中国科学 : 数学　2012 年　第 42 卷　第 8 期 : 827～843
www.springerlink.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

复合 Poisson 模型带比例与固定交易费用的最优分红与注资

张帅琪[①*], 刘国欣[②]

① 中南大学数学科学与计算技术学院, 长沙 410075;
② 河北工业大学理学院, 天津 300130
E-mail: shuaiqiz@yahoo.com.cn, gxliu@hebut.edu.cn

收稿日期: 2011-12-26; 接受日期: 2012-03-23; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10971048) 资助项目

摘要　研究了复合 Poisson 模型带比例与固定费用的最优分红与注资问题. 每次分红与注资时, 存在比例及固定的交易费用. 通过控制分红与注资的时刻以及分红及注资量, 实现破产前分红减注资的折现期望的最大化. 由于存在固定交易费用, 问题为一个脉冲控制问题. 根据问题的参数不同, 问题的解可分为两大类. 一类解为只进行最优分红不需要注资, 而另一类情况需要注资. 需要注资时, 最优注资策略由最优注资上界以及最优注资下界描述. 当赤字小于最优注资下界的绝对值时, 进行注资. 最后, 在理赔为指数分布时明确地给出了两类共七种最优策略以及值函数的形式. 从而彻底地解决了该问题.

关键词　最优分红策略　注资　拟变分不等式　随机脉冲控制
MSC (2010) 主题分类　93E20, 91B30

1　引言

保险中的最优分红问题可以追溯到 [1]. 之后, 这一领域的论文大量涌现. 关于复合 Poisson 模型, 先驱性的工作在著名的 [2] 以及 [3] 中可以看到. 近年来, 代表性的文章有 [4–6] 等. 这些文章中, 在盈余过程为负值之前, 通过对一个或者多个策略进行最优控制, 使得破产前的期望折扣分红达到最大, 但均未考虑固定交易费用.

当考虑固定交易费用时, 最优分红策略就变得复杂了些. 正如 [7] 指出, 无论固定的交易费用有多小, 都会对值函数产生巨大的影响. 事实上, 此问题为随机脉冲控制问题. [8] 对带漂移的 Brown 运动这一扩散模型运用脉冲控制理论得到了最优分红策略. [9] 在假设盈余过程是均值回复过程的情况下解决了与 [8] 类似的问题. [10] 研究了带有比例再保险的带漂移的 Brown 运动的脉冲分红问题, [11] 讨论了更一般的扩散模型的脉冲分红问题. [12] 研究了经典模型的脉冲分红问题, 并在理赔为指数分布的情况下得到了解析解.

[13] 指出如果破产时赤字不是很大, 可以对其投资来拯救公司, 对随机游动模型研究了该问题, 给出结果: 当赤字小于拯救公司获得的期望收益时才应该进行再投资. [14] 也认为, 股东至少应当负责任地承担破产时刻的赤字. 这样引出了一个新的问题, 如何找到最优策略实现分红与破产时赤字差的折

英文引用格式: Zhang S Q, Liu G X. Optimal dividend payment and capital injection of the compound Poisson risk model with both proportional and fixed costs (in Chinese). Sci Sin Math, 2012, 42(8): 827–843, doi: 10.1360/012011-1039

现期望的最大化. 这样保险公司不仅考虑最优分红策略, 注资策略也是控制方式之一, 且注资策略保证了正的盈余. 带注资的分红问题已成为热点前沿问题, 得到了普遍关注. 关于扩散模型, [15] 研究了一般的扩散模型, 实现分红与注资差的折现期望的最大化. [16] 研究了带漂移的 Brown 运动, 通过构造两类子问题, 解决了与 [15] 相同的问题, 给出了最优控制及值函数的解析解. 关于经典复合 Poisson 模型, [17] 在无条件地承担赤字从而保证永不破产的情况下得到了最优分红策略. 以上这些文章都是在注资时不考虑固定交易费用的条件下得到的解. 当注资时考虑固定交易费用时, [18] 研究了一般的扩散过程的最优脉冲分红与注资问题, 仍然假设了公司无条件承担承担赤字从而保证永不破产. 事实上, 新的注资必须以能够换回足够的回报为前提. [19] 研究了无固定交易费用时, 带有分红注资的复合 Poisson 模模型的最优停止问题. 并得到结果: 当盈余低于某一水平时, 过程应该停止.

带比例与固定交易费用的复合 Poisson 模型, 尚未有文献同时考虑分红与注资的优化问题. 这引发我们考虑是否能找到最优策略? 并且, 如果赤字太大, 注资是不合理的, 注资策略究竟怎样刻画?

我们发现, 基于参数不同, 存在两类不同的最优策略. (1) 一旦盈余过程到 0 以下时, 不应注资, 并且此时破产发生. 于是, 最优策略仅考虑最优分红. (2) 最优策略由最优分红以及最优注资策略构成. 值得一提的是, 此时存在注资下界 $-r^*$. 一旦赤字太大, 即, 理赔引起盈余低于该注资下界时, 则不应再继续注资, 从而破产发生.

与前面提到的关于注资的论文相比, 我们并不是在已有论文的框架下考虑问题, 即 "无条件的承担赤字进行注资, 并且由于折现的原因, 通过注资使盈余恢复到 0", 而是从数学的角度进行分析, 得到的确有两类截然不同的策略存在, 即是否应该注资, 并且当需要注资时, 也是当盈余水平在 0 与最优注资下界之间时, 才进行注资. 并且, 通过注资, 使盈余恢复到最优注资上界. 分红策略为一带状类型. 由此, 文章创新点在于我们同时考虑了复合 Poisson 模型的分红与注资的优化问题.

本文假设每次分红有固定的交易费用 K, 以及与分红量有关的比例费用 (这一假设与 [10] 及 [12] 相同). 在 $[0,t)$, 分红收益为 $\sum_{i=1}^{\infty}(-K+k\xi_i)I_{\{\tau_i\leqslant t\}}$, 其中 τ_i 为停时, 代表分红时刻, ξ_i 为分红量, $1-k$ $(0<k<1)$ 为分红支付的税率. 停时 τ_i 及随机变量 ξ_i 受控. 分红量 ξ_i 不能超过时刻 τ_i 之前的盈余. 类似地, 每次注资时亦存在固定交易费用 L 以及比例费用. 这样一共需支付 $L+lZ, l>1$, 来使得注资量为 Z. 目标为最大化破产前的分红与注资差的折现期望.

文章结构如下: 第 2 节详细地阐述了该问题. 第 3 节给出了值函数满足的拟变分不等式, 并通过验证定理得到了最优策略. 第 4 节在理赔为指数分布的情况下, 给出了计算值函数的方法, 清晰地刻画了最优策略.

2 模型描述

为使优化问题有严格的数学描述, 首先给出一赋予完备 σ- 代数流的概率空间 $\{\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant0},\mathrm{P}\}$. 不受控时, 复合 Poisson 模型 X_t^0 可以表示为

$$X_t^0=x+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i,$$

其中 $x\geqslant0$ 为初始资本, $c>0$ 是保费收入率, $\{N(t)\}$ 是参数为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程, 索赔额序列 $\{Y_i\}$ 为一列独立同分布的严格正随机变量, 其分布函数为 $F(y)$, 且具有连续的密度函数 $p(y)$. 索赔额序列 $\{Y_i\}$ 与索赔计数过程 $\{N(t)\}$ 相互独立, 且 $\mathrm{E}[Y_i]=\mu<\infty$. X_t^0 适应最小的右连续域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant0}$. 如果强调初值 x, 记概率及期望分别为 P_x, E_x. 否则, 省略 x 记为 P, E.

记 $\{D_t\}$ 为从 0 时刻到 t 时刻的累积分红, 每次分红须支付固定的交易费用, 及与分红量成比例的税. 分红由一列单调递增的停时 $\{\tau_n; n=1,2,3,\ldots\}$ 以及随机变量序列 $\{\xi_n; n=1,2,3,\ldots\}$ 描述, 其中 τ_n 是第 n 次分红时刻, ξ_n 是第 n 次分红量. $\{D_t\}$ 为 càdlàg 非减的适应过程, $D_{0-}=0$. 当理赔发生, 使得盈余过程至 0 以下时, 需要注资. 注资由一列单调递增的停时列 $\{\tau'_n; n=1,2,3,\ldots\}$ 以及随机变量序列 $\{\zeta_n; n=1,2,3,\ldots\}$ 描述, 其中 τ'_n 是第 n 次注资时刻, ζ_n 是第 n 次注资量. $\{Z_t\}$ 为 càglàd 非减的适应过程. 策略描述为

$$\pi := (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots; \tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_n, \ldots; \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots).$$

受控盈余过程 X_t^π 为

$$X_t^\pi = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - \sum_{n=1}^{+\infty} I_{\{\tau_n \leqslant t\}} \xi_n + \sum_{i=1}^{+\infty} I_{\{\tau'_i < t\}} \zeta_i.$$

注 受控盈余过程 X_t^π 满足 $X_{t-}^\pi \geqslant X_{t+}^\pi \geqslant X_t^\pi$. 当理赔到达时或分红时, $X_{t-}^\pi - X_t^\pi$ 为正, 需要注资时, $X_{t+}^\pi - X_t^\pi$ 为正.

定义 2.1 称

$$\pi := (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots; \tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_n, \ldots; \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots)$$

为一可允许的控制或可允许策略, 如果

(1) $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots$ a.s.;

(2) $\tau_n, n=1,2,3,\ldots$ 为 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 停时;

(3) 随机变量 $\xi_n, n=1,2,3,\ldots$ 为 $\mathcal{F}_{\tau_n}$- 可测且 $K/k \leqslant \xi_n \leqslant X_{\tau_n-}^\pi$;

(4) $\mathrm{P}(\lim_{n\to\infty} \tau_n \leqslant t) = 0, \forall t \geqslant 0$;

(5) $0 \leqslant \tau'_1 < \tau'_2 < \cdots < \tau'_i < \cdots$ a.s.;

(6) $\tau'_n, n=1,2,3,\ldots$ 为 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$- 停时;

(7) $\mathrm{P}(\lim_{i\to\infty} \tau'_i \leqslant t) = 0, \forall t > 0$;

(8) $\zeta_i, i=1,2,3,\ldots$ 为 $\mathcal{F}_{\tau'_n}$- 可测.

所有可允许的策略集记为

$$\Pi = \{\pi : \pi\text{为可允许策略}\}.$$

破产时刻定义为

$$T^\pi := \inf\{t \geqslant 0 : X_{t+}^\pi < 0\}.$$

定义函数 $g : (0,\infty) \mapsto (-\infty,\infty)$,

$$g(\eta) := -K + k\eta,$$

其中, $K \in (0,\infty)$, $k \in (0,1)$ 均为常数. 正如 [10], K 为每次分红的固定交易费用, $1-k$ 为支付的税率. 因此, 若 η 为从盈余过程中取出的量, 那么实际得到的分红量为 $-K+k\eta$.

定义函数 $h : (0,\infty) \mapsto (0,\infty)$,

$$h(\zeta) := L + l\zeta,$$

其中 $L \in (0,\infty)$ 及 $l \in (1,\infty)$ 为常数. L 为每次注资的固定交易费用, $l-1$ 为比例费用因子.

对每个可允许策略 π, 定义性能指标 $V^{\pi}(x)$ 如下:

$$V^{\pi}(x) := \mathrm{E}_x\bigg[\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\delta\tau_n}g(\xi_n)I_{\{0-<\tau_n\leqslant t\wedge T^{\pi}\}}-\sum_{i=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\delta\tau_i'}h(\zeta_i)I_{\{0\leqslant\tau_i'<t\wedge T^{\pi}\}}\bigg],$$

其中 $\delta>0$ 是折扣因子. 目标是找到可允许策略使得性能指标最大化.

定义值函数 V:

$$V(x) := \sup\{V^{\pi}(x);\pi\in\Pi\}. \tag{2.1}$$

最优策略 π^* 是使下面等式成立的策略:

$$V(x)=V^{\pi^*}(x).$$

3 动态规划原理和拟变分不等式

本节由动态原理 (DPP) 出发得到拟变分不等式 (QVI), 并且给出验证定理.

首先给出 $V(x)$ 的性质.

3.1 值函数的有界性

引理 3.1 值函数 $V(x)$ 单调递增.

证明 令 $x\leqslant y$. 对初值 x, 考虑如下策略 $\pi^x := (\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n,\ldots;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots;\tau_1',\tau_2',\ldots,\tau_n',\ldots;\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n,\ldots)$. 由

$$\begin{aligned}y+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i-\sum_{n=1}^{+\infty}I_{\{\tau_n\leqslant t\}}\xi_n+\sum_{i=1}^{+\infty}I_{\{\tau_i'<t\}}\zeta_i\\ \geqslant x+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i-\sum_{n=1}^{+\infty}I_{\{\tau_n\leqslant t\}}\xi_n+\sum_{i=1}^{+\infty}I_{\{\tau_i'<t\}}\zeta_i\geqslant 0,\end{aligned}$$

可知此策略对 y 也为可允许策略. 取遍所有可允许策略, 得 $V(y)\geqslant V(x)$. □

引理 3.2 值函数 $V(x)$ 满足如下不等式:

$$0\leqslant V(x)\leqslant |x|+\frac{c}{\delta}.$$

证明 对 $x<0$, 若定义策略 π: $Z_t=D_t=0$, 于是 $V(x)\geqslant V^{\pi}(x)=0$. 考虑拟策略 π: x 在初始时刻分红, 将保费收入进行分红并不注资, 这样得到上界:

$$V^{\pi}(x)<k\bigg(x+\frac{c}{\delta}\bigg).$$

取遍所有可允许策略,

$$V(x)<k\bigg(x+\frac{c}{\delta}\bigg).$$ □

3.2　拟变分不等式及最优策略

对函数 v, 定义算子 M_1:

$$M_1v(x) := \sup\{v(x-\eta)+g(\eta); \eta>0, x\geqslant\eta\}, \tag{3.1}$$

其中 $g(\eta) := -K + k\eta$.

定义算子 M_2:

$$M_2v(x) := \sup\{v(x+\theta)-h(\theta); \theta>0\}, \tag{3.2}$$

其中 $h(\theta) := L + l\theta$.

根据随机控制理论 (例如 [4]), 得到如下动态规划原理 (DPP): 对 $x\in\mathbb{R}_+$ 以及任意的 $\mathcal{F}_t$- 停时 τ,

$$V(x) = \sup_{\pi\in\Pi}\mathrm{E}_x\left[\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\delta\tau_k}g(\xi_k)I_{\{\tau_k\leqslant T^\pi\wedge\tau\}} - \sum_{i=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\delta\tau_i'}h(\zeta_i)I_{\{\tau_n'<T^\pi\wedge\tau\}} + \mathrm{e}^{-\delta(T^\pi\wedge\tau)}V(X^\pi_{T^\pi\wedge\tau})\right]. \tag{3.3}$$

由此 DPP, 运用控制理论, 可得 QVI.

定义算子 $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}v(x) := cv'(x) - (\delta+\lambda)v(x) + \lambda\int_0^{x+r^*}v(x-y)p(y)dy, \quad x\geqslant 0.$$

定义 3.1　称连续函数 $v(x): [-r^*,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足控制问题的 QVI, 如果对所有的 $x\in[-r^*,+\infty)$,

$$\mathcal{L}v(x)\leqslant 0, \quad 若\ x\geqslant 0, \tag{3.4}$$

$$v(x)\geqslant M_1v(x), \quad 若\ x\geqslant 0, \tag{3.5}$$

$$v(x)\geqslant M_2v(x), \quad 若\ 0\geqslant x\geqslant -r^*, \tag{3.6}$$

$$(M_1v(x)-v(x))(M_2v(x)-v(x))(\mathcal{L}v(x)) = 0, \tag{3.7}$$

$$v(-r^*) = 0. \tag{3.8}$$

给定一 QVI 的解 v, 我们定义与此解相关的策略.

定义 3.2　称策略 $\pi^v = (\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n,\dots;\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots;\tau_1',\tau_2',\dots,\tau_n',\dots;\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n,\dots)$ 为与 v 相关的 QVI 策略, 如果由 (2.1) 给出的相应的受控过程 $X_t^{\pi^v}$ 满足

$$\tau_1^v = \inf\{t\geqslant 0 : v(X_t^{\pi^v}) = M_1v(X_t^{\pi^v})\},$$
$$\xi_1^v = \arg\sup_{\eta>0,\ \eta\leqslant X^{\pi^v}_{\tau_1}}\{v(X^v_{\tau_1^v}-\eta)+g(\eta)\},$$

当 $n\geqslant 2$,

$$\tau_n^v = \inf\{t>\tau_{n-1} : v(X_t^{\pi^v}) = M_1v(X_t^{\pi^v})\},$$
$$\xi_n^v = \arg\sup_{\eta>0,\ \eta\leqslant X^{\pi^v}_{\tau_n}}\{v(X^v_{\tau_n^v}-\eta)+g(\eta)\};$$

$$\tau_1'^v = \inf\{t \geqslant 0 : v(X_t^{\pi^v}) = M_2 v(X_t^{\pi^v})\},$$
$$\zeta_1^v = \arg\sup_{\theta>0}\{v(X_{\tau_1^v}^v + \theta) - h(\theta)\},$$

当 $n \geqslant 2$,

$$\tau_n'^v = \inf\{t > \tau_{n-1} : v(X_t^{\pi^v}) = M_2 v(X_t^{\pi^v})\},$$
$$\zeta_n^v = \arg\sup_{\theta>0}\{v(X_{\tau_n^v}^v + \theta) - h(\theta)\}.$$

现在, 分析最优注资策略. 当受控过程因理赔而降至 0 以下且赤字不是很大时, 需要注资. 破产状态为 $x = -r^*$, 并且在该点, $V(-r^*) = 0$. 换言之, $r^* := -\inf\{r : V(x) \geqslant 0\}$. 设 $z^* \in [0, \infty)$ 为注资上界. 对 x, 最大化 (3.4) 的左端需要最大化 $\int_0^{x+r^*} V(x-y)dF(y)$. 当 $-r^* \leqslant x \leqslant 0$,

$$V(x) = V(z^*) - l(z^* - x) - L. \tag{3.9}$$

因

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x+r^*} V(x-y)dF(y)\\
&\quad= \int_0^x V(x-y)dF(y) + \int_x^{x+r^*} V(x-y)dF(y)\\
&\quad= \int_0^x V(x-y)dF(y) + \int_x^{x+r^*} [V(z^*) - l(z^* - (x-y)) - L]dF(y),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

所以, $r^* = \frac{V(z^*)-L}{l} - z^*$. 因此, 注资下界为 $-(\frac{V(z^*)-L}{l} - z^*)$.

(1) 若 $V(z^*) - lz^* - L > 0$, 则 $r^* > 0$. 此时注资合理.

当 $-r^* < X_{T_i-}^\pi - Y_i < 0$ 时, $X_{T_i+}^\pi = X_{T_i-}^\pi - Y_i + \zeta_{\tau_i'} = z^*$, 即, $\zeta_{\tau_i'} = z^* - (X_{T_i-}^\pi - Y_i)$. 这种情况下, 值函数满足

$$V(X_{T_i+}^\pi)(= V(z^*)) = V(X_{T_i-}^\pi - Y_i) + l(z^* - (X_{T_i-}^\pi - Y_i)) + L.$$

当 $X_{T_i-}^\pi - Y_i \leqslant -r^*$ 时, 若再注资来补偿赤字, 则将有负收益 (因为 $V(z^*) - l(z^* - (X_{T_i-}^\pi - Y_i)) - L < 0$). 因此, “不注资 - 不收益”, 从而不再注资. 此时, 破产发生且 $T^\pi = T_i$. 从而,

$$V(X_{T_i+}^\pi) = V(X_{T_i}^\pi) = V(X_{T_i-}^\pi - Y_i) = 0.$$

根据以上分析, 当 $x < 0$, 值函数 $V(x)$ 满足:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leqslant -r^*, \\ V(z^*) - l(z^* - x) - L, & \text{当 } -r^* < x < 0. \end{cases}$$

(2) 若 $V(z^*) - lz^* - L \leqslant 0$, 则 $r^* \leqslant 0$. 由 (3.10), 可知不应注资. 当过程到 0 以下, 破产发生. 即, 在此情况下, 只进行最优分红而不注资, 归结为 [12] 所解决的问题.

因此我们只需考虑 $V(z^*) - lz^* - L > 0$ 的情况. QVI 的解 v 具有以下性质:

$$v(x) = 0, \qquad \text{当 } x \leqslant -\left(\frac{v(z^*) - L}{l} - z^*\right), \tag{3.11}$$

$$v(x)=v(z^*)-l(z^*-x)-L,\quad \text{当} -\left(\frac{v(z^*)-L}{l}-z^*\right)<x<0, \tag{3.12}$$

定理 3.1 若 $v(x)$ 为 QVI 的有界连续解, 并具有性质 (3.11) 及 (3.12), 且 $v(x)$ 除有限点外为二次连续可微. 则对 $x\in[-r^*,\infty)$,

$$V(x)\leqslant v(x).$$

进一步, 如果与 v 相关的策略 π^* 是可允许策略, 则 v 等于值函数, 且与 v 相关的策略是最优策略, 即,

$$V(x)=v(x)=V^{\pi^*}(x).$$

证明 首先, 做分解如下:

$$\begin{aligned}
&v(X^\pi_{t\wedge T^\pi})\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge T^\pi)}\\
&\quad=v(x)+\int_0^{t\wedge T^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}[cv'(X^\pi_s)-\delta v(X^\pi_s)]ds+\sum_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\wedge T^\pi\\ X^\pi_s\neq X^\pi_{s-}}}[v(X^\pi_s)-v(X^\pi_{s-})]\mathrm{e}^{-\delta s}\\
&\qquad+\sum_{\substack{0\leqslant s<t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{s+}\neq X^\pi_s}}[v(X^\pi_{s+})-v(X^\pi_s)]\mathrm{e}^{-\delta s}\\
&\quad=v(x)+\int_0^{t\wedge T^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}[cv'(X^\pi_s)-\delta v(X^\pi_s)]ds+\sum_{\substack{0\leqslant T_i\leqslant t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{T_i}\neq X^\pi_{T_i-}}}[v(X^\pi_{T_i})-v(X^\pi_{T_i-})]\mathrm{e}^{-\delta T_i}\\
&\qquad+\sum_{\substack{0\leqslant \tau_k\leqslant t\wedge \tau^\pi\\ X^\pi_{\tau_k}\neq X^\pi_{\tau_k-}}}[v(X^\pi_{\tau_k})-v(X^\pi_{\tau_k-})]\mathrm{e}^{-\delta\tau_k}+\sum_{\substack{0\leqslant T_i<t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{T_i+}\neq X^\pi_{T_i}}}[v(X^\pi_{T_i+})-v(X^\pi_{T_i})]\mathrm{e}^{-\delta T_i}\\
&\quad=v(x)+\int_0^{t\wedge T^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}[cv'(X^\pi_s)-\delta v(X^\pi_s)]ds+\sum_{\substack{0\leqslant T_i\leqslant t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{T_i}\neq X^\pi_{T_i-}}}[v(X^\pi_{T_i-}-Y_i)-v(X^\pi_{T_i-})]\mathrm{e}^{-\delta T_i}\\
&\qquad+\sum_{\substack{0\leqslant \tau_k\leqslant t\wedge \tau^\pi\\ X^\pi_{\tau_k}\neq X^\pi_{\tau_k-}}}[v(X^\pi_{\tau_k-}-\xi_k)-v(X^\pi_{\tau_k-})]\mathrm{e}^{-\delta\tau_k}+\sum_{\substack{0\leqslant T_i<t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{T_i+}\neq X^\pi_{T_i}}}[v(X^\pi_{T_i}+\zeta_i)-v(X^\pi_{T_i})]\mathrm{e}^{-\delta T_i},
\end{aligned}$$

其中, T_i 记为第 i 次理赔到达时刻.

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0\leqslant \tau_k\leqslant t\wedge \tau^\pi\\ X^\pi_{\tau_k}\neq X^\pi_{\tau_k-}}}g(\xi_k)\mathrm{e}^{-\delta\tau_k}-\sum_{\substack{0\leqslant \tau'_i\leqslant t\wedge \tau^\pi\\ X^\pi_{\tau'_i}\neq X^\pi_{\tau'_i-}}}h(\zeta_i)\mathrm{e}^{-\delta\tau'_i}\\
&\quad=-v(X^\pi_{t\wedge T^\pi})\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge T^\pi)}+v(x)+\int_0^{t\wedge T^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}[cv'(X^\pi_s)-\delta v(X^\pi_s)]ds\\
&\qquad+\sum_{\substack{0\leqslant T_i\leqslant t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{T_i}\neq X^\pi_{T_i-}}}[v(X^\pi_{T_i-}-Y_i)-v(X^\pi_{T_i-})]\mathrm{e}^{-\delta T_i}\\
&\qquad+\sum_{\substack{0\leqslant \tau_k\leqslant t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{\tau_k}\neq X^\pi_{\tau_k-}}}[v(X_{\tau_k-}-\xi_k)+g(\xi_{\tau_k})-v(X_{\tau_k-})]\mathrm{e}^{-\delta\tau_k}\\
&\qquad+\sum_{\substack{0\leqslant T_i<t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{T_i+}\neq X^\pi_{T_i}}}[v(X^\pi_{T_i}+\zeta_i)-h(\zeta_i)-v(X^\pi_{T_i})]\mathrm{e}^{-\delta T_i}.
\end{aligned}$$

因

$$\sum_{\substack{0\leqslant T_i\leqslant t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{T_i}\neq X^\pi_{T_i-}}}[v(X^\pi_{T_i-}-Y_i)-v(X^\pi_{T_i-})]\mathrm{e}^{-\delta T_i}-\lambda\int_0^{t\wedge T^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}\int_0^{X^\pi_s+r^*}[v(X^\pi_{s-}-y)-v(X^\pi_{s-})]dF(y)ds$$

为 0 均值 $\{\mathcal{F}_t\}$- 鞅, 于是,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Bigg[\sum_{\substack{0\leqslant\tau_k\leqslant t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{\tau_k}\neq X^\pi_{\tau_k-}}}g(\xi_k)\mathrm{e}^{-\delta\tau_k}-\sum_{\substack{0\leqslant\tau'_i\leqslant t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{\tau'_i}\neq X^\pi_{\tau'_i-}}}h(\zeta_i)\mathrm{e}^{-\delta\tau'_i}\Bigg]\\
&\quad=-\mathrm{E}[v(X^\pi_{t\wedge T^\pi})\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge T^\pi)}]+v(x)+\mathrm{E}\Bigg[\int_0^{t\wedge T^\pi}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathcal{L}(X_s)ds\Bigg]\\
&\qquad+\mathrm{E}\sum_{\substack{0\leqslant\tau_k\leqslant t\wedge\tau^\pi\\ X^\pi_{\tau_k}\neq X^\pi_{\tau_k-}}}[v(X_{\tau_k-}-\xi_k)+g(\xi_{\tau_k})-v(X_{\tau_k-})]\mathrm{e}^{-\delta\tau_k}\\
&\qquad+\mathrm{E}\sum_{\substack{0\leqslant T_i<t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{T_i+}\neq X^\pi_{T_i}}}[v(X^\pi_{T_i}+\zeta_i)-h(\zeta_i)-v(X^\pi_{T_i})]\mathrm{e}^{-\delta T_i}.
\end{aligned}\tag{3.13}$$

进一步, 由 $v(x)\geqslant M_1v(x)$, 得

$$v(X_{\tau_k-}-\xi_k)+g(\xi_{\tau_k})-v(X_{\tau_k-})\leqslant 0.\tag{3.14}$$

由 $v(x)\geqslant M_2v(x)$, 得

$$v(X_{\tau'_i}+\zeta)-h(\zeta_{\tau'_i})-v(X_{\tau'_i})\leqslant 0.\tag{3.15}$$

考虑到 (3.4) 和 (3.13)–(3.15),

$$\mathrm{E}\Bigg[\sum_{\substack{0\leqslant\tau_k\leqslant t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{\tau_k}\neq X^\pi_{\tau_k-}}}g(\xi_k)\mathrm{e}^{-\delta\tau_k}-\sum_{\substack{0\leqslant\tau'_i\leqslant t\wedge\tau^\pi\\ X^\pi_{\tau'_i}\neq X^\pi_{\tau'_i-}}}h(\zeta_i)\mathrm{e}^{-\delta\tau'_i}\Bigg]\leqslant -E[v(X^\pi_{t\wedge T^\pi})\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge T^\pi)}]+v(x),$$

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge T^\pi)}v(X_{t\wedge T^\pi})=\mathrm{e}^{-\delta T^\pi}v(-r^*)\mathbb{I}_{\{T^\pi<\infty\}}+\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\delta t}v(X_t)\mathbb{I}_{\{T^\pi=\infty\}}=0.$$

因此,

$$E\Bigg[\sum_{\substack{0\leqslant\tau_k\leqslant t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{\tau_k}\neq X^\pi_{\tau_k-}}}g(\xi_k)\mathrm{e}^{-\delta\tau_k}-\sum_{\substack{0\leqslant\tau'_i\leqslant t\wedge T^\pi\\ X^\pi_{\tau'_i}\neq X^\pi_{\tau'_i-}}}h(\zeta_i)\mathrm{e}^{-\delta\tau'_i}\Bigg]\leqslant v(x).$$

令 $t\to\infty$, 得

$$E\Bigg[\sum_{\substack{0\leqslant\tau_k\leqslant T^\pi\\ X^\pi_{\tau_k}\neq X^\pi_{\tau_k-}}}g(\xi_k)\mathrm{e}^{-\delta\tau_k}-\sum_{\substack{0\leqslant\tau'_i\leqslant T^\pi\\ X^\pi_{\tau'_i}\neq X^\pi_{\tau'_i-}}}h(\zeta_i)\mathrm{e}^{-\delta\tau'_i}\Bigg]\leqslant v(x).$$

所以,

$$V(x)\leqslant v(x).$$

进一步, 若与 v 相关的控制的可允许策略,

$$\mathcal{L}v(X_t^\pi)=0,\quad t\neq\tau_k,\quad t\neq\tau_i',$$
$$v(x)=M_1v(x),\quad t=\tau_k,$$
$$v(x)=M_2v(x),\quad t=\tau_i',$$

则上述证明中不等式为严格等式. 因此, $V(x)=v(x)=V^{\pi^*}(x)$. □

4 理赔为指数分布时 QVI 的解

本节在理赔为指数分布的情况下求解. 指数分布的密度函数

$$p(y)=\beta\mathrm{e}^{-\beta y},\quad y>0. \tag{4.1}$$

受 [7,12,20] 的启发, 进行如下分析.

为解 QVI, 由以下方程开始.

$$cv'(x)-(\delta+\lambda)v(x)+\lambda\int_0^{x+r^*}v(x-y)p(y)dy=0.$$

即,

$$\begin{aligned}&cv'(x)-(\delta+\lambda)v(x)+\lambda\int_0^{x}v(x-y)p(y)dy\\&\quad+\lambda\int_x^{x+r^*}[v(z^*)-l(z^*-(x-y))-L]p(y)dy=0.\end{aligned} \tag{4.2}$$

因

$$\int_0^{x+r^*}V(x-y)dF(y)=\int_0^{x}V(x-y)dF(y)+\int_x^{x+r^*}[V(z^*)-l(z^*-(x-y))-L]dF(y),$$

又

$$\int_x^{x+r^*}[v(z^*)-l(z^*-(x-y))-L]\beta\mathrm{e}^{-\beta y}dy=\left(v(z^*)-lz^*-L-\frac{l}{\beta}\right)\mathrm{e}^{-\beta x}+\frac{l}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta(x+r^*)}, \tag{4.3}$$

得

$$cv'(x)-(\delta+\lambda)v(x)+\lambda\int_0^{x}v(y)\beta\mathrm{e}^{-\beta(x-y)}dy+\lambda\left(v(z^*)-lz^*-L-\frac{l}{\beta}\right)\mathrm{e}^{-\beta x}+\frac{\lambda l}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta(x+r^*)}=0. \tag{4.4}$$

对上式关于 x 求导, 得

$$\begin{aligned}&cv''(x)-(\delta+\lambda)v'(x)+\lambda\beta\left[v(x)-\int_0^{x}v(y)\beta\mathrm{e}^{-\beta(x-y)}dy\right]\\&\quad-\lambda\beta\left(v(z^*)-lz^*-L-\frac{l}{\beta}\right)\mathrm{e}^{-\beta x}-\lambda l\mathrm{e}^{-\beta(x+r^*)}=0.\end{aligned}$$

用 (4.4) 代换上式中的积分项, 得

$$cv''(x)+(\beta c-(\lambda+\delta))v'(x)-\delta\beta v(x)=0.$$

此微分方程的解为

$$v(x) = C_1 \mathrm{e}^{s_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{s_2 x}, \tag{4.5}$$

其中,

$$s_1 = \frac{\lambda + \delta - \beta c + \sqrt{(\lambda + \delta - \beta c)^2 + 4\beta c \delta}}{2c}, \tag{4.6}$$

$$s_2 = \frac{\lambda + \delta - \beta c - \sqrt{(\lambda + \delta - \beta c)^2 + 4\beta c \delta}}{2c}. \tag{4.7}$$

将 (4.5) 代入方程 (4.4), 得

$$-\frac{C_1 \beta}{s_1 + \beta} - \frac{C_2 \beta}{s_2 + \beta} + l r^* + \frac{l}{\beta}(\mathrm{e}^{-\beta r^*} - 1) = 0. \tag{4.8}$$

当 $x \geqslant x^*$,

$$M_1 v(x) := \sup\{v(x - \eta) + k\eta - K\}. \tag{4.9}$$

记 $R(\eta) = v(x - \eta) + k\eta - K$, 则 $\exists \hat{\eta} = \hat{\eta}(x)$, s.t. $R(\hat{\eta}(x)) = \sup\{R(\eta)\}$. 从而, $R'(\hat{\eta}) = -v'(x - \hat{\eta}) + k = 0$, 即,

$$v'(\tilde{x}) = k, \tag{4.10}$$

其中, $\tilde{x} = x - \hat{\eta}$.

由 (4.9) 得 $v(x) = v(x - \hat{\eta}) + k\hat{\eta} - K$, 即,

$$v(x) = v(\tilde{x}) + k(x - \tilde{x}) - K, \quad x \geqslant x^*.$$

特别地,

$$v'(x^*) = k. \tag{4.11}$$

且

$$v(x^*) = v(\tilde{x}) + k(x^* - \tilde{x}) - K. \tag{4.12}$$

当 $-r^* < x \leqslant 0$,

$$M_2 v(x) := \sup\{v(x + \theta) - l\theta - L\}. \tag{4.13}$$

记 $S(\theta) = v(x + \theta) - l\theta - L$, 则 $\exists \hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$, s.t. $S(\hat{\theta}(x)) = \sup\{R(\theta)\}$. 从而, $S'(\hat{\theta}) = v'(x + \hat{\theta}) - l = 0$, 即,

$$v'(z^*) = l, \tag{4.14}$$

其中, $z^* = x + \hat{\theta}$. 由 (4.13) 得 $v(x) = v(x + \hat{\theta}) - l\hat{\theta} - L$, 即,

$$v(x) = v(z^*) - l(z^* - x) - L \quad 若 -r^* < x < 0.$$

显然,

$$
\begin{aligned}
&v'(x)=l, \quad 若 -r^*<x<0,\\
&v(-r^*)=v(z^*)-l(z^*+r^*)-L.
\end{aligned}
$$

总结起来,

$$
v(x)=\begin{cases}
v(z^*)-l(z^*-x)-L, & -r^*\leqslant x<0,\\
C_1\mathrm{e}^{s_1x}+C_2\mathrm{e}^{s_2x}, & 0\leqslant x<x^*,\\
v(\tilde{x})+k(x^*-\tilde{x})-K, & x\geqslant x^*,
\end{cases}
\tag{4.15}
$$

其中 s_1, s_2 分别由 (4.6), (4.7) 确定. z^*, x^*, $\tilde{x}$, C_1, C_2 由 (4.14), (4.11), (4.10), (4.8), (4.12) 确定, 即由以下方程组确定:

$$
\begin{cases}
C_1s_1\mathrm{e}^{s_1z^*}+C_2s_2\mathrm{e}^{s_2z^*}=l,\\
C_1s_1\mathrm{e}^{s_1x^*}+C_2s_2\mathrm{e}^{s_2x^*}=k,\\
C_1s_1\mathrm{e}^{s_1\tilde{x}}+C_2s_2\mathrm{e}^{s_2\tilde{x}}=k,\\
-\dfrac{C_1\beta}{s_1+\beta}-\dfrac{C_2\beta}{s_2+\beta}+lr^*+\dfrac{l}{\beta}(\mathrm{e}^{-\beta r^*}-1)=0,\\
\displaystyle\int_{\tilde{x}}^{x^*}(k-v'(x))dx=K.
\end{cases}
$$

因为 $v(0)>0$, 所以

$$
C_1+C_2>0.
$$

由 $v'(0)>0$, 得

$$
C_1s_1+C_2s_2>0.
$$

由以上两个不等式, 可知 $C_1>0$. 由 $C_1>0$ 可断言必有 $C_2<0$. 证明如下: 如果 $C_2\geqslant 0$, 则对 $v(x)$ 求二阶导数可知 $v(x)$ 为严格凸函数. 于是 $v'(x)$ 严格增. 若 $v'(x)$ 严格增, 则不存在两个不同的点使得 $v'(x)=k$, 于是, 方程组无解. 因此, 得出 $C_2<0$.

因

$$
v'''(x)=C_1s_1^3\mathrm{e}^{s_1x}+C_2s_2^3\mathrm{e}^{s_2x}>0,
$$

所以, $v'(x)$ 为凸函数.

先考虑以下方程:

$$
C_1s_1\mathrm{e}^{s_1x}+C_2s_2\mathrm{e}^{s_2x}=k.
\tag{4.16}
$$

将 $v'(x)$ 对 x 求导, 得

$$
v''(x)=C_1s_1^2\mathrm{e}^{s_1x}+C_2s_2^2\mathrm{e}^{s_2x}.
$$

于是存在唯一的 $\hat{x}$ 满足方程 $v''(x)=0$ 且

$$\hat{x}=\frac{1}{s_1-s_2}\ln\frac{-C_2s_2^2}{C_1s_1^2}. \tag{4.17}$$

考虑到 $v'''(x)>0$, 可得 $\hat{x}$ 为 $v'(x)$ 达到极小值的点. 因此, 方程 $v'(x)=k$ 有两个根当且仅当 $v'(\hat{x})<k$. 于是, 须有下式成立:

$$C_1s_1\left[\frac{-C_2s_2^2}{C_1s_1^2}\right]^{\frac{s_1}{s_1-s_2}}+C_2s_2\left[\frac{-C_2s_2^2}{C_1s_1^2}\right]^{\frac{s_2}{s_1-s_2}}<k. \tag{4.18}$$

以下均在 (4.18) 成立的条件下考虑.

$v'(x)=k$ 有两个根 $\tilde{x}$ 和 x^*, 且

$$\tilde{x}<\hat{x}<x^*.$$

情形一: 若 $\hat{x}>0$, $v'(0)>l$, $v'(\hat{x})<k$, 则 $v'(x)=k$ 有两正根 $\tilde{x}$, x^* 且 $v'(x)=l$ 有一正根 z^*. 在此情况, 当盈余到达 x^* 时, 应分红, 使盈余降至 $\tilde{x}$. 当过程因理赔降至 0 以下且赤字小于 r^* 时, 则注资, 使过程恢复到 z^*. 见图 1. 于是, 值函数

$$v(x)=\begin{cases} v(z^*)-l(z^*-x)-L, & -r^*\leqslant x<0,\\ C_1\mathrm{e}^{s_1x}+C_2\mathrm{e}^{s_2x}, & 0\leqslant x<x^*,\\ v(\tilde{x})+k(x^*-\tilde{x})-K, & x\geqslant x^*,\end{cases} \tag{4.19}$$

x^*, $\tilde{x}$ 满足 $v'(x^*)=v'(\tilde{x})=k$.

情形二: 若 $\hat{x}>0$, $k<v'(0)\leqslant l$, $v'(\hat{x})<k$, 则 $v'(x)=k$ 有两正根 $\tilde{x}$, x^*. $v'(x)=l$ 有一负根 z^*. 在此情况, 当盈余到达 x^* 时, 应分红, 使盈余降至 $\tilde{x}$. 当过程因理赔降至 0 以下且赤字小于 r^* 时, 则注资, 使过程恢复到 0. 见图 2. 于是, 值函数

$$v(x)=\begin{cases} v(0)+lx-L, & -r^*\leqslant x<0,\\ C_1\mathrm{e}^{s_1x}+C_2\mathrm{e}^{s_2x}, & 0\leqslant x<x^*,\\ v(\tilde{x})+k(x^*-\tilde{x})-K, & x\geqslant x^*,\end{cases} \tag{4.20}$$

x^*, $\tilde{x}$ 满足 $v'(x^*)=v'(\tilde{x})=k$.

情形三: 若 $\hat{x}>0$, $v'(0)\leqslant k$, $v'(\hat{x})<k$, 则 $v'(x)=k$ 有一正根 x^* 和一负根 $\tilde{x}$. $v'(x)=l$ 有一负根 z^*. 在此情况, 当盈余到达 x^* 时, 应分红, 使盈余降至 0. 当过程因理赔降至 0 以下且赤字小于 r^* 时, 则注资, 使过程恢复到 0. 见图 3. 于是, 值函数

$$v(x)=\begin{cases} v(0)+lx-L, & -r^*\leqslant x<0,\\ C_1\mathrm{e}^{s_1x}+C_2\mathrm{e}^{s_2x}, & 0\leqslant x<x^*,\\ v(0)+kx^*-K, & x\geqslant x^*,\end{cases} \tag{4.21}$$

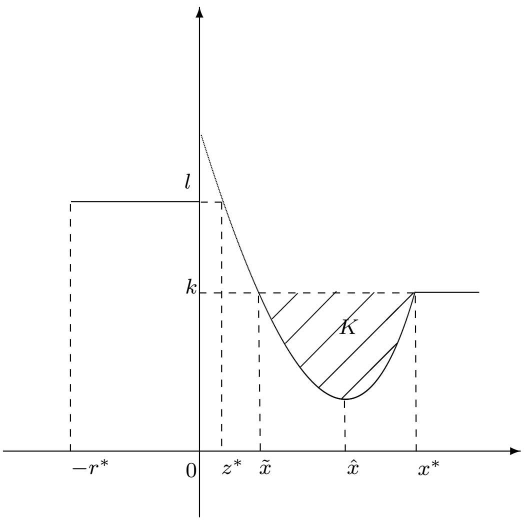

图 1　情形一的 $v'(x)$

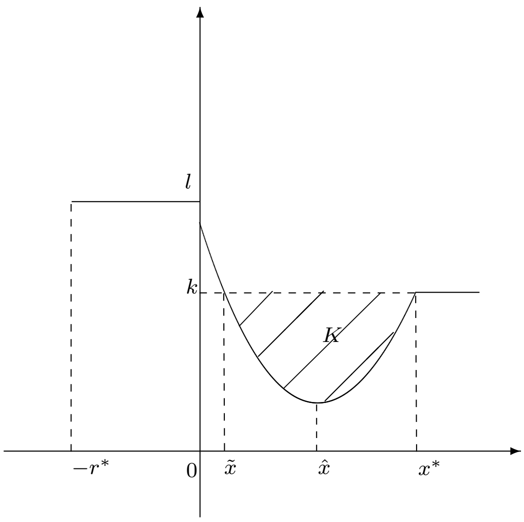

图 2　情形二的 $v'(x)$

x^* 满足 $v'(x^*) = k$.

情形四: 若 $\hat{x} \leqslant 0$, $v'(0) \leqslant k$, $v'(\hat{x}) < k$, 则 $v'(x) = k$ 有一正根 x^* 和一负根 $\tilde{x}$. $v'(x) = l$ 有一负根 z^*. 在此情况, 当盈余到达 x^* 时, 应分红, 使盈余降至 0. 当过程因理赔降至 0 以下且赤字小于 r^* 时, 则注资, 使过程恢复到 0. 见图 4. 于是, 值函数

$$v(x) = \begin{cases} v(0) + lx - L, & -r^* \leqslant x < 0, \\ C_1 \mathrm{e}^{s_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{s_2 x}, & 0 \leqslant x < x^*, \\ v(0) + kx^* - K, & x \geqslant x^*, \end{cases} \tag{4.22}$$

x^* 满足 $v'(x^*) = k$.

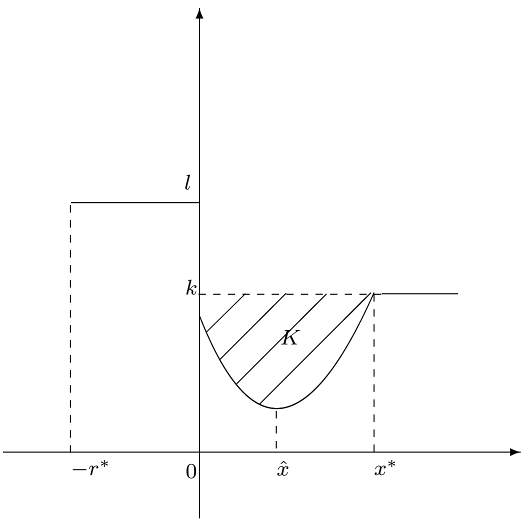

图 3　情形三的 $v'(x)$

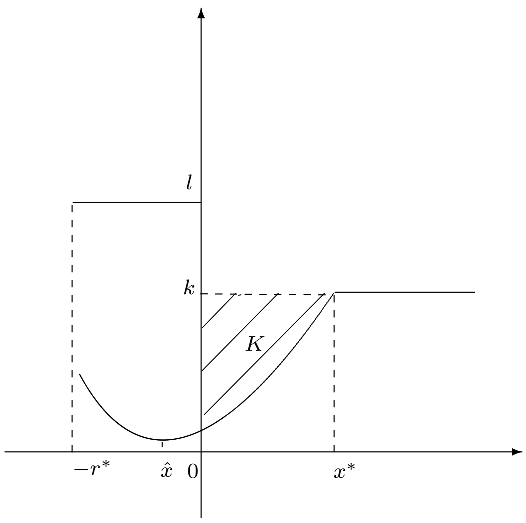

图 4　情形四的 $v'(x)$

定理 4.1 由 (4.15) 给出的函数 v 在 $(-r^*,0)\cup(0,\infty)$ 连续, 在 $(-r^*,0)\cup(0,x^*)\cup(x^*,\infty)$ 二次连续可微. 依据不同情况, 具体地有:

(1) (4.19) 给出的函数 v 在 $(-r^*,0)\cup(0,\infty)$ 连续可微, 在 $(-r^*,0)\cup(0,x^*)\cup(x^*,\infty)$ 二次连续可微. $v(x)$ 为 (3.4)–(3.8) 的解. $\hat{x}>0$, $v'(0)>l$, $v'(\hat{x})<k$. 进一步, 当 $x\geqslant x^*$, $Mv(x)=v(x)$. 令 $\xi(x)$ 为关于 $\xi(x)$ 的函数 $v(x-\xi(x))+k\xi(x)-K$ 达到上确界的点, 那么, 当 $x\geqslant x^*$, $\xi(x)=x-\tilde{x}$;

(2) (4.20) 给出的函数 v 在 $(-r^*,0)\cup(0,\infty)$ 连续可微, 在 $(-r^*,0)\cup(0,x^*)\cup(x^*,\infty)$ 二次连续可微. $v(x)$ 为 (3.4)–(3.8) 的解. $\hat{x}>0$, $k<v'(0)\leqslant l$, $v'(\hat{x})<k$. 进一步, 当 $x\geqslant x^*$, $Mv(x)=v(x)$. 令 $\xi(x)$ 为关于 $\xi(x)$ 的函数 $v(x-\xi(x))+k\xi(x)-K$ 达到上确界的点, 那么, 当 $x\geqslant x^*$, $\xi(x)=x-\tilde{x}$;

(3) (4.21) 给出的函数 v 在 $(-r^*,0)\cup(0,\infty)$ 连续可微, 在 $(-r^*,0)\cup(0,x^*)\cup(x^*,\infty)$ 二次连续可微. $v(x)$ 为 (3.4)–(3.8) 的解. $\hat{x}>0$, $v'(0)\leqslant k$, $v'(\hat{x})<k$. 进一步, 当 $x\geqslant x^*$, $Mv(x)=v(x)$. 令 $\xi(x)$ 为关于 $\xi(x)$ 的函数 $v(x-\xi(x))+k\xi(x)-K$ 达到上确界的点, 那么, 当 $x\geqslant x^*$, $\xi(x)=x$;

(4) (4.22) 给出的函数 v 在 $(-r^*,0)\cup(0,\infty)$ 连续可微, 在 $(-r^*,0)\cup(0,x^*)\cup(x^*,\infty)$ 二次连续可微. $v(x)$ 为 (3.4)–(3.8) 的解. $\hat{x}\leqslant 0$, $v'(0)\leqslant k$, $v'(\hat{x})<k$. 进一步, 当 $x\geqslant x^*$, $Mv(x)=v(x)$. 令 $\xi(x)$ 为关于 $\xi(x)$ 的函数 $v(x-\xi(x))+k\xi(x)-K$ 达到上确界的点, 那么, 当 $x\geqslant x^*$, $\xi(x)=x$.

证明 这里我们只证明 (1), 重复类似的证明过程即可证明 (2)–(4).

(i) 首先证明在 $(0,\infty)$, $\mathcal{L}v(x)\leqslant 0$:

(a) 由 $v(x)$ 的构造, 在 $(0,x^*)$, $\mathcal{L}v(x)=0$.

(b) 由 $v(x)$ 在点 x^* 的连续可微性, 得

$$\mathcal{L}v(x^*)=cv'(x^*)-(\delta+\lambda)v(x^*)+\lambda\int_0^{x^*+r^*}v(x^*-y)p(y)dy=0.$$

(c) 对所有的 $x>x^*$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}v(x)&=cv'(x)-(\delta+\lambda)v(x)+\lambda\int_0^{x+r^*}v(x-y)p(y)dy\\&=cv'(x)-(\delta+\lambda)v(x)+\lambda\int_0^{x}v(x-y)p(y)dy\\&\quad+\lambda\int_x^{x+r^*}[v(z^*)-l(z^*-(x-y))-L]\beta\mathrm{e}^{-\beta y}dy\\&=cv'(x)-(\delta+\lambda)v(x)+\lambda\int_0^{x}v(x-y)p(y)dy\\&\quad+\lambda\bigg(\bigg(v(z^*)-lz^*-L-\frac{l}{\beta}\bigg)\mathrm{e}^{-\beta x}+\frac{l}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta(x+r^*)}\bigg).\end{aligned}$$

对 x 求导, 得

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}v(x))'&=cv''(x)-(\delta+\lambda)v'(x)+\lambda\beta\bigg[v(x)-\int_0^{x}v(y)\beta\mathrm{e}^{-\beta(x-y)}dy\bigg]\\&\quad-\lambda\beta\bigg(\bigg(v(z^*)-lz^*-L-\frac{l}{\beta}\bigg)\mathrm{e}^{-\beta x}+\frac{l}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta(x+r^*)}\bigg)\\&=cv''(x)+(\beta c-(\lambda+\delta))v'(x)-\delta\beta v(x)-\beta\mathcal{L}v(x).\end{aligned}$$

之后的证明与 [17] 的中定理 4.1 类似. 因在 $[0,x^*)$ 上, $\mathcal{L}v(x)=0$, 对所有的 $x\in[0,x^*)$, $(\mathcal{L}v(x))'=0$. 因此, $\mathcal{L}v(x^*-)=0$. 考虑 $0=v''(x^*+)<v''(x^*-)$ 以及 $v(x)$, $v'(x)$ 在 x^* 的连续性, 有 $(\mathcal{L}v(x^*+))'<$

$(\mathcal{L}v(x^*-))'=0$. 因此存在 ε, 在 $(x,x+\varepsilon)$ s.t. $(\mathcal{L}v(x))'<0$. 显然在 $(x,x+\varepsilon)$, $\mathcal{L}v(x)<0$. 设存在一点 $x_1>x^*+\varepsilon$ s.t. $\mathcal{L}v(x_1)>0$, 那么由于 $\mathcal{L}v(x)$ 的连续性, 必存在一点 $x_2<x_1$ s.t. $\mathcal{L}v(x_2)=0$ 且 $(\mathcal{L}v(x_2))'\geqslant 0$. 由 $\mathcal{L}v(x_2)=\mathcal{L}v(x^*)=0$, $v(x_2)=v(x^*)=k$, $v''(x_2)=v''(x^*)=0$, $v(x_2)>v(x^*+)$, 可知 $(\mathcal{L}v(x_2))'<(\mathcal{L}v(x^*))'<0$, 与 $(\mathcal{L}v(x_2))'\geqslant 0$ 矛盾. 因此, 在 (x^*,∞), $\mathcal{L}v(x_2)<0$.

(ii) 为了证明 $M_1v(x)\leqslant v(x)$, 需要考虑下面三种情况.

(a) 当 $x<\frac{K}{k}$, 我们有 $M_1v(x)=-\infty<v(x)$.

(b) 当 $x\geqslant x^*$, 定义 $f(\eta)=v(x-\eta)+k\eta-K$. 定义意味着: 若 $\eta\in(\frac{K}{k},x-\tilde{x})$, 则 $f'(\eta)=-v'(x-\eta)+k>0$, 若 $\eta\in[x-\tilde{x},x]$, 则 $f'(\eta)=-v'(x-\eta)+k\leqslant 0$ 当 $\eta=x-\tilde{x}$, 等号成立. 这表明

$$M_1v(x)=v(x-(x-\tilde{x}))+k(x-\tilde{x})-K=v(x),\quad x\geqslant x^*.$$

(c) 当 $\frac{K}{k}<x<x^*$, 若 $x\in(\frac{K}{k},\tilde{x}+\frac{K}{k}]$, 则 $f'(\eta)=-v'(x-\eta)+k<0$, 因此,

$$M_1v(x)=v\left(x-\frac{K}{k}\right)<v(x),\quad \frac{K}{k}<x\leqslant\tilde{x}+\frac{K}{k},$$

若 $x\in(\tilde{x}+\frac{K}{k},x^*)$, 则对 $\eta\in(\frac{K}{k},x-\tilde{x})$, $f'(\eta)=-v'(x-\eta)+k>0$. 对 $\eta\in[x-\tilde{x},x]$, $f'(\eta)\leqslant 0$. 当 $\eta=x-\tilde{x}$, 等号成立. 这表明

$$\begin{aligned}M_1v(x)&=v(x-(x-\tilde{x}))+k(x-\tilde{x})-K\\&=v(\tilde{x})+k(x-\tilde{x})-K\\&=v(\tilde{x})+k(x^*-\tilde{x})-K-k(x^*-x)\\&=v(x^*)-k(x^*-x)<v(x).\end{aligned}$$

因此,

$$M_1v(x)<v(x),\quad \frac{K}{k}<x<x^*.$$

(iii) 为证明 $M_2v(x)\leqslant v(x)$, 需要考虑下面三种情况.

(a) 当 $-r^*<x<0$, 定义 $q(\theta)=v(x+\theta)-l\theta-L$. 定义意味着: 若 $\theta\in[-x,-x+z^*]$, 则 $q'(\theta)=v'(x+\theta)-l\geqslant 0$, 若 $\theta\in(-x+z^*,\infty)$, 则 $q'(\theta)=v'(x+\theta)-l<0$. 当 $\theta=-x+z^*$, 等号成立. 这表明 $M_2v(x)=v(x+(-x+z^*))-l(-x+z^*)-L=v(x)$, $-r^*<x<0$.

(b) 当 $x>z^*$, $q'(\theta)=v'(x+\theta)-l<0$, 则 $q'(\theta)=v'(x+\theta)-l<0$, 其最大值在 $\theta=0$ 到达. 这表明 $M_2v(x)=v(x)-L<v(x),x>z^*$.

(c) 当 $0\leqslant x<z^*$, 可以看到: 当 $\theta\in(0,z^*-x]$, $q'(\theta)=v'(x+\theta)-l\geqslant 0$. 当 $x\in(z^*-x,\infty)$, $q'(\theta)<0$, 当 $\theta=z^*-x$ 等号成立. 表明

$$\begin{aligned}M_2v(x)&=v(x+(z^*-x))-l(z^*-x)-L=v(z^*)-l(z^*-x)-L\\&=v(z^*)-l(z^*+r^*)-l(-x-r^*)-L\\&=v(-r^*)+l(r^*+x)<v(x).\end{aligned}$$

因此, $M_2v(x)<v(x),0\leqslant x<z^*$.

(iv) 为证明 $(M_1v(x)-v(x))(M_2v(x)-v(x))(\mathcal{L}v(x))=0$.

(a) 当 $-r^* < x < 0$, $M_2 v(x) = v(x)$.

(b) 当 $0 \leqslant x < x^*$, $\mathcal{L}v(x) = 0$.

(c) 当 $x \geqslant x^*$, $M_1 v(x) = v(x)$. □

现在, 将结论总结如下:

定理 4.2 (1) 若 $V(z^*) - lz^* - L > 0$, 则 $r^* > 0$. 注资合理.

(a) 当 $\hat{x} > 0$, $v'(0) > l$, $v'(\hat{x}) < k$ 时, $V(x)$ 等于 (4.19) 给出的 $v(x)$, 且当 $x \leqslant -r^*$ 时, $v(x) = 0$. 当过程达到 x^* 时, 通过分红降至 $\tilde{x}$. 当理赔引起过程降至 0 以下并且赤字不大于 r^* 时, 则注资, 使过程增至 z^*.

(b) 当 $\hat{x} > 0$, $k < v'(0) \leqslant l$, $v'(\hat{x}) < k$ 时, $V(x)$ 等于 (4.20) 给出的 $v(x)$. 且当 $x \leqslant -r^*$ 时, $v(x) = 0$. 当过程达到 x^* 时, 通过分红降至 $\tilde{x}$. 当理赔引起过程降至 0 以下并且赤字不大于 r^* 时, 则注资, 使过程增至 0.

(c) 当 $\hat{x} > 0$, $v'(0) \leqslant k$, $v'(\hat{x}) < k$ 时，$V(x)$ 等于 (4.21) 给出的 $v(x)$. 且当 $x \leqslant -r^*$ 时, $v(x) = 0$. 当过程达到 x^* 时, 通过分红降至 0. 当理赔引起过程降至 0 以下并且赤字不大于 r^* 时, 则注资, 使过程增至 0.

(d) 当 $\hat{x} \leqslant 0$, $v'(0) \leqslant k$, $v'(\hat{x}) < k$ 时, $V(x)$ 等于 (4.22) 给出的 $v(x)$. 且当 $x \leqslant -r^*$ 时, $v(x) = 0$. 当过程达到 x^* 时, 通过分红降至 0. 当理赔引起过程降至 0 以下并且赤字不大于 r^* 时, 则注资, 使过程增至 0.

(2) 若 $V(z^*) - lz^* - L \leqslant 0$, 则 $r^* \leqslant 0$. 由 (3.10), 不应注资. 当过程由理赔降至 0 以下时, 破产发生.

(a) 若 $c\lambda\beta > (\lambda+\delta)^2$, $0 < K < J_1(\frac{k}{\rho_0})$, 则 $V(x)$ 与 [12] 中 (53) 给出的 $v(x)$ 相等. 且当 $x < 0$ 时, $v(x) = 0$. 当过程到达 x^* 时, 应分红, 过程降至 $\tilde{x}$.

(b) 若 $c\lambda\beta > (\lambda+\delta)^2$, $K \geqslant J_1(\frac{k}{\rho_0})$, 则 $V(x)$ 与 [12] 中 (54) 给出的 $v(x)$ 相等. 且当 $x < 0$ 时, $v(x) = 0$. 当过程到达 x^* 时, 应分红, 使过程降至 0.

(c) 若 $c\lambda\beta \leqslant (\lambda+\delta)^2$, 则 $V(x)$ 与 [12] 中 (55) 给出的 $v(x)$ 相等. 且当 $x < 0$ 时, $v(x) = 0$. 当过程到达 x^* 时, 应分红, 使过程降至 0.

证明 关于情形 (1), 由上面的分析, 我们看到 v 满足 QVI. 根据定理 3.1, $V(x) \leqslant v(x)$. 由本节的讨论, 可知由 (4.19)–(4.22) 确定的控制 π^* 是与 v 相关的控制. 又, 由定义 3.2, π^* 为可允许控制. 因此, 由定理 3.1, 推出 v 为值函数, π^* 为最优控制.

关于情形 (2), 可以参见 [12] 中的相应部分的证明. □

参考文献

1 de Finetti B. Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. In: Transactions of the XVth International Congress of Actuaries. New York: Congrès International d'Actuaires, 1957, 433–443

2 Bühlmann H. Mathematical Methods in Risk Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1970

3 Gerber H U. An Introduction to Mathematical Risk Theory. In: S. S. Huebner Foundation Monographs Series No. 8. Homewood, IL: Irwin, 1979

4 Azcue P, Muler N. Optimal reinsurance and dividend distribution policies in the Cramér-Lundberg model. Math Finance, 2005, 15: 261–308

5 Gerber H U, Shiu E S W. On optimal dividend strategies in the compound Poisson model. N Am Actuar J, 2006, 10: 76–93

6 Schmidli H. Stochastic Control in Insurance. London: Springer-Verlag, 2008

7 Øksendal B. Stochastic control problems where small intervention costs have big effects. Appl Math Optim, 1999, 40: 355–375

8 Jeanblanc-Picqué M, Shiryaev A N. Optimization of the flow of dividends. Russ Math Surv, 1995, 50: 257–277

9 Cadenillas A, Taksar M, Zapatero F. Optimal dividend policy with mean-reverting cash reservoir. Math Finance, 2007, 17: 81–109

10 Cadenillas A, Choulli T, Taksar M, et al. Classical and impulse stochastic control for the optimization of the dividend and risk policies of an insurance firm. Math Finance, 2006, 16: 181–202

11 Paulsen J. Optimal dividend payments until ruin of diffusion processes when payments are subject to both fixed and proportional costs. Adv Appl Probab, 2007, 39: 669–689

12 Bai L, Guo J. Optimal dividend payments in the classical risk model when payments are subject to both transaction costs and taxes. Scand Actuar J, 2010, 1: 36–55

13 Borch B. The rescue of an insurance company after ruin. Astin Bulletin, 1968, 15: 280–292

14 Dickson D C M, Waters H R. Some optimal dividends problems. Astin Bulletin, 2004, 34: 49–74

15 Sethi S, Taksar M. Optimal financing of a corporation subject to random returns. Math Finance, 2002, 12: 155–172

16 Løkka A, Zervos M. Optimal dividend and issuance of equity policies in the presence of proportional costs. Insurance Math Econ, 2008, 42: 954–961

17 Kulenko N, Schmidli H. Optimal dividend strategies in a Cramér-Lundberg model with capital injections. Insurance Math Econ, 2008, 43: 270–278

18 Paulsen J. Optimal dividend payments and reinvestments of diffusion processes with both fixed and proportional costs. SIAM J Control Optim, 2008, 47: 2201–2226

19 Li Y, Liu G. Optimal stopping of the classical risk model controlled by dividend strategy. Acta Math Appl Sinica, 2010, 33: 1123–1132

20 Belhaj M. Optimal dividend payments when cash reserves follow a jump-diffusion process. Math Finance, 2010, 20: 313–325

Optimal dividend payment and capital injection of the compound Poisson risk model with both proportional and fixed costs

ZHANG ShuaiQi & LIU GuoXin

Abstract This paper deals with the optimal dividend payment and capital injection problem for the classical risk model. With each dividend payment and capital injection, there is a proportional cost and a fixed cost. It controls the timing and the amount of both dividends paid out and equity issuance. The objective of the corporation is to maximize the expected discounted dividends payout minus the equity issuance until the time of bankruptcy. Due to the presence of the fixed transaction costs with each dividend payment and capital injection, the problem is formulated as an impulse stochastic control problem. It turns out that the control problem is associated with qualitatively different optimal capital injection strategies, depending on the problem's data. One allows for no capital injection and the other allows for capital injection. We solve this problem explicitly in the case of exponential claim amount distributions. It is shown that there can be essentially seven different solutions depending on the model's parameters and the costs.

Keywords optimal dividend strategy, capital injection strategy, quasi-variational inequalities (QVI), impulse stochastic control

MSC(2010) 93E20, 91B30

doi: 10.1360/012011-1039