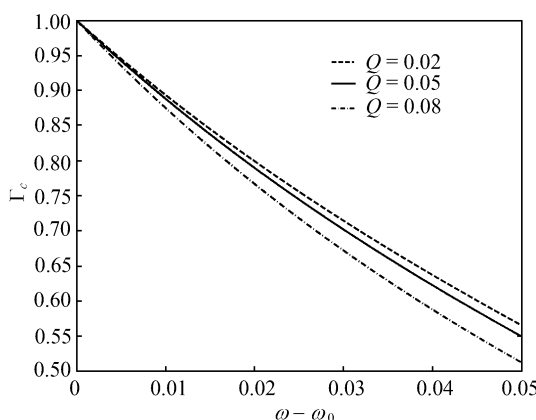


图 6 不同 Q 的 Γ_c 比较
 $l = 1; a = 0.01; M = 0.15$

4 讨论

在特殊情形下, 线元(1)可退回到 Reissner-Nordström 时空线元 ($l \rightarrow \infty, a = 0$), 在 Reissner-Nordström 黑洞情形, 考虑到自引力作用及能量守恒和电荷守恒, 黑洞收缩前后的视界分别为

$$r_h^R = M + \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad r_h'^R = (M - \omega) + \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2}, \quad (32)$$

相应的视界面积分别为: $A_h^R = 4\pi(r_h^R)^2$, $A_h'^R = 4\pi(r_h'^R)^2$, 由(25)式可得纯热谱为

$$N_\omega^R \approx e^{-\beta_R \left(\omega - \frac{qQ}{M + \sqrt{M^2 - Q^2}} \right)}, \quad (33)$$

式中 $\beta_R = \left[2\pi \left(M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right)^2 / \sqrt{M^2 - Q^2} \right]$, 相应于此黑洞收缩前后的 Bekenstein-Hawking 熵分别为

$$\begin{aligned} S_{\text{BH}} &= \frac{1}{4} A_h^R = \pi \left(2M^2 - q^2 + 2M\sqrt{M^2 - q^2} \right), \\ S_{\text{BH}}' &= \frac{1}{4} A_h'^R = \pi \left(2(M - \omega)^2 - (Q - q)^2 + 2(M - \omega)\sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

由(20)式得此黑洞事件视界处的隧穿率为

$$\Gamma \approx e^{(A_h'^R - A_h^R)/4} = e^{S_{\text{BH}}' - S_{\text{BH}}} = e^{\pi \left[(M - \omega) + \sqrt{(M - \omega)^2 - (Q - q)^2} - M - \sqrt{M^2 - Q^2} \right]} = e^{\Delta S_{\text{BH}}}. \quad (35)$$

(35)式是对(33)式的正确修正, 显然, (35)式表示的谱不再是纯热谱. 对隧穿率(35)式进行 Taylor 展开并保留到 $(\omega - \omega_0)$ (即: $\omega - \omega_0 = \omega - qQ / (M + \sqrt{M^2 - Q^2})$) 的二次方项得

$$\Gamma \approx e^{-\beta_R (\omega - \omega_0) \left[1 - \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2} \left(2 + \frac{1}{2} (M^2 - q^2)^{-3/2} M^2 \right) (\omega - \omega_0) \right]}, \quad (36)$$

由(36)式可知, 当忽略 $(\omega - \omega_0)$ 的高次方项后, 才能得出与(33)式一致的结果. 由此可清楚地看到, 真实的谱不应该是纯热谱, 这是对 Reissner-Nordström 黑洞纯热辐射谱的有意义的修正. Kerr-Newman de Sitter 黑洞由于有 Hawking 隧穿特征, 在视界处有粒子辐射, 当辐射一个能量为 ω 的粒子后, 黑洞视界会发生改变, 时空背景是变化的, 即背景几何是动态的, 在此真实情况下所得到的隧穿辐射谱将偏离纯热谱. 在以上讨论 Kerr-Newman de Sitter 黑洞的量子隧穿时, 不需要进行乌龟坐标变换, 而是采用广义的 Painlevé 坐标变换, 其目的是消除视界处的坐标奇异性, 从而研究隧穿特征. 在进行坐标变换时, 保持时空的稳态特征, 存在类时 Killing 矢量, 因此可用 WKB 法. 本文涉及的 Kerr-Newman de Sitter 黑洞是一个较一般的稳态轴对称黑洞, 需要分别讨论此黑洞事件视界及宇宙视界处的量子隧穿辐射特征, 还应该进行数值计算并作图, 目的是进一步说明对 Hawking 纯热谱的修正, 这些内容都是人们尚未深入研究过的问题, 文中的(29)和(31)式是对相应的 Hawking 纯热谱的正确修正, (20)和(24)式中的 $(r_f^2 - f_i^2)$ 和 $(r_{fc}^2 - r_{ic}^2)$ 都与 ω 有关. 在 Reissner-Nordström 黑洞的特殊情况下, 所得的(36)式是对 Reissner-Nordström 黑洞 Hawking 纯热谱的正确修正. Kerr-Newman de Sitter 黑洞事件视界处和宇宙视界处的隧穿率的表达式(20)和(24)式表明, 真实的 Hawking 隧穿辐射谱不是纯热谱, 这为黑洞信息丢失疑难给出了一个可能的解释.

参 考 文 献

- 1 Hawking S W. Breakdown of predictability in gravitational collapse. Phys Rev D, 1976, 14(10): 2460—2473
- 2 Carter B. Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. Phys Rev Lett, 1971, 26(6): 331—333
- 3 Robinson D C. Uniqueness of the Kerr black hole. Phys Rev Lett, 1975, 34(7): 905—906
- 4 Parikh M K, Wilczek F. Hawking radiation as tunneling. Phys Rev Lett, 2000, 85(4): 5042—5049[DOI]
- 5 Hemming S, Keski-Vakkuri E. Hawking radiation from Ads black holes. Phys Rev D, 2001, 64(4): 044006-1—8
- 6 Meved A J M. Radiation via tunneling from a de Sitter cosmological horizon. Phys Rev D, 2002, 66(12): 124009-1—7[DOI]
- 7 Zhang J Y, Zhao Z. Hawking radiation via tunneling from Kerr black holes. Mod Phys Lett A, 2005, 20(20): 1673—1681[DOI]
- 8 Zhang J Y, Zhao Z. New coordinates for Kerr-Newman black hole radiation. Phys Lett B, 2005, 618: 14—22[DOI]
- 9 Zhang J Y, Zhao Z. Massive particles' black hole tunneling and de Sitter tunneling. Nucl Phys B, 2005, 725: 173—180[DOI]
- 10 Zhang J Y, Zhao Z. Hawking radiation of charged particles via tunneling from the Reissner-Nordström black hole. J High Energy Phys, 2005, 10: 055[DOI]
- 11 Dehgham M H, KhajehAzad H. Thermodynamics of a Kerr-Newman de Sitter black hole. Can J Phys, 2003, hep-th/0209203
- 12 Landau L D, Lifshitz E M. The Classical Theory of Field. Peramon: London, 1975
- 13 Kraus P, Keski-Vakkuri E. Microcanonical D-branes and back reaction. Nucl Phys B, 1997, 491: 249[DOI]
- 14 Yang S Z. Kerr-Newman-Kasuya black hole tunnelling radiation. Chin Phys Lett, 2005, 22(10): 2492—2495[DOI]
- 15 Yang S Z, Jiang Q Q, Li H L. Quantum tunneling radiation of Einstein-Maxwell-Dilaton-Axion black hole. Chin Phys, 2005, 14(12): 2411—2414[DOI]