中国科学: 数学 2015 年 第 45 卷 第 11 期: 1811～1832
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

综 述

线性算子动力系统的研究进展

献给史济怀教授 80 华诞

张亮[①], 周泽华[②]*

① 天津大学海洋科学与技术学院, 天津 300072;
② 天津大学数学系, 天津 300072
E-mail: 168zhangliang2011@163.com, zehuazhoumath@aliyun.com

收稿日期: 2015-02-27; 接受日期: 2015-07-21; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11371276, 11301373 和 11401426) 资助项目

摘要 线性算子动力系统主要研究线性算子的超循环性、混沌性、混合性等动力学性质, 它与复分析、算子理论、拓扑理论、微分几何等学科有着重要的联系, 有广泛的应用范围. 作用在无穷维空间上的某些线性算子有着有趣的动力学性质. 特别地, 超循环性是无穷维空间情形下的性质, 即算子迭代形成的轨道能形成稠密的子空间. 一个局部凸的完备度量空间存在超循环算子的充分必要条件是空间可分且是无穷维的. 近几十年来, 线性算子动力系统的研究成为非常活跃的领域, 并有了许多精彩的研究成果. 本文将对线性算子动力系统的研究内容进行系统的梳理, 并对近年来关于线性算子动力性质方面的精彩研究成果作简要的回顾和总结, 其中也包括本课题组近年来关于此方向的研究结论.

关键词 完备度量空间 线性算子 超循环性

MSC (2010) 主题分类 47A16, 46E15

1 引言

线性动力系统是泛函分析中年轻且发展迅速的重要分支, 主要涉及线性算子迭代, 即在无穷维可分的某些拓扑向量空间上的线性算子在向量迭代下的集合 (称为该算子的轨道) 在该空间中是否稠密的问题. 具体而言, 对于作用在拓扑向量空间 X 上的有界线性算子 T, 如果存在向量 $x \in X$ 使得轨道 $\mathrm{orb}(T,x) = \{T^n x : n = 0, 1, \ldots\}$ (或者 $\{\lambda T^n x : \lambda \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \ldots\}$) 在 X 中稠密, 则算子 T 是超循环的 (hypercyclic) (或者, 亚超循环的 (supercyclic)).

最早关于线性动力系统的研究是, 1929 年 Birkhoff [1] 证明了复平面上整函数空间上的平移算子是 hypercyclic; 其后, 1952 年 Maclane [2] 证明了同一空间上的微分算子也具有超循环性; 1969 年 Rolewicz [3] 首次给出了 Banach 空间上某类移位算子的超循环性. 不过线性动力系统学科真正的发展却是在 1982 年 Kitai 的博士学位论文 [4] 发表之后, 该文讨论了线性算子的不变子集问题, 并给出判断超循环的一个准则. 值得一提的是, Kitai 的博士学位论文也显示了线性动力系统与算子理论中著名的不变子空间 (或不变子集) 问题的密切关系. 事实上, 很容易证明: 拓扑向量空间 X 上的线性算子 T 没有非平凡的闭的不变子空间 (或不变子集) 当且仅当该空间里任一非零元都是循环的 (或超循环的).

英文引用格式: Zhang L, Zhou Z H. Progress in research on dynamics of linear operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1811–1832, doi: 10.1360/N012015-00111

此后, 在众多数学家的辛勤努力下, 该学科发展迅猛, 尤其是文献 [5–7] 的研究工作, 对此学科的发展起了极其重要的作用. 其中, 文献 [5] 不但完整描述了超循环算子类的性质, 而且将 Devaney 混沌 (chaos) 的概念作为了线性混沌 (linear chaos) 的定义: 如果一个线性算子有一个稠密的轨道且周期点是稠密的, 则此线性算子是混沌的 (chaotic); 同时证明了包括三个经典算子 Birkhoff 算子、MacLane 算子和 Rolewicz 算子在内的许多算子都是混沌的.

线性动力系统蕴含的内容极其丰富, 它属于数学几个不同领域的交叉学科, 与其他学科关系密切.

1.1 与拓扑动力系统的关系

由于超循环的定义不需要线性结构, 故对于作用在拓扑向量空间 X 上的任意连续映射 T, 此定义也是有意义的. 事实上, 拥有稠密轨道的连续映射也是拓扑动力系统中重要的研究内容.

在拓扑动力系统中, 通常设定的底空间是紧拓扑空间, 且紧致性是讨论的基本方面. 而在线性动力系统中, 由于线性算子的超循环性是无穷维数可分情形下的性质, 故底空间不可能是紧致的和局部紧致的. 因此, 拓扑动力系统中的研究方法和研究工具无法应用到线性动力系统中来. 从而在线性动力系统的研究过程中, 我们会发现许多有趣的现象和结论.

1.2 与算子理论的关系

超循环的概念是从更早的循环的概念引申而来. 如果对于作用在拓扑向量空间 X 上的线性算子 T, 存在向量 $x \in X$ 使得轨道 $\operatorname{orb}(T,x)$ 的线性扩张在 X 上稠密, 则算子 T 是循环的 (cyclic). 此定义与著名的子空间问题关系很密切. 对于作用在拓扑向量空间 X 上的线性算子 T, 是否能够找到非平凡的闭子空间 $\mathrm{F} \subseteq X$, 使得 $T(F) \subseteq F$? 显然, 算子 T 在任意向量下轨道线性扩张的闭包是 T 的不变子空间. 因此, 算子 T 没有非平凡的不变闭子空间的充要条件是, 任意非零向量 $x \in X$ 是算子 T 的循环向量.

类似地, 不变子集的问题就是, 是否任意的算子有非平凡的不变的闭子集合. 由于算子 T 的任意轨道的闭包对于 T 是不变闭子集, 从而, 算子 T 没有非平凡的不变的闭子集当且仅当任意的非零向量 $x \in X$ 是算子 T 的超循环向量. 对于不变子空间的问题, 尽管众多数学家作出了积极努力, 但还有许多未解决的问题, 尤其是对于 Hilbert 空间的算子情形. 对于 Banach 空间, Read [8] 构造了作用在 $l^1(\mathbb{N})$ 上的算子 T, 使得任意的非零向量 $x \in l^1(\mathbb{N})$ 都是超循环向量. 这就意味着对于空间 l^1, 不变子集的问题有一个否定的结论.

1.3 与普适性的关系

对于拓扑空间 X 和 Y, 设 $(T_i)_{i\in I}$ 是连续映射 $T_i : X \to Y$ 组成的算子族. 如果存在 $x \in X$, 使得集合 $\{T_i(x); i \in I\}$ 在空间 Y 中稠密, 则称算子族 $(T_i)_{i\in I}$ 是普适的 (universal). Fekete 在 1914 年第一次给出了普适性的例子, 他发现了普适 Taylor 级数 $\sum_{n\geqslant 1} a_n t^n$, 即对于作用在 $[-1,1]$ 上的任意连续函数 g 且 $g(0)=0$, 存在递增的正整数序列 (n_k), 使得随着 $k\to\infty$, 级数 $\sum_{k=1}^{n_k} a_{n_k} t^{n_k}$ 一致趋向于 $g(t)$, 这里 $X=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, Y 是作用在 $[-1,1]$ 上且固定零点的所有连续函数的全体且 $T_i((a_n))=\sum_{n=1}^{i} a_n t^n$, $i\geqslant 1$. 之后, Grosse-Erdmann [6] 系统研究了算子族的普适性质.

如果 $X=Y$ 且算子族 $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是由单个算子 T 迭代形成的算子列, 则容易看出超循环实际是普适性的一个特殊情形. 尽管如此, 关于超循环的许多结论都可以被推广到更一般的普适算子族的情形中. 而对于单个算子迭代形成轨道的研究, 可以利用许多工具, 如算子的谱理论等.

由于线性动力系统与数学其他众多分支的联系也极其密切, 故此方向的魅力之一便是使用观点和技巧的多样性. 复分析、函数空间理论、拓扑理论、算子理论、逼近原理、概率论以及数论等方面的知识、结论和方法在线性动力系统的研究中都起到了重要的作用.

近 40 年来, 在以 Shapiro, Montes-Rodriguez, Grosse-Erdmann, Peris 和 Bayart 等为代表的众多学者的努力下, 线性算子动力系统的研究取得了丰硕的成果. 这些成果以及线性动力系统的相关介绍都体现在 2009 和 2011 年先后出版的两部专著中, 参见文献 [9,10].

本文将对近年来关于线性动力系统方面的精彩成果和结论从五个方面作系统的梳理和回顾, 其中也包括本课题组近年来关于此方向的研究结论.

2 超循环性质与亚超循环性质

2.1 超循环性质

众所周知, 对于作用在拓扑向量空间 X 上的线性算子 T, 如果存在向量 $x\in X$, 使得集合 $\{T^nx, n\geqslant 0\}$ 在 X 中稠密, 则算子 T 是超循环的; 如果存在向量 $x\in X$, 使得投影轨道 $\{\lambda T^nx, \lambda\in\mathbb{C}, n\geqslant 0\}$ 在 X 中稠密, 则算子 T 是亚超循环的; 在弱拓扑下, 若对应的性质成立, 则称算子 T 是弱超循环的或者是弱亚超循环的. 文献 [9,10] 对超循环算子都有详尽的描述.

如果算子 T 是可逆的, 则它是超循环的当且仅当 T^{-1} 是超循环的. 设 $1\leqslant p<\infty$. 空间

$$l^p:=\left\{x=(x_n)_n\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}};\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\right\}$$

赋予范数 $\|x\|:=(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{1/p}$, 此空间是 Banach 空间. 特别地, l^2 在内积 $\langle x,y\rangle:=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$ 下是 Hilbert 空间. 另外, 类似可定义空间 $l^p(\mathbb{Z})$.

作用在复值平方求和序列空间 l^2 上的左移位算子 $\mathbb{B}$, 定义为 $\mathbb{B}(a_0,a_1,a_2,\dots)=(a_1,a_2,a_3,\dots)$. 因为左移位算子 $\mathbb{B}$ 是压缩映射, 故 $\mathbb{B}$ 本身不是超循环的. 但 Rolewicz [3] 证明了, 如果 $\mathbb{B}$ 是左移位变换, 则 $\lambda\mathbb{B}$ 是超循环的当且仅当 $|\lambda|>1$.

Rosa [11] 讨论了哪些算子是弱超循环的并且结合超循环算子的性质, 对于弱超循环算子 T, 给出了以下结论:

(i) 作用在直和空间 $l^p(\mathbb{N})\oplus l^p(\mathbb{N})$ $(1\leqslant p<\infty)$ 上的算子直和 $T\oplus T$ 不一定是弱超循环的;

(ii) 对于任意的 $n>1$, T^n 是弱超循环的;

(iii) 对于所有的 $\lambda\in C$, $|\lambda|=1$, λT 是弱超循环的.

因此, 弱超循环算子同超循环算子有许多相似的性质, 例如, 弱超循环算子的伴随同样没有特征值且其谱的每一个连通分支都与单位圆周有交集等.

Godefroy 和 Shapiro [5] 证明了在每一可分的 Banach 空间 X 上, 超循环等价于拓扑传递 (transitivity), 即对于任意的非空开集 $U,V\subseteq X$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, $T^n(U)\cap V\neq\emptyset$. Chan [12] 说明了作用在可分的无限维复 Hilbert 空间 H 上的超循环算子集在强算子拓扑下是稠密集. 而且超循环算子集的线性扩张在算子范数拓扑下是稠密的. 非超循环算子集在有界线性算子 $B(H)$ 中稠密, 但是超循环算子在 $B(H)$ 中的闭单位球的补集中不稠密. Rezai [13] 刻画了在弱拓扑下, 作用在自反 Banach 空间 X 上线性算子的拓扑传递性质; 并指出在弱拓扑下, 作用在 X 上的有界开集上的线性传递算子一定是弱超循环的. 也就是说, 若线性算子是超循环的, 则一定存在稠密的子空间, 使得其任意非零向量都是超循环向量.

Ansari [14] 证明了在所有的无限维的可分的 Banach 空间上都存在作用在上面的超循环算子. 另一方面, 超循环算子不可能作用在有限维的 Banach 空间上. 如果算子 T 是超循环的, 则任意的非零幂 T^n 也是超循环的, 参见文献 [15]. Bakkali 和 Tajmouati [16] 对作用在 Banach 空间和 Hilbert 空间上的超循环和亚超循环算子的谱作了细致的刻画.

Kitai 在 1982 年博士学位论文 [4] 中给出了判断算子是超循环的充分条件, 即超循环标准: 设 T 是作用在可分的无限维的 Fréchet 空间 X 上的有界线性算子. 假设存在严格递增的正整数序列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$, 稠密子集 X_0, Y_0 和映射 $S_{n_k}: Y_0\to X$ 使得

(i) T^{n_k} 在 X_0 上逐点地趋向于零;

(ii) S_{n_k} 在 Y_0 上逐点趋向于零;

(iii) $T^{n_k}S_{n_k}$ 在 Y_0 上逐点趋向于恒等映射,

则算子 T 是超循环的.

之后, Gether 和 Shapiro [17] 用 Baire 纲定理重新证明了超循环标准, 并对其形式作了改进. 超循环标准是用来判断一个算子是否是超循环的充分条件, 在许多空间上证明算子的超循环性发挥着巨大作用. 但是, 相当长时期内, 学者们都证明不了这个准则是否也是一个必要条件. 后来, Rosa 和 Read [18] 回答了这个难题, 他们构造了一个 Hilbert 空间上的超循环算子不满足超循环标准, 之后, Bayart 和 Matheron [19] 对上述例子作了改进. 由于这些例子中的空间都非常特殊, 于是, 常见拓扑向量空间上超循环标准是否是一个必要条件仍有待解决. 判断一个算子是否是超循环很大程度上都依赖于超循环标准, 到目前为止还没有一个充分必要条件.

Bès 和 Peris [20] 证明了作用在可分的 Fréchet 空间 X 上的有界线性算子 T 满足超循环标准当且仅当作用在直和空间 $X\oplus X$ 上的算子直和 $T\oplus T$ 是超循环的. 而且如果算子 T 满足超循环标准, 则任意 $n\in\mathbb{N}$, T^n 也满足超循环标准.

自然数集 $\mathbb{N}$ 中的子集 A 的下密度定义为

$$\underline{\mathrm{dens}}(A)=\liminf_{N\to\infty}\frac{\mathrm{card}\{0\leqslant n\leqslant N; n\in A\}}{N+1}.$$

如果存在向量 $x\in X$, 对于任意非空开集 $U\subseteq X$, 满足 $\underline{\mathrm{dens}}\{n\in\mathbb{N}, T^n x\in U\}>0$, 则称算子 T 是频繁超循环的 (frequently hypercyclic) 且向量 x 是算子 T 的频繁超循环向量.

Bayart 和 Grivaux [21] 给出了判断算子是频繁超循环的充分条件, 即频繁超循环标准: 对于作用在可分的 Banach 空间 X 上的有界线性算子, 如果存在稠密的子集 $X_0\subseteq X$ 和映射 $S: X_0\to X_0$, 对任意的 $x\in X_0$, 满足

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n x\|$ 收敛;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\|S^n x\|$ 收敛;

(iii) $TSx=x$,

则算子 T 是频繁超循环的.

文献 [22,23] 推广了频繁超循环标准. 更多关于频繁超循环性质的细节可参见文献 [9, 第 9 章].

设 $\mathbb{B}_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的 n 维单位开球, 特别地, 当 $n=1$ 时, $\mathbb{D}=\mathbb{B}_1$ 是平面中的单位圆盘. 作用在全纯函数空间 $H(\mathbb{B}_n)$ 上的复合算子 C_φ 定义为 $(C_\varphi f)(z)=(f\circ\varphi)(z)$, 这里 $H(\mathbb{B}_n)$ 表示作用在 $\mathbb{B}_n$ 上全纯函数全体且 φ 是作用在 $\mathbb{B}_n$ 上的全纯自映射. 由 $\psi\in H(\mathbb{B}_n)$ 诱导的乘算子 M_ψ 定义为 $M_\psi(f)=\psi\cdot f$, 则由 φ 和 ψ 诱导的加权复合算子 $W_{\psi,\varphi}$, 定义为 $W_{\psi,\varphi}=M_\psi C_\varphi$.

Chen 和 Zhou [24] 证明了, 如果 φ 有内部不动点 w 且 $\psi \in H(\mathbb{B}_n)$ 满足

$$|\psi(w)| < 1 < \lim_{|z|\to 1} \inf |\psi(z)|,$$

则伴随算子 $W^*_{\psi,\varphi}$ 是超循环的, 此结论推广了 Yousefi 和 Rezaei [25] 的工作.

对于拟凸域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ 和作用在 Ω 上的全纯自映射 φ, Zajac [26] 刻画了作用在 $H(\Omega)$ 上的复合算子 C_φ 的超循环性质. 而且, 在单连通域或者无穷连通域的情形下, 复合算子 C_φ 的超循环性质可以推出其是遗传超循环的 (hereditarily hypercyclic), 即 $C_\varphi \oplus C_\varphi$ 是超循环的, 可参见文献 [20].

对于作用在 $[0,1]$ 上的可测自映射 φ 和 $f \in L^p[0,1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, Volterra 型复合算子定义为

$$(V_\varphi f)(x) = \int_0^{\varphi(x)} f(t)dt$$

作用在空间 $L^p[0,1]$ 上的算子 V_φ 是可测的且是紧致的. 特别地, 若 φ 是恒等映射, 则这些算子就是经典的 Volterra 算子. Montes-Rodríguez 等学者在文献 [27] 中讨论了 Volterra 型复合算子谱的性质, 之后又在文献 [28] 中继续讨论了 Volterra 型复合算子循环和超循环的性质. 假设空间 $\mathbb{X} = C_0[0,1)$ 是赋予紧开拓扑的由固定零点的连续函数组成的 Fréchet 空间. Herzog 和 Weber [29] 证明了, 对于作用在空间 $C_0[0,1)$ 上的 Volterra 型复合算子 V_φ, 如果 $\varphi(x) = x^b$, $b \in (0,1)$, 则算子 V_φ 是超循环的. 此结果被 Montes-Rodríguez [28] 作了进一步的推广, 并给出以下完备的刻画: 对于 $\varphi \in C_0[0,1)$, 下列条件是等价的:

(i) 若对于 $x \in (0,1)$, $\varphi(x) > x$, φ 是严格递增的;

(ii) 算子 V_φ 是弱超循环的;

(iii) 算子 V_φ 是超循环的.

同时, Montes-Rodríguez 等人也证明了, 如果 φ 是作用在 $[0,1]$ 上的连续的严格递增的自映射且 $\varphi(x) < x$, $x \in (0,1]$, 则算子 V_φ 是亚超循环的且 $I + V_\varphi$ 是超循环的, 从而推广了 Salas 在文献 [30, 31] 中的结果. Shu 等人 [32] 指出, 作用在无限维可分的 Banach 空间上的任意亚超循环算子 T 的共轭集 $\{L^{-1}TL : L \text{ 是可逆的}\}$ 一定存在一个亚超循环算子路径, 使得该路径在强算子拓扑下在算子代数中稠密, 并且如果 $\sigma_p(T^*)$ 是空集, 则此算子路径的公共亚超循环向量是稠密的 G_δ 集.

设 $0 < p < \infty$, $\mathbb{B}$ 表示 $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ 中的单位球, Hardy 空间 $H^p = H^p(\mathbb{B})$ 包含所有 $f \in H(\mathbb{B})$ 满足

$$\|f\|^p_{H^p} = \sup_{0<r<1} \int_S |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) < \infty.$$

当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, H^p 在范数 $\|\cdot\|_{H^p}$ 的下是一个 Banach 空间. 文献 [33,34] 详细讨论了 Hardy 空间 H^2 上复合算子的超循环性.

假设 $\nu : \mathbb{D} \to (0,\infty)$ 是一个有界连续函数, 加权型空间和小加权型空间分别定义为

$$H^\infty_\nu = \Big\{ f \in H(\mathbb{D}), \|f\|_\nu = \sup_{z\in\mathbb{D}} \nu(z)|f(z)| < \infty \Big\},$$
$$H^\infty_{\nu,0} = \Big\{ f \in H^\infty_\nu, \lim_{|z|\to 1} \nu(z)|f(z)| = 0 \Big\}.$$

H^∞_ν 和 $H^\infty_{\nu,0}$ 在范数 $\|\cdot\|_\nu$ 的定义下都是 Banach 空间. 特别地, 当权函数为 $\nu(z) = (1-|z|^2)^\alpha$ $(\alpha > 0)$ 时, 可得到空间 H^∞_α 和 $H^\infty_{\alpha,0}$.

最近, Bonet [35] 得到了微分算子 $D: H_\nu \to H_\nu$ 是连续的当且仅当 $D: H_{\nu,0} \to H_{\nu,0}$ 是连续的, 并给出了算子 $D: H_{\nu,0} \to H_{\nu,0}$ 是超循环的一个充要条件, 参见文献 [35, 定理 2.3], 这里空间 H_ν 和 $H_{\nu,0}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的加权型解析函数空间, 参见文献 [35, 第 650 页].

由作用在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的解析函数组成的加权 Dirichlet 空间, $\mathcal{S}_v$, $v \in \mathbb{R}$, 定义为

$$\mathcal{S}_v = \left\{ f = z \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{D}) : \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (n+1)^{2v} < \infty \right\}.$$

对于任意的 $w \in \partial\mathbb{D}$ 和正实数 $0 < \alpha < 1$, 空间 $\mathrm{Lip}_\alpha(w)$ 定义为满足下列条件全纯函数的全体,

$$|u(z) - u(w)| = O(|z-w|^\alpha),$$

这里 $z \in D(w,\delta)$ 且 $D(w,\delta) = \{z \in \mathbb{D}, |z-w| < \delta\}$ 表示以 w 为心的 Carleson 圆盘.

众所周知, 单位圆盘上的分式线性变换形式为 $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, 这里 $ad - bc \neq 0$. 让 $\mathrm{LFT}(\mathbb{D})$ 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 的线性分式映射组成的集合, 其中把单位圆盘 $\mathbb{D}$ 满映到 $\mathbb{D}$ 的映射全体记成 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, 显然, $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \subset \mathrm{LFT}(\mathbb{D}) \subset S(\mathbb{D})$. 根据映射不动点的情形把映射分为三类, 参见文献 [36, 第 5 页]: (i) 抛物型: 在边界 $\partial\mathbb{D}$ 上存在不动点. (ii) 双曲型: 吸引不动点在闭单位圆盘 $\overline{\mathbb{D}}$ 内, 另一个不动点在 $\mathbb{D}$ 外. 如果另一个不动点在 $\partial\mathbb{D}$ 上当且仅当此映射是 $\mathbb{D}$ 上的自同构. (iii) 斜驶型和椭圆型: $\varphi \in \mathrm{LFT}(\mathbb{D})$ 的不动点一个在 $\mathbb{D}$ 内, 另一个在 $\overline{\mathbb{D}}$ 内.

Gallardo-Gutiérrez 和 Montes-Rodríguez [37] 研究了加权型 Dirichlet 空间 S_ν 上算子 λC_φ 的超循环性. 此后, Bernal-González 和 Bonilla [38] 进一步刻画了空间 S_ν 上算子 λC_φ 的频繁超循环性. 在此基础上, Zhang 和 Zhou [39] 讨论了作用在加权 Dirichlet 空间上加权复合算子的超循环性质, 并给出了以下结果:

定理 2.1 设 $v \leqslant 0$, φ 是抛物自同构或者双曲自同构. 如果算子 $uC_\varphi(u)$ 是幺模常值函数, 则作用在加权 Dirichlet 空间 $\mathcal{S}_v$ 上的加权复合算子 uC_φ 是超循环的.

定理 2.2 设 $v \leqslant 0$, φ 是作用在单位圆盘上双曲非自同构的线性分式自映射, 其 Denjoy-Wolff 点为 w. 假设权函数 u 在闭单位圆盘上没有零根, $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(w) \cap A(\mathbb{D})$ 且 $\|u\|_\infty = |u(w)|$, 若 $|u(w)| > \varphi'(w)^{(1-2v)/2}$, 则算子 uC_φ 是超循环的.

Miralles 和 Wolf [40] 根据 φ 的分类刻画了算子 $C_\varphi: H_{\nu,0}^\infty \to H_{\nu,0}^\infty$ 的超循环性: 假设 ν 是 $\mathbb{D}$ 上的权函数, $\varphi \in S(\mathbb{D})$. 如果算子 $C_\varphi: H_{\nu,0}^\infty \to H_{\nu,0}^\infty$ 是连续的, 则下面的结论成立:

(i) 如果 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 在 $\mathbb{D}$ 内没有不动点, 则 C_φ 是超循环的.

(ii) 如果 $\varphi \in \mathrm{LFT}(\mathbb{D})$ 是一个双曲非自同构, 则 C_φ 是超循环的.

(iii) 假设权函数 $\nu(z) = (1-|z|^2)^\alpha$, 这里 $\alpha \leqslant 1$, $z \in \mathbb{D}$. 如果 $\varphi \in \mathrm{LFT}(\mathbb{D})$ 是一个抛物非自同构, 则 C_φ 不是超循环的.

之后, Liang 和 Zhou [41] 讨论了算子 $\lambda C_\varphi: H_{\alpha,0}^\infty \to H_{\alpha,0}^\infty$ 的超循环性, 并给出了下列几个结果:

定理 2.3 假设 $\varphi \in S(\mathbb{D})$ 是一个双曲非自同构映射且 η 是 φ 的边界不动点, 则 λC_φ 在空间 $H_{\alpha,0}^\infty$ 是超循环的当且仅当 $|\lambda| > \varphi'(\eta)^\alpha$.

定理 2.4 假设 φ 是单位圆盘上的抛物自同构, 则 λC_φ 在空间 $H_{\alpha,0}^\infty$ 是超循环的当且仅当 $|\lambda| = 1$.

定理 2.5 假设 φ 是单位圆盘上双曲自同构且 η 是 φ 的吸引不动点, 则 λC_φ 是超循环的当且仅当 $\varphi'(\eta)^\alpha < |\lambda| < \varphi'(\eta)^{-\alpha}$.

符号 $\mathcal{K}$ 表示一个复的可分 Hilbert 空间且 $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ 是空间 $\mathcal{K}$ 的一组标准正交基, 定义下面两个

可分空间:

$$L^2(\mathbb{Z},\mathcal{K}) := \left\{x = (\ldots, x_{-1}, [x_0], x_1, \ldots) : x_i \in \mathcal{K} \text{ 且 } \sum_{i\in\mathbb{Z}} \|x_i\|^2 < \infty\right\},$$
$$L^2(\mathbb{N},\mathcal{K}) := \left\{x = ([x_1], x_2, \ldots) : x_i \in \mathcal{K} \text{ 且 } \sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|^2 < \infty\right\}.$$

假设 $\{A_n\}$ ($n \in \mathbb{Z}$ 或 $n \in \mathbb{N}$) 是空间 $\mathcal{K}$ 上一致有界、可逆对角正算子序列. 显然, 空间 $L^2(\mathbb{N},\mathcal{K})$ 上向前的单侧加权移位算子不是超循环的, 因此只需要考虑空间 $L^2(\mathbb{N},\mathcal{K})$ 上向后的单侧加权移位算子, $T([x_1], x_2, \ldots) = ([A_1x_2], A_2x_3, \ldots)$, 这里 $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in L^2(\mathbb{N},\mathcal{K})$. 类似地, 设 T 是空间 $L^2(\mathbb{Z},\mathcal{K})$ 上向前的双侧加权移位算子, 即

$$T(\ldots, x_{-1}, [x_0], x_1, \ldots) = (\ldots, A_{-2}x_{-2}, [A_{-1}x_{-1}], A_0x_0, \ldots), \quad x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}.$$

假设 $T \in L(X)$, (m_k) 是一列非负整数序列. 如果对于正整数序列 (m_k) 的所有子列 (m_{k_j}), 算子序列 $\{T^{m_{k_j}}\}_{j\geqslant 1}$ 都是超循环的, 则算子 T 关于序列 (m_k) 是遗传超循环的 (hereditarily hypercyclic). 如果一个算子 T 关于某个序列 (m_k) 是遗传超循环的, 则称该算子 T 为遗传超循环的.

Liang 和 Zhou [42] 在文献 [43] 研究的基础上刻画了加权移位算子的遗传超循环和亚超循环性质, 并给出了以下结论:

定理 2.6　假设 T 是空间 $X = L^2(\mathbb{N},\mathcal{K})$ 上单侧算子权移位, 权序列是 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 这里 $\{A_n\}$ 是空间 $\mathcal{K}$ 上一致有界、可逆对角正算子序列, 则 $\{T^{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ 是超循环的当且仅当对于任意 $\epsilon > 0$ 和 $q \in \mathbb{N}$ 存在充分大 $m = m(\epsilon, q) \in (n_k)$ 满足

$$\left\|\prod_{s=0}^{m-1} A_{j+s}^{-1}\right\| < \epsilon, \quad 1 \leqslant j \leqslant q. \tag{2.1}$$

定理 2.7　假设 T 是空间 $L^2(\mathbb{Z},\mathcal{K})$ 上一个向前的双侧算子权移位, 它的权序列是 $\{A_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, 这里 $\{A_n\}$ 是空间 $\mathcal{K}$ 上一致有界、可逆对角正算子序列. 假设 $(m_k) \subset \mathbb{N}$, 则下面结论等价:

(i) $\{T^{m_k}\}_{k\geqslant 1}$ 是超循环的;

(ii) 对于任意 $\epsilon > 0$ 和 $q \in \mathbb{N}$, 存在充分大 $m = m(\epsilon, q) \in (m_k)$ 使得对于所有 $|j| \leqslant q$, 成立

$$\begin{cases} \left\|\prod_{s=0}^{m-1} A_{j+s}\right\| < \epsilon, \\ \left\|\prod_{s=1}^{m} A_{j-s}^{-1}\right\| < \epsilon; \end{cases} \tag{2.2}$$

(iii) T 关于 (m_k) 的子序列 (n_k) 满足超循环标准.

定理 2.8　假设 T 是空间 $L^2(\mathbb{N},\mathcal{K})$ 上向后的单侧算子权移位, 其中权序列为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 这里 $\{A_n\}$ 是空间 $\mathcal{K}$ 上一致有界、可逆对角正算子序列. 假设 $(n_k) \subset \mathbb{N}$, 则下面结论等价:

(i) T 关于序列 (n_k) 是遗传超循环的;

(ii) 对于任意 $\epsilon > 0$ 和 $q \in \mathbb{N}$, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$ 满足对于所有 $k \geqslant k_0$ 和 $1 \leqslant j \leqslant q$, 成立

$$\left\|\prod_{s=0}^{n_k-1} A_{j+s}^{-1}\right\| < \epsilon. \tag{2.3}$$

定理 2.9 假设 T 是空间 $L^2(\mathbb{Z},\mathcal{K})$ 上向前的双侧算子权移位, 权序列为 $\{A_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, 这里 $\{A_n\}$ 是 $\mathcal{K}$ 上一致有界、可逆对角正算子序列并且 $\{A_n^{-1}\}$ 也是一致有界的序列. 记

$$M := \max\Big\{\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|A_n\|, \sup_{n\in\mathbb{Z}}\|A_n^{-1}\|\Big\}.$$

假设 $(n_k)\subset\mathbb{N}$, 则下面结论等价:

(i) T 关于序列 (n_k) 是遗传超循环的;

(ii) 对于任意 $\epsilon>0$ 和 $q\in\mathbb{N}$, 存在 $k_0\in\mathbb{N}$ 满足对于所有 $k\geqslant k_0$ 和 $|j|\leqslant q$, 成立

$$\begin{cases} \left\|\prod_{s=0}^{n_k-1} A_{j+s}\right\| < \epsilon, \\ \left\|\prod_{s=1}^{n_k} A_{j-s}^{-1}\right\| < \epsilon; \end{cases} \tag{2.4}$$

(iii) 对于所有 $j\in\mathbb{Z}$, 成立

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\prod_{s=0}^{j+n_k-1} A_s\right\| = 0, \tag{2.5}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\prod_{s=1}^{j+n_k} A_{-s}^{-1}\right\| = 0. \tag{2.6}$$

2.2 亚超循环性质

亚超循环算子的定义和性质由 Hilden 和 Wallen 在文献 [44] 中首次引入和介绍. 他们证明了作用在 Hilbert 空间上的所有单边加权左移位算子都是亚超循环的. 近年来, 亚超循环算子的研究取得了较大的进展. 其中, Salas 在文献 [31] 里刻画了亚超循环的双边加权左移位算子, 并给出了其算子是亚超循环的充要条件. Montes 和 Salas [45] 进一步研究了亚超循环标准并且给出了与 Salas 的标准等价的条件. 其他关于亚超循环标准的研究可参见文献 [46, 47].

Chan 和 Sanders [48] 引入了算子路径的概念且在文献 [49] 中研究了酉轨道 $\mathbb{U}(T)=\{U^*TU: U\in B(H)$ 是酉矩阵$\}$. 他们证明了, 如果算子 T 是超循环的, 则酉轨道 $\mathbb{U}(T)$ 包含一个算子路径使其闭包在强算子拓扑下包含整个酉轨道, 且此路径的公共的超循环向量集合是稠密的 G_δ 集. 关于公共超循环向量的其他工作包含在文献 [50–55] 中.

Chan 和 Sanders [56] 给出了对于一个算子路径, 公共的亚超循环向量是稠密 G_δ 集的充分条件且显示了路径中的每一个算子都满足文献 [31] 的亚超循环标准. 对于算子 T, 一个超循环 (或亚超循环) 子空间是指, 存在 X 中一个无限维的闭子空间 M, 使得对于 M 中任意非零向量都是超循环 (或亚超循环) 向量. Bayart [52] 证明了在一个强的超循环的条件下, 不可数个超循环算子存在公共的超循环子空间. 类似的结果可参见文献 [54, 57, 58].

在公共的超循环向量结构研究的基础上, Zhang 和 Zhou [59] 继续讨论了公共的亚超循环向量的结构, 并给出了以下结论:

定理 2.10 设 H 表示无限维可分的复 Hilbert 空间, 有界线性算子 $T\in B(H)$ 是亚超循环的且 $\sigma_p(T^*)=\emptyset$, 那么, 存在完全包含于酉轨道 $\mathbb{U}(T)$ 中的算子路径 $\{F_t\in B(H): t\in[0,\infty)\}$ 使得它的强算子闭包包含 $\mathbb{U}(T)$ 且公共的亚超循环向量集合 $\bigcap_{t\in[0,\infty)}\mathrm{SC}(F_t)$ 是稠密的 G_δ 集.

定理 2.11　设算子 $T_{l,j}$ $(l,j\in\mathbb{N})$ 是作用在可分的无限维 Banach 空间 X 上的有界线性算子. 对于每一个 $l\in\mathbb{N}$, 存在一列递增的正整数序列 $\{n_{l,k}\}_k$, 满足

(i) 关于数列 $\{n_{l,k}\}_k$, 算子列 $\{T_{l,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是遗传稠密普适的;

(ii) 在 X 中, 存在一列不增的无限维闭子空间 $\{M_k\}_k$ 满足

$$\sup_{k\geqslant 1,l\leqslant k}\|\mathrm{T}_{l,n_{l,k}}\mid_{M_k}\|<\infty,$$

那么, 存在无限维闭子空间 $X_1\subseteq X$ 使得对于任意非零向量 $x\in X_1$ 和任意的 $l\in\mathbb{N}$, $\{T_{l,k}x\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在空间 X 中稠密, 即 X_1 是公共的普适子空间.

定理 2.12　设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是一个区间且 $\{T_{t,n}\}_{t\in I,n\in\mathbb{N}}$ 是作用在可分的有连续范数的 Fréchet 空间 X 上的可交换的有界线性算子族. 假定对于任意的紧子区间 $K\subseteq I$, 存在稠密集 X_0 和映射 $S_{t,n}:X_0\to X$, $n\geqslant 0$, $t\in K$, 使得对于任意的 $x\in X_0$, 有

(i) 对于 $j\geqslant 0$ 和 K 中的 $t\geqslant\mu_0\geqslant\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_j$, $\sum_{i=0}^{j}T_{t,j}S_{j-i}(\mu_i)x$ 一致无条件收敛;

(ii) 对于 $j\geqslant 0$ 和 K 中的 $t\geqslant\mu_0\geqslant\mu_1\geqslant\cdots$, $\sum_{i=0}^{\infty}T_{t,j}S_{j+i}(\mu_i)x$ 一致无条件收敛;

(iii) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在某个 $\delta>0$ 使得对于任意的 $i\geqslant 1$ 和任意的 $t,\mu\in K$, 满足如果 $0\leqslant\mu-t<\frac{\delta}{i}$, 则 $\|T_{t,i}S_{\mu,i}x-x\|<\varepsilon$;

(iv) 对于任意的 $t\in K$, 随着 $i\to\infty$, $T_{t,i}x$ 一致趋向于 0;

(v) 存在无限维的闭子空间 $M_0\subseteq X$ 使得对于所有的 $x\in M_0$, $t\in I$, 满足随着 $i\to\infty$, $T_{t,i}x\to 0$,

那么, 算子族 $\{T_{t,n}\}_{t\in I,n\in\mathbb{N}}$ 有公共的普适子空间.

3　(半) 群、局部紧群和算子 n 元组

3.1　(半) 群和局部紧群

设 $\mathbb{K}$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 或者复数域 $\mathbb{C}$, G 为 $\mathbb{K}$ 上 n 阶方阵全体 $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 中的子半群. 如果存在向量 $v\in\mathbb{K}^n$, 使得半群 G 在向量 v 下的轨道 $G(v):=\{Av:A\in G\}\subseteq\mathbb{K}^n$ 在 $\mathbb{K}^n$ 中稠密, 则称半群 G 是超循环的; 如果存在向量 $v\in\mathbb{K}^n$, 使得 $\{\lambda Av:A\in G,\lambda\in\mathbb{K}\}$ 在 $\mathbb{K}^n$ 中稠密, 则称半群 G 是亚超循环的. Javaheri [60] 讨论了有限元生成的算子半群的超循环性质, 并给出了具体的例子, 即存在 $n\times n$ 矩阵 A 和 B, 使得对于半群映射 $\langle A,B\rangle$ 在任意列向量下的轨道在 $\mathbb{K}^n$ 中是稠密的. 而且, Ayadi [61] 证明了, 在 $\mathbb{C}^n$ 上形成超循环 Abel 半群的矩阵生成元的最小个数是 $n+1$, 由任意有限矩阵元生成的 Abel 半群映射不是 k- 传递的, 这里 $k\geqslant 2$, 此问题由 Feldman 和 Javaheri [62] 提出.

一个算子 n 元组 $T=(T_1,T_2,\dots,T_n)$ 表示的是, 作用在局部凸空间 E 上的长度为 n 的可交换连续线性算子的有限算子序列. 在 $\mathbb{C}^n$ 上, Feldman [63] 证明了存在超循环的对角矩阵 $n+1$ 元组, 但是不存在超循环的对角矩阵 n 元组. 另外, Shkarin [64] 指出在 $\mathbb{C}^n$ 上, 满足算子元组是超循环的最小基数是 $n+1$, 而在 $\mathbb{R}^n$ 上时, 满足算子元组是超循环的最小基数是 $\frac{n}{2}+\frac{5+(-1)^n}{4}$.

对于有界线性算子 $T:X\to X$, 如果对于 X 中的任意非空开集 U 和 V, 存在某个 $N\geqslant 0$, 对于所有的 $n\geqslant N$, 有 $T^n(U)\cap V\neq\emptyset$, 则算子 T 是混合的 (mixing). Bermúdez 等人 [65] 刻画了作用在 Banach 空间上的算子的超循环性、拓扑混合性和混沌性质. 作用在任意拓扑向量空间 X 上的超循环算子一定是拓扑传递的, 如果底空间 X 是完备的可度量化的拓扑向量空间, 则逆命题也是成立的, 即任意的拓扑传递算子也是超循环算子.

Bernal 和 Grosse-Erdmann [66] 研究了作用在 Banach 空间上的强算子半群超循环的存在性. Albanese 等人[67] 讨论了强算子半群的动力性质从 Banach 空间推广到 Fréchet 空间的条件. 在 Banach 空间 X 上的每一个范数连续的算子半群都有一个无限生成元, 该生成元是作用在 X 上的连续线性算子, 而此结论在 Fréchet 空间上是不成立的. Bayart [68] 证明了存在超循环的强连续算子群使得该群中包含非超循环的算子. 在线性算子动力系统中, 存在超循环的算子族, 使得该算子族不存在公共的超循环向量, 可参见文献 [69]. Ayadi 等学者在文献 [70] 中对 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 中具有 (局部) 稠密轨道的 Abel 子半群进行了完备的刻画; 在文献 [71] 中讨论了超循环的 Abel 仿射群. 而对于有限元生成的群, 此刻画是具体的. 特别地, 在 $\mathbb{C}^n$ 上由任意 n 个仿射映射生成的 Abel 群都没有稠密的轨道.

假设 ρ 是一个容许权函数, $\Delta=\Delta(\alpha):=\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}: r\geqslant 0, |\theta|\leqslant\alpha\}$, $0<\alpha\leqslant\pi/2$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个扇形区域, 以及蜕化情形 $\Delta=\mathbb{R}_0^+,\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 对于 $1\leqslant p<\infty$, 定义空间

$$L^p_\rho(\Delta)=\{u:\Delta\to\mathbb{C}:\ u \text{ 可测且有 } \|u\|_p<\infty\}$$

和空间

$$C_{0,\rho}(\Delta):=\Big\{u:\Delta\to\mathbb{C}: u \text{ 连续且 } \lim_{\tau\to\infty}u(\tau)\rho(\tau)=0\Big\},$$

其中 $\|u\|_p:=(\int_\Delta |u(\tau)|^p\rho(\tau)d\tau)^{1/p}$, $\|u\|_\infty=\sup_{\tau\in\Delta}|u(\tau)|\rho(\tau)$.

在 Conejero 和 Peris [72,73] 的工作以及 Desch 等学者在文献 [74] 研究的基础上, Liang 和 Zhou [75] 讨论了复扇形区域上平移算子半群的亚超循环性质, 并给出了下面结论:

定理 3.1 假设 $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ 是一个平移算子半群.

(i) 如果 $\Delta\neq\mathbb{R}_0^+,\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 则 $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ 是亚超循环的;

(ii) 如果 $\Delta=\mathbb{C}$, 则 $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ 是亚超循环的当且仅当对于每一个 $\theta\in\mathbb{C}$, 都存在趋于 ∞ 的序列 $\{t_k\}_k\subset\mathbb{C}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\rho(\theta+t_k)\rho(\theta-t_k)=0.$$

3.2 算子 n 元组

Yousefi 和 Moghimi [76] 讨论了算子元组是遗传超循环的充分必要条件.

一个 n 元算子元组是指作用于无限维可分 Banach 空间 X 上的由 n 个可交换连续线性算子 $T_1,T_2,\dots,T_n$ 组成的有限序列. 如果 $T=(T_1,T_2,\dots,T_n)$ 是一个 n 元算子元组, 则记

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}_T=\{T_1^{k_1}T_2^{k_2}\cdots T_n^{k_n}: k_i\geqslant 0, i=1,2,\dots,n\}$$

是由算子元组 T 生成的半群. 对于任意 $x\in X$, x 在算子元组 T 下的轨道为 $\mathrm{orb}(T,x)=\{Sx: S\in\mathcal{F}\}$. 如果轨道 $\mathrm{orb}(T,x)$ 在空间 X 中是稠密的, 则向量 $x\in X$ 称为算子元组 T 的超循环向量, 此时算子元组 T 称作是超循环的. 类似地, 如果轨道 $\mathbb{C}\mathrm{orb}(T,x)$ 在空间 X 中是稠密的, 则向量 $x\in X$ 称为算子元组 T 的亚超循环向量, 此时算子元组 T 称作是亚超循环的. 显然, 当 $n=1$ 时, 算子元组 T 变成单个算子.

考虑算子元组 $T=(T_1,T_2)$ 为一对可交换的连续线性算子, 仍记 $\mathcal{F}=\{T_1^{k_1}T_2^{k_2}: k_i\geqslant 0, i=1,2\}$. 假设 $x\in X$, 则 x 在算子元组 T 下的轨道为

$$\mathrm{orb}(T,x)=\{Sx: S\in\mathcal{F}\}=\{T_1^{k_1}T_2^{k_2}x: k_i\geqslant 0, i=1,2\}.$$

记号 T_d^2 表示为

$$T_d^2 = \{S_1 \oplus S_2 : S_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2\} = \{T_1^{k_1} T_2^{k_2} \oplus T_1^{k_3} T_2^{k_4} : k_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3, 4\}.$$

如果存在 $x_1, x_2 \in X$ 使得 $\{W(x_1 \oplus x_2) : W \in T_d^2\}$ 在 $X \oplus X$ 中是稠密的, 则 T_d^2 称为是超循环的. 类似地, 如果存在 $x_1, x_2 \in X$ 使得 $\mathbb{C}\{W(x_1 \oplus x_2) : W \in T_d^2\}$ 在 $X \oplus X$ 中是稠密的, 则 T_d^2 是亚超循环的. 符号 $\mathcal{H}$ 表示由 $\mathbb{D}$ 上解析函数组成的无限维可分的 Hilbert 空间.

假设 $\omega \in M(\mathcal{H})$, φ 是 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 的解析自映射且满足对于任意 $f \in \mathcal{H}$ 均有 $f \circ \varphi \in \mathcal{H}$, 则由闭图像定理得到加权复合算子 $C_{\omega,\varphi}$: $C_{\omega,\varphi}(f)(z) = M_\omega C_\varphi(f)(z) = \omega(z) f(\varphi(z))$ 是有界的. 映射 φ 称为诱导映射, ω 称为权. Soltani [77] 给出了共轭算子对 $(C^*_{\omega_1,\varphi_1}, C^*_{\omega_2,\varphi_2})$ 在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 是超循环的充分条件. 此外, 在 $M_{\omega_1} C_\varphi M_{\omega_2} C_\varphi = M_{\omega_2} C_\varphi M_{\omega_1} C_\varphi$ 的前提下, Yousefi [78] 给出了 $((M_{\omega_1} C_\varphi)^*, (M_{\omega_2} C_\varphi)^*)$ 满足亚超循环标准的充分条件.

假设对于所有 $z \in \mathbb{D}$, $\omega_1(z)$ 和 $\omega_2(z)$ 都是非零的且 φ_1 和 φ_2 满足

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1, \quad \omega_1 = \omega_1 \circ \varphi_2, \quad \omega_2 = \omega_2 \circ \varphi_1. \tag{3.1}$$

定义四个集合 A, B, C 和 D 如下:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{D} : \text{序列} \left\{ \prod_{j=0}^{n-1} (\omega_1 \circ (\varphi_1)_j(z) \cdot \omega_2 \circ (\varphi_2)_j(z)) \right\}_n \text{是有界的} \right\},$$

$$B = \left\{ z \in \mathbb{D} : \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} (\omega_1 \circ (\varphi_1)_{-j}(z) \cdot \omega_2 \circ (\varphi_2)_{-j}(z))^{-1} = 0 \right\},$$

$$C = \left\{ z \in \mathbb{D} : \lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n-1} (\omega_1 \circ (\varphi_1)_j(z) \cdot \omega_2 \circ (\varphi_2)_j(z)) = 0 \right\},$$

$$D = \left\{ z \in \mathbb{D} : \text{序列} \left\{ \prod_{j=1}^{n} (\omega_1 \circ (\varphi_1)_{-j}(z) \cdot \omega_2 \circ (\varphi_2)_{-j}(z))^{-1} \right\}_n \text{是有界的} \right\}.$$

Liang 和 Zhou [79] 讨论了作用在 Hilbert 空间上共轭复合算子元组的亚超循环性质, 并给出了以下的结论:

定理 3.2 假设非零复值函数 $\omega_1(z), \omega_2(z)$ 和单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上两个自同构 $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ 都满足 (3.1) 并成立

$$M := \sup_{z\in\mathbb{D}} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \| k_{(\varphi_1)_n \circ (\varphi_2)_n(z)} \| < \infty. \tag{3.2}$$

如果下面任何一个条件成立:

(i) 集合 A 和 B 在 $\mathbb{D}$ 中有极限点;

(ii) 集合 C 和 D 在 $\mathbb{D}$ 中有极限点,

则 $(C^*_{\omega_1,\varphi_1}, C^*_{\omega_2,\varphi_2})$ 在 $\mathcal{H}$ 上是亚超循环的. 此外, T_d^2 在 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上是亚超循环的.

定理 3.3 设 $\mathcal{H}$ 是自同构不变空间, 非零复值函数 $\omega_1(z), \omega_2(z)$ 和在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内有不动点 a 的两个椭圆自同构 $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ 都满足 (3.1). 此外, $\omega_1, \omega_2 : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 满足不等式 $|\omega_1(a)\omega_2(a)| < 1$ 且存在 $0 < \delta < 1$ 满足对于任意 $|z| > 1 - \delta$ 成立 $|\omega_1(z)\omega_2(z)| \geqslant 1$, 于是, 算子元组 $(C^*_{\omega_1,\varphi_1}, C^*_{\omega_2,\varphi_2})$ 在 $\mathcal{H}$ 上是亚超循环的. 此外, T_d^2 在 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上也是亚超循环的.

4 拓扑传递和混沌性质

Grosse-Erdmann [6] 将超循环性质与拓扑传递的概念紧密联系起来. Costakis 和 Sambarino [80] 证明了, 如果 T^n 满足超循环标准, 则算子 T 是混合的, 即对于空间 X 中的任意非空开集 U 和 V, 存在某个 $N \geqslant 0$, 对于所有的 $n \geqslant N$, 有 $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Shkarin [81] 证明了, 作用在赋予弱拓扑的拓扑向量空间上的连续线性算子是混合的充分必要条件是相应的对偶算子没有有限维的不变的子空间. 之后, Shkarin [82] 刻画了存在混合的强连续算子群的拓扑向量空间类, 证明了存在一类拓扑向量空间, 使得该空间不存在亚超循环的强连续算子半群.

对于无限维可分的复 Hilbert 空间 H, 算子代数 $B(H)$ 是指从 H 到 H 的所有有界线性算子的全体. 对于 Hilbert 空间 H 中的基 $\{e_i\}$ 和 $A \in B(H)$, $\|A\|_2 = [\sum_{i=1}^{\infty} \|Ae_i\|^2]^{\frac{1}{2}}$, 这与基的选取无关. 如果 $\|A\|_2 < \infty$, 则算子 A 称为 Hilbert-Schmidt 算子. 作用在 Hilbert 空间 H 上的 Hilbert-Schmidt 算子的全体表示为 $B_2(H)$. Martínez-Giménez 和 Peris [83] 证明了, 算子 $T \in B(H)$ 满足超循环标准 (或者, 是混沌的) 等价于对应的左乘算子在强算子拓扑下是超循环的 (或者, 是混沌的). 在此基础上, Zhang 和 Dong [84] 进一步讨论了相关性质, 并给出了下列结论:

定理 4.1 如果算子 T 关于可连接序列 $(n_k)_k$ 满足超循环标准, 则左乘算子 L_T 在 $B(H)$ 的强算子拓扑下是混合的.

定理 4.2 对于作用在 ℓ^2 上的加权左移位算子 T 和对应的左乘算子 L_T, 则下面条件等价:

(i) 算子 T 关于某个可连接序列满足超循环标准;

(ii) 左乘算子 L_T 在 $B(H)$ 的强算子拓扑下是混合的;

(iii) 左乘算子 L_T 在 $B_2(H)$ 的 $\|\cdot\|_2$ 范数拓扑下是混合的;

(iv) 对于任意的非空强算子拓扑下开集 $U, W \subset H$ 且 W 包含 0, 则回归集 $N_{L_T}(U,W)$ 和 $N_{L_T}(W,U)$ 是上有限的.

定理 4.3 对于作用在 ℓ^2 上的加权左移位算子 T, 则下列条件等价:

(i) 算子 T 关于某个可连接序列满足超循环标准;

(ii) 对于 H 中的任意非空开集 U, V 和包含零的领域 W, 回归集 $N_T(U,W)$ 和 $N_T(W,V)$ 是上有限的.

对于作用在拓扑向量空间 X 上的连续线性算子 T, 如果存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $T^n x = x$, 则称 x 是 T 的周期点. 众所周知, 如果对于作用在拓扑向量空间 X 上的线性算子 T, 存在向量 $x \in X$ 使得轨道 $\mathrm{orb}(T,x)$ 的线性扩张在 X 上稠密, 则算子 T 是循环的 (cyclic); 作用在有限维空间上的许多算子是循环的但是不存在超循环算子. 如果算子是超循环的且有稠密的周期点, 则该算子是混沌的. Godefroy 和 Shapiro [5] 证明了, 作用在 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 上的解析函数组成的 Fréchet 空间上的任意一个算子 T, 只要其与所有的平移算子可交换但又不与数乘恒等算子可交换, 则 T 一定是混沌的. Rezaei [85] 讨论了作用在单位圆盘上的全纯函数空间 $H(\mathbb{D})$ 上的加权复合算子的动力学性质, 即如果对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ 且 φ 在单位圆盘内没有不动点, 则加权复合算子 λC_φ 是混沌的.

对于超循环算子 T, 其共轭集合 $C(T) = \{L^{-1}TL : \text{是可逆的}\}$ 中的所有算子都是超循环的, 且此超循环集合在强算子拓扑下在有界线性算子代数中稠密. Chan 和 Saunders [48] 证明了, 作用在可分的无限维 Banach 空间上的任意超循环算子的共轭集合都包含一个算子路径, 使得此路径在强算子拓扑下在算子代数中稠密且整个路径的公共的超循环向量集合是一个稠密的 G_δ 集. 之后, Chan 和 Sanders [86] 进一步证明了, 在无限维 Hilbert 空间上, 存在一个混沌算子路径使得该路径在强算子拓扑下在算子代数中稠密, 且此路径上的所有算子的公共的超循环向量集合也是一个稠密的 G_δ 集.

对于度量空间 (X,d) 和映射 $f:X\to X$, 如果存在不可数集 $\Gamma\subseteq X$ 使得对于任意不同的 $x,y\in\Gamma$, 满足

$$\liminf_{n} d(f^nx,f^ny)=0,\quad \limsup_{n} d(f^nx,f^ny)>0, \tag{4.1}$$

则称映射 f 是 Li-Yorke 混沌的, 这里的不可数集 Γ 称为 scrambled 集.

如果存在 $\varepsilon>0$ 和不可数集 $\Gamma_\varepsilon\subseteq X$ 使得对于任意不同的 $x,y\in\Gamma_\varepsilon$, 满足

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k:d(f^kx,f^ky)<\varepsilon,0\leqslant k<n\}|=0, \tag{4.2}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k:d(f^kx,f^ky)<\varepsilon,0\leqslant k<n\}|=1, \tag{4.3}$$

则称映射 f 是 distributionally 混沌的, 这里的不可数集 Γ_ε 称为 distributionally ε-scrambled 集, 参见文献 [87]. 作用在 Fréchet 空间 X 上任意超循环算子在任意平移不变的度量下是 Li-Yorke 混沌的. 在每一个无限维可分的 Banach 空间上都存在作用在上面的 distributionally 混沌算子并且是超循环的. Martínez-Giménez 等人在文献 [87] 中说明了在无限维矩阵组成的 Köthe 空间上存在一致 distributionally 混沌的但不是超循环的左移位算子; 之后, 他们又在文献 [88] 中证明了超循环和混合性质都不是 distributional 混沌的充分条件.

众所周知, 对于作用在复 Banach 空间上超循环算子 T, $|\lambda|=1$, 算子 λT 也是超循环的, 但 Bayart 和 Bermúdez [89] 证明了在可分的 Hilbert 空间上存在混沌算子 T, 而 λT, $|\lambda|=1$ 却不是混沌的. Desch 等学者在文献 [74] 中给出了作用在 Banach 空间上的强连续算子半群是混沌的充分条件, 并且用此结论讨论了常系数微分方程的解半群的动力学性质.

5 子空间超循环性质

Madore 和 Martínez-Avendaño 在文献 [90] 中引入了子空间超循环的概念. 算子 $T\in B(X)$ 且 M 是 X 中的非零子空间. 对于子空间 M, 如果存在 $x\in X$ 使得 $\mathrm{orb}(T,x)\cap M$ 在 M 中稠密, 则称算子 T 是子空间超循环的, 称 x 是子空间超循环向量; 类似地, 如果存在 $x\in X$ 使得 $\mathbb{C}\mathrm{orb}(T,x)\cap M$ 在 M 中稠密, 则称算子 T 是子空间亚超循环的, 称 x 是子空间亚超循环向量. 同时, 他们也给出了许多类似超循环的结论. 例如, 存在类似的 Kitai 标准: 如果算子 T 是子空间超循环的, 则算子的谱与单位圆周有交集; 子空间超循环算子只可能作用在严格的无穷维的可分的空间里; 紧算子和次正规算子一定不是子空间超循环的. 并且他们给出了判断算子是子空间超循环的子空间超循环标准, 同时构造了一个算子是子空间超循环但不是超循环的.

另外, Le [91] 优化了 Kitai-like 标准, 证明了如果算子 T 满足比超循环标准更强一点的条件, 则对于任意有限余维数的子空间, 此算子都是子空间超循环的. Rezai [92] 证明了对于子空间超循环算子 T 和任意实 (复) 多项式 P, 算子 $P(T)$ 也有相对稠密的值域, 也提出了许多轨道空间稠密性的问题. 之后, Jiménez-Munguía 等学者在文献 [93] 中举例说明了存在子空间超循环算子 T, 其轨道是某处稠密但不是处处稠密的. 关于子空间超循环和子空间亚超循环的其他例子和性质, 可参见文献 [94,95].

类似地, 对于子空间亚超循环算子, Zhao 等人 [96] 给出了一个子空间亚超循环标准, 且对于一个有界线性算子的路径, 给出了有稠密的公共子空间超循环向量和公共的子空间亚超循环向量的充要条件. 同时, 他们也构造了一个算子使得此子空间亚超循环的现象不一定只存在于无限维空间里, 证明了存在子空间亚超循环的但不是亚超循环的算子. Bayart 和 Matheron 在专著 [10] 的定理 1.12 中证

明了, 如果算子 T 是可逆的, 则 T 是亚超循环的当且仅当逆算子 T^{-1} 是亚超循环的. 而且, 如果算子 $T \in B(X)$ 是亚超循环的, 则存在 $R \geqslant 0$ 使得圆周 $\{|z| = R\}$ 与算子 T 的谱的每一个连通分支都有交集. 圆周 $\{|z| = R\}$ 称作算子 T 的亚超循环环, 可参见文献 [10, 定理 1.24].

在关于子空间超循环算子研究的基础上, Zhang 和 Zhou [97] 讨论子空间亚超循环算子的性质并给出了以下结果:

定理 5.1 设 $T \in B(\mathcal{H})$ 且 M 是空间 X 中的约化子空间. 如果算子 T 关于子空间 M 是子空间亚超循环的, 则要么对于所有的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\ker(T^* - \lambda) \subseteq M^{\perp}$, 要么对于某一个 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\ker(T^* - \lambda) \subseteq M$. 特别地, 对于所有的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $p \in \mathbb{N}$, $\ker(T^* - \lambda) = \ker(T^* - \lambda)^p$.

定理 5.2 设 $T \in B(X)$ 且 M 是空间 X 中的非零子空间, 则下面的条件等价:

(1) 算子 T 满足子空间亚超循环标准.

(2) (外子空间亚超循环标准) 存在递增的正整数序列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, 稠密的线性子空间 $Y_0 \subseteq M$, 对于任意的 $y \in Y_0$, 稠密的线性子空间 $X_y \subseteq M$, 满足

(i) 存在一列映射 $S_{n_k} : Y_0 \to M$ 使得对于任意的 $y \in Y_0$, $(T^{n_k} \circ S_{n_k})y \to y$;

(ii) 对于任意的 $y \in Y_0$ 和 $x \in X_y$, $\|T^{n_k}x\|\|S_{n_k}y\| \to 0$;

(iii) 对于所有的 $k \in \mathbb{N}$, M 是 T^{n_k} 的不变子空间.

(3) (内子空间亚超循环标准) 存在递增的正整数序列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, 稠密的线性子空间 $Y_0 \subseteq M$, 对于任意的 $y \in Y_0$, 稠密的线性子空间 $X_y \subseteq M$, 满足

(i) 存在一列映射 $S_{y,n_k} : X_y \to M$ 使得对于任意的 $x \in X_y$, $T^{n_k} \circ S_{y,n_k}x \to x$;

(ii) 对于任意的 $y \in Y_0$ 和 $x \in X_y$, $\|T^{n_k}y\|\|S_{y,n_k}x\| \to 0$;

(iii) 对于所有的 $k \in \mathbb{N}$, M 是 T^{n_k} 的不变子空间.

定理 5.3 设 $T \in B(X)$ 且 M 是空间 X 中的非零闭子空间. 假设存在 M 的子集 X_0 和 Y_0, 递增的正整数序列 $(n_k)_k$, $(\lambda_{n_k})_k \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 其中 Y_0 在 M 稠密, 使得下列条件成立:

(i) 对所有的 $x \in X_0$, $\lambda_{n_k}T^{n_k}x \to 0$;

(ii) 对于任意的 $y \in Y_0$, 存在 X_0 中的序列 $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ 且

$$\frac{1}{\lambda_{n_k}}x_k \to 0, \quad T^{n_k}x_k \to y;$$

(iii) $X_0 \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} T^{-n_k}(\frac{1}{\lambda_{n_k}}M)$,

则算子 T 对于子空间 M 是子空间亚超循环的.

6 不交超循环与不交亚超循环性质

不交的超循环算子 (disjointness of hypercyclic operators) 在 2007 年由 Bernal-González [98] 以及 Bès 和 Peris [99] 分别同时引入, 表示作用于同一空间上的多个算子的直和在拓扑积空间上的超循环性, 它起源于动力系统中两个动力系统相交的概念. 具体来讲, 对于作用在相同可分的 Fréchet 空间 X 上的 $N \geqslant 2$ 个超循环 (或者, 亚超循环) 算子 $T_1, \dots, T_N$, 如果存在一个向量 $x \in X$ 使得向量 $(x, \dots, x) \in X^N$ 是直和 $\bigoplus_{i=1}^{N} T_i$ 作用在积空间 X^N 上的超循环 (或者, 亚超循环) 向量, 则算子 $T_1, \dots, T_N$ 是不交超循环的 (或者, 不交亚超循环的) 且向量 x 称作不交超循环 (或者, 不交亚超循环) 向量.

如果对于 X 中的任意非空的开集 $V_0,\dots,V_N$, 若存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $V_0\cap T_{1,m}^{-1}(V_1)\cap\cdots\cap T_{N,m}^{-1}(V_N)\neq\emptyset$ (或者, 对于所有的 $j\geqslant m$, 有 $V_0\cap T_{1,j}^{-1}(V_1)\cap\cdots\cap T_{N,j}^{-1}(V_N)\neq\emptyset$), 则称算子序列 $(T_{1,n})_{n=1}^{\infty},\dots,(T_{N,n})_{n=1}^{\infty}$ 是不交拓扑传递的 (或者, 不交混合的). 特别地, 如果算子 $(T_1^n)_{n=1}^{\infty},\dots,(T_N^n)_{n=1}^{\infty}$ 是不交拓扑传递的序列 (或者, 不交混合序列), 则算子 $T_1,\dots,T_N$ 是不交拓扑传递的 (或者, 不交混合的). 若 X 是可分的且是无限维的, Baire 纲定理和 Birkhoff 传递定理说明, 算子 $T_1,\dots,T_N$ 是稠密不交亚超循环的当且仅当对于 X 中任意的非空开集 $V_0,\dots,V_N$, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\lambda_m\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 使得 $\emptyset\neq V_0\cap\lambda_m^{-1}T_1^{-m}(V_1)\cap\cdots\cap\lambda_m^{-1}T_N^{-m}(V_N)$.

Bès 和 Peris [99] 给出了判断有限个算子是不交超循环的充分条件, 即不交超循环标准: 设 (n_k) 是严格递增的正整数序列, 算子 $T_1,T_2,\dots,T_N\in B(X)$. 如果存在 X 中的稠密集 $X_0,X_1,\dots,X_N$ 和映射 $S_{l,k}:X_l\to X$ $(1\leqslant l\leqslant N,\ k\in\mathbb{N})$ 满足

(i) $T_l^{n_k}$ 在 X_0 上逐点趋向于零;

(ii) $S_{l,k}$ 在 X_l 上逐点趋向于零;

(iii) $(T_l^{n_k}S_{i,k}-\delta_{i,l}Id_{X_l})$ 在 X_l $(1\leqslant i\leqslant N)$ 上逐点趋向于零,

则算子 $T_1,T_2,\dots,T_N$ 是不交超循环的.

后来, Martin [100] 给出了判断算子是不交亚超循环的充分条件, 即不交亚超循环标准: 设 (n_k) 是严格递增的正整数序列, 算子 $T_1,T_2,\dots,T_N\in B(X)$. 如果存在 X 中的稠密集 $X_0,X_1,\dots,X_N$ 和映射 $S_{l,k}:X_l\to X$ $(1\leqslant l\leqslant N,k\in\mathbb{N})$ 满足

(i) $(T_l^{n_k}S_{i,k}-\delta_{i,l}Id_{X_l})$ 在 X_l $(1\leqslant i\leqslant N)$ 上逐点趋向于零;

(ii) 对于任意的 $x\in X_0$ 和 $y_i\in X_i$, 有 $\lim_{k\to\infty}\|T_l^{n_k}x\|\|\sum_{j=1}^N S_{j,k}y_j\|=0$,

则算子 $T_1,T_2,\dots,T_N$ 是不交亚超循环的.

Bès 等人 [101] 刻画了作用在加权 Dirichlet 空间 $\mathcal{S}_v$ 上的有限个线性分式复合算子的不交超循环性质和不交亚超循环性质, 并给出了充分必要条件, 也可参见文献 [102].

Shkarin [103] 证明了, 对于任意的无限维可分的 Fréchet 空间和任意的 $N\in\mathbb{N}$, $N\geqslant 2$, 一定存在 N 个算子 $T_1,T_2,\dots,T_N$, 使得这些算子具有不交超循环性质. Salas [104] 进一步指出, 对于任意的无限维可分的 Banach 空间 X 和任意的 $N\in\mathbb{N}$, $N\geqslant 2$ 且其对偶空间 X^* 也可分, 一定存在 N 个算子 $T_1,T_2,\dots,T_N$, 使得算子 $T_1,T_2,\dots,T_N$ 和对应的伴随算子都是不交超循环的. 之后, Bès 等学者在文献 [105] 进一步指出, 任意的无限维可分的 Fréchet 空间存在任意有限长度的可交换的不交混合算子. 特别地, 如果底空间是 Banach 空间, 则存在任意有限长度的不交混合的强连续算子半群.

最近, Bès 等学者在文献 [106] 中构造了 N 个算子 $T_1,T_2,\dots,T_N$, 使得这些算子是不交超循环的但不是不交弱混合的, 也不满足不交超循环标准. Sandersa 和 Shkarin [107] 进一步证明了, 每一个无限维可分的 Banach 空间上存在有限个算子 $T_1,T_2,\dots,T_N$, 它们是不相交弱混合的但不满足不交超循环标准. 同时, 他们构造了不交超循环算子, 使得这些算子的不交超循环向量集是无处稠密集.

对于任意算子 $T\in B(H)$ 和所有的 $F\in B(H)$, 左乘算子 $L_T:B(H)\to B(H)$ 定义为 $L_TF=TF$. Yousefi 和 Rezaei [108] 证明了, 算子 $T\in B(H)$ 满足亚超循环标准等价于对应的左乘算子在强算子拓扑下是亚超循环的. Zhang 和 Zhou [109] 把对应结果推广到不交亚超循环算子相关的情形中, 并给出了以下结果:

定理 6.1 设算子 $T_1,\dots,T_N\in B(H)$, 这里 $N\geqslant 2$, 则下面条件等价:

(i) 算子 $T_1,\dots,T_N\in B(H)$ 满足不交亚超循环标准;

(ii) 算子 $\bigoplus_{n=1}^{\infty}T_1,\dots,\bigoplus_{n=1}^{\infty}T_N$ 作用在 $\bigoplus_{n=1}^{\infty}H$ 上是稠密不交亚超循环的;

(iii) 对任意的 $r \in \mathbb{N}$, 算子 $\overbrace{T_1 \oplus \cdots \oplus T_1}^{r}, \dots, \overbrace{T_N \oplus \cdots \oplus T_N}^{r}$ 作用在 H^r 上是稠密不交亚超循环的.

定理 6.2 假定 $T_i \in B(H)$ $(i = 1, \dots, N)$ 且对应的左乘算子 $L_{T_i} : B(H) \to B(H)$ $(i = 1, \dots, N)$, $N \geqslant 2$, 则下列结论等价:

(i) 算子 $T_1, \dots, T_N$ 满足不交亚超循环标准;

(ii) 算子 $L_{T_1}, \dots, L_{T_N}$ 在 $B(H)$ 的强算子拓扑下是稠密不交亚超循环的;

(iii) 对于 $B(H)$ 中的任意的非空强算子拓扑下开集 $V_0, \dots, V_N$, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda_m \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 使得

$$\emptyset \neq V_0 \cap \lambda_m^{-1} L_{T_1}^{-m}(V_1) \cap \cdots \cap \lambda_m^{-1} L_{T_N}^{-m}(V_N);$$

(iv) 算子 $L_{T_1}, \dots, L_{T_N}$ 在 $B_2(H)$ 的 $\|\cdot\|_2$ 范数拓扑下是稠密不交亚超循环的.

定理 6.3 假定 $T_i \in B(H)$ $(i = 1, \dots, N)$ 且对应的左乘算子 $L_{T_i} : B(H) \to B(H)$ $(i = 1, \dots, N)$, $N \geqslant 2$, 则下列结论等价:

(i) 算子 $T_1, \dots, T_N$ 满足不交超循环标准;

(ii) 算子 $L_{T_1}, \dots, L_{T_N}$ 在 $B(H)$ 的强算子拓扑下是稠密不交超循环的;

(iii) 对于 $B(H)$ 中的任意的非空强算子拓扑下开集 $V_0, \dots, V_N$, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$\emptyset \neq V_0 \cap L_{T_1}^{-m}(V_1) \cap \cdots \cap L_{T_N}^{-m}(V_N);$$

(iv) 算子 $L_{T_1}, \dots, L_{T_N}$ 在 $B_2(H)$ 的 $\|\cdot\|_2$ 范数拓扑下是稠密不交超循环的.

微分算子作用在由整函数组成的广义加权 Bergman 空间上的动力性质被 Bonet 和 Bonilla 在文献 [110] 中详细地讨论. 在此基础上, Zhang 和 Zhou [111] 讨论了作用在此空间上的有限个微分算子幂的不交超循环性质并且给出了以下结论:

定理 6.4 设 $T_1, T_2, \dots, T_N$ 是作用在可分的无限维 Fréchet 空间 X 上的有界线性算子, 则

(i) 若算子 $T_1, T_2, \dots, T_N$ 关于某可连接序列 (n_k) 是遗传稠密不交超循环的, 则算子 $T_1, T_2, \dots, T_N$ 是不交混合的;

(ii) 若对于任意 $1 \leqslant i, l \leqslant N$, $T_iT_l = T_lT_i$ 且算子 $T_1, T_2, \dots, T_N$ 关于可连接的正整数序列 (n_k) 满足不交超循环标准, 则算子 $T_1, T_2, \dots, T_N$ 关于全序列 (k) 也满足不交超循环标准.

定理 6.5 设 $T_1, T_2, \dots, T_N$ 是作用在可分的无限维 Fréchet 空间 X 上的有界线性算子, 则算子 $T_1, T_2, \dots, T_N$ 关于全序列 (k) 是遗传稠密不交超循环的当且仅当算子 $T_1, T_2, \dots, T_N$ 是不交混合的.

定理 6.6 设 $1 \leqslant r_1 < r_2 < \cdots < r_N$, 这里 $N \geqslant 2$, $r_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, N$. 假设对于某个 $1 \leqslant p < \infty$, 微分算子 $D : B_{p,0} \to B_{p,0}$ 是连续的. 如果微分算子 $D : B_{p,0} \to B_{p,0}$ 是超循环的, 则算子 $D^{r_1}, \dots, D^{r_N}$ 满足不交超循环标准.

Chen 等人 [112] 证明了, 当映射 φ 为单位球 $\mathbb{B}$ 上无内部不动点的自同构时, 复合算子 C_φ 在 $H^2(\mathbb{B})$ 上是超循环的. 之后, Jiang 和 Ouyang [113] 讨论了 $\mathbb{C}^N$ 中单位球上分式线性映射诱导复合算子的循环性质和超循环性质. 最近, Liang 和 Zhou [114] 研究了作用在单位球上的加权 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{B})$ 分式线性映射诱导复合算子不交超循环性质, 并给出了下面结论:

定理 6.7 设 $C_{\varphi_1}, \dots, C_{\varphi_N}$ 是空间 $H^2(\mathbb{B})$ 上 $N \geqslant 2$ 个超循环复合算子, 这里 $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B})$. 假设 $1 \leqslant l, j \leqslant N$ 且 $l \neq j$ 时, 对于几乎处处 $z \in \partial\mathbb{B}$, 成立

$$(\varphi_l^{[-n]} \circ \varphi_j^{[n]})(z) \to \gamma_l, \quad n \to \infty,$$

这里 γ_l 是 φ_l 的不动点, 则 $C_{\varphi_1},\ldots,C_{\varphi_N}$ 关于序列 $(n_k)=(k)$ 满足不交超循环标准, 于是, 它们是不交混合的. 特别地, 它们是不交超循环的.

定理 6.8 设 $C_{\varphi_1},\ldots,C_{\varphi_N}$ 是空间 $H^2(\mathbb{B})$ 上 $N\geqslant 2$ 个超循环复合算子, 这里 $\varphi_1,\ldots,\varphi_N\in\mathrm{Aut}(\mathbb{B})$. 如果映射 $\varphi_1,\ldots,\varphi_N$ 的吸引不动点都不相同, 则 $C_{\varphi_1},\ldots,C_{\varphi_N}$ 是不交超循环的.

由所有 (实的或复的) 序列组成的空间定义如下:

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}=\{(x_n)_n: x_n\in\mathbb{K}, n\in\mathbb{N}\}\quad \text{或}\quad \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}=\{(x_i)_i: x_i\in\mathbb{K}, i\in\mathbb{Z}\},$$

这里 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ (或 $\mathbb{N}$) 表示所有整数. 给定权序列 $w=(w_i)_i$ 满足对于任意 $i\in\mathbb{N}$ (或 $i\in\mathbb{Z}$) 成立 $w_i\geqslant 1$, 则可分别定义加权序列空间 $l^2(\mathbb{N},w)$, $l^2(\mathbb{Z},w)$, $c_0(\mathbb{N},w)$ 和 $c_0(\mathbb{Z},w)$. 加权型空间 $l^2(\mathbb{N},w)$ 定义为

$$l^2(\mathbb{N},w):=\Big\{x=(x_n)_n\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}: \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n^2|x_n|^2<\infty\Big\}.$$

加权型空间 $l^2(\mathbb{Z},w)$ 可类似定义. 加权型空间 $c_0(\mathbb{N},w)$ 定义为

$$c_0(\mathbb{N},w):=\Big\{x=(x_n)_n\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}: \lim_{n\to\infty} w_n|x_n|=0\Big\}.$$

加权型空间 $c_0(\mathbb{Z},w)$ 可类似定义.

Liang 和 Zhou [115] 讨论了作用在加权型空间上的加权移位算子幂的不交亚超循环性质, 并给出了下面的充分必要条件:

定理 6.9 假设空间 $X=c_0(\mathbb{N},w)$ 或 $l^2(\mathbb{N},w)$, 给定正整数 $1\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_N$, 这里 $N\geqslant 2$. 对于任意 $1\leqslant l\leqslant N$, 取非零有界序列 $a_l=(a_{l,n})_{n=1}^{\infty}$, 定义 X 上的单边移位算子 $B_{a_l}: X\to X$ 为

$$x=(x_0,x_1,\ldots)\xrightarrow{B_{a_l}}(a_{l,1}x_1,a_{l,2}x_2,\ldots).$$

于是, 下面结论等价:

(i) $B_{a_1}^{r_1},\ldots,B_{a_N}^{r_N}$ 在空间 X 上是稠密不交亚超循环的;

(ii) 对于任意 $\varepsilon>0$ 和 $q\in\mathbb{N}$, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得对于所有 $0\leqslant j\leqslant q$, 成立

$$w_{j+(r_l-r_s)m}\left|\frac{\prod_{i=j+(r_l-r_s)m+1}^{j+r_lm}a_{s,i}}{\prod_{i=j+1}^{j+r_lm}a_{l,i}}\right|<\varepsilon,\quad 1\leqslant s<l\leqslant N;$$

(iii) $B_{a_1}^{r_1},\ldots,B_{a_N}^{r_N}$ 满足不交亚超循环标准.

定理 6.10 假设 $X=c_0(\mathbb{Z},w)$ 或 $l^2(\mathbb{Z},w)$, 给定正整数 $1\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_N$, 这里 $N\geqslant 2$. 对于任意 $1\leqslant l\leqslant N$, 定义空间 X 上的加权后移位算子 $B_{a_l}e_j=a_{l,j}e_{j-1}$ $(j\in\mathbb{Z})$, 这里 $a_l=(a_{l,j})_{j\in\mathbb{Z}}$ 是有界双边非零向量序列, 则下面结论等价:

(i) $B_{a_1}^{r_1},B_{a_2}^{r_2},\ldots,B_{a_N}^{r_N}$ 在空间 X 上是稠密不交亚超循环的;

(ii) 对任意 $\varepsilon>0$ 和 $q\in\mathbb{N}$, 存在 $m\in\mathbb{N}$ $(m>2q)$, 满足对于任意 $|j|,|k|\leqslant q$ 和 $1\leqslant l,s\leqslant N$, 成立

$$\frac{w_{j-r_lm}|\prod_{i=j-r_lm+1}^{j}a_{l,i}|w_{k+r_sm}}{|\prod_{i=k+1}^{k+r_sm}a_{s,i}|}<\varepsilon,\quad 1\leqslant l,s\leqslant N,$$

且对于 $1\leqslant s<l\leqslant N$, 成立

$$w_{j+(r_l-r_s)m}\left|\frac{\prod_{i=j+(r_l-r_s)m+1}^{j+r_lm}a_{s,i}}{\prod_{i=j+1}^{j+r_lm}a_{l,i}}\right|<\varepsilon,\quad w_{j+(r_s-r_l)m}\left|\frac{\prod_{i=j+(r_s-r_l)m+1}^{j+r_sm}a_{l,i}}{\prod_{i=j+1}^{j+r_sm}a_{s,i}}\right|<\varepsilon;$$

(iii) $B_{a_1}^{r_1}, B_{a_2}^{r_2}, \ldots, B_{a_N}^{r_N}$ 不交亚超循环标准.

设 G 是有单位元 e 和右不变的 Haar 测度 λ 的局部紧群. 因为复 Banach 空间允许一个超循环算子的充要条件是此空间是可分的且是无限维的, 故当 G 是二可数的且 $1 \leqslant p < \infty$ 时, 研究复 Lebesgue 空间 $L^p(G)$ 上算子的超循环性质是有意义的. 有界函数 $w: G \to (0,\infty)$ 是作用在 G 上的权函数. 对于 $a \in G$, δ_a 表示在 a 处的单位点质量. 作用在 G 上的加权平移是一个加权的卷积算子 $T_{a,w}: L^p(G) \to L^p(G)$, 定义如下:

$$T_{a,w}(f) := wT_a(f), \quad f \in L^p(G),$$

这里 w 是作用在 G 上的权函数且 $T_a(f) = f * \delta_a \in L^p(G)$ 是卷积,

$$(f * \delta_a)(x) = \int_G f(xy^{-1}) d\delta_a(y) = f(xa^{-1}), \quad x \in G.$$

Chen 和 Chu [116,117] 刻画了作用在局部紧群和齐次空间上的加权平移算子的超循环性质. 之后, Chen 在文献 [118] 中继续讨论了混沌加权平移算子, 证明了加权平移算子有稠密的周期点可以推出算子是超循环的; 并在文献 [119] 中又进一步讨论了非扭曲元诱导的加权平移算子的超循环性质, 给出了充分必要条件.

对于 $N \geqslant 2$ 个算子 $T_1, T_2, \ldots, T_N$, 如果对于 X 中的任意非空开集 $W, V_0, V_1, \ldots, V_N$ 且 $0 \in W$, 存在正整数 n, 使得

$$W \cap T_{1,n}^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap T_{N,n}^{-1}(V_N) \neq \emptyset,$$
$$V_0 \cap T_{1,n}^{-1}(W) \cap \cdots \cap T_{N,n}^{-1}(W) \neq \emptyset,$$

则称算子 $T_1, T_2, \ldots, T_N$ 满足不交 blow-up/collapse 性质. Bés 和 Peris [99] 指出不交 blow-up/collapse 性质是判断算子不交超循环的充分条件.

在以上研究的基础上, Han 和 Liang [120] 讨论了有限个加权平移算子不交的超循环性质, 并给出了下面主要的结果:

定理 6.11 假设 G 是有右不变的 Haar 测度 λ 的局部紧群, a 是 G 中的非周期元. 设 $T_{a,w_1}, \ldots, T_{a,w_N}$ 是作用在 $L^p(G)$ 上连续的加权平移算子, 这里 $1 \leqslant p < \infty$, 对于任意的 $1 \leqslant i \leqslant N$, $w_i: G \to (0,\infty)$ 是作用在 G 上的权函数. 对于正整数 $n \geqslant 1$ 和 $2 \leqslant m \leqslant N$, 定义

$$\alpha_n^{(m)} = \prod_{s=0}^{n-1} \frac{w_m * \delta_a^s}{w_1 * \delta_a^s},$$

则下面的条件等价:

(i) 加权平移算子 $T_{a,w_1}, \ldots, T_{a,w_N}$ 是不交超循环的;

(ii) 加权平移算子 $T_{a,w_1}, \ldots, T_{a,w_N}$ 满足不交 blow up/collapse 性质;

(iii) 对于任意的紧集 $K \subseteq G$ 且 $\lambda(K) > 0$, 存在 K 中的一列 Borel 集 (E_k), 使得

$$\lambda(K) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k),$$

且存在严格递增的正整数序列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, 使得对于任意的 $1 \leqslant m \leqslant N$, 随着 $k \to \infty$, 有

$$\left\| \left(\prod_{s=0}^{n_k-1} w_1 * \delta_a^s \right)^{-1} \bigg|_{E_k} \right\|_\infty \to 0, \quad \left\| \prod_{s=1}^{n_k} w_m * \delta_{a^{-1}}^s \bigg|_{E_k} \right\|_\infty \to 0,$$

并且集合

$$\{(\alpha_{n_k}^{(2)}\chi_{E_k}, \alpha_{n_k}^{(3)}\chi_{E_k}, \ldots, \alpha_{n_k}^{(N)}\chi_{E_k}) : k \geqslant 0\}$$

在拓扑积空间 $\underbrace{L^p(K) \times L^p(K) \times \cdots \times L^p(K)}_{N-1}$ 中稠密.

参考文献

1 Birkhoff G D. Demonstration dun theoreme elementaire sur les fonctions entieres. C R Acad Sci Paris, 1929, 189: 473–475
2 MacLane G R. Sequences of derivatives and normal families. J Anal Math, 1952, 2: 72–87
3 Rolewicz S. On orbits of elements. Studia Math, 1969, 32: 17–22
4 Kitai C. Invariant closed sets for linear operators. PhD Thesis. Toronto: University of Toronto, 1982
5 Godefroy G, Shapiro J. Operators with dense invariant cyclic vector manifolds. J Funct Anal, 1991, 98: 229–269
6 Grosse-Erdmann K. Universal families and hypercyclic vectors. Bull Amer Math Soc, 1999, 36: 345–381
7 Shapiro J. Notes on the dynamics of linear operators. Http://home.wlu.edu/ shapiro/Pubvit/LecNotes.html, 2001
8 Read C J. The invariant subspace problem for a class of Banach spaces, II: Hypercyclic operators. Israel J Math, 1988, 63: 1–40
9 Grosse-Erdmann K, Manguillot A. Linear Chaos. New York: Springer, 2011
10 Bayart F, Matheron E. Dynamics of Linear Operators. Cambridge: Cambridge University Press, 2009
11 Rosa M D L. Notes about weakly hypercyclic operator. J Operator Theory, 2011, 65: 187–195
12 Chan K C. The density of hypercyclic operators on a Hilbert space. J Operator Theory, 2001, 47: 131–143
13 Rezai H. On weakly transitive operators. Proc Japan Acad Ser A Math Sci, 2011, 87: 88–90
14 Ansari S I. Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces. J Funct Anal, 1997, 148: 384–390
15 Ansari S I. Hypercyclic and cyclic vectors. J Funct Anal, 1995, 148: 374–383
16 Bakkali A E, Tajmouati A. Property (ω) and hypercyclic/supercyclic operators. Int J Contemp Math Sci, 2012, 26: 1259–1268
17 Gethner R, Shapiro J. Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions. Proc Amer Math Soc, 1987, 100: 281–288
18 Rosa M D L, Read C J. A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic. J Operator Theory, 2008, 61: 369–380
19 Bayart F, Matheron E. Hypercyclic operators failing the hypercyclicity criterion on classical Banach spaces. J Funct Anal, 2007, 250: 426–441
20 Bès J, Peris A. Hereditarily hypercyclic operators. J Funct Anal, 1999, 167: 94–112
21 Bayart F, Grivaux S. Frequently hypercyclic operators. Trans Amer Math Soc, 2006, 358: 5083–5117
22 Bonilla A, Grosse-Erdmann K G. Frequently hypercyclic operators and spaces. Ergodic Theory Dynam Systems, 2007, 27: 383–404
23 Beise H P. Growth of frequently Birkh-universal functions of exponential type on rays. ArXiv:1201.4075, 2012
24 Chen R Y, Zhou Z H. Hypercyclicity of weighted composition operators on the unit ball of $\mathbb{C}^N$. J Korean Math Soc, 2011, 48: 969–984
25 Yousefi B, Rezaei H. Hypercyclic property of weighted composition operators. Proc Amer Math Soc, 2007, 135: 3263–3271
26 Zajac S. Hypercyclicity of composition operators in pseudoconvex domains. ArXiv:1202.6638, 2012
27 Montes-Rodríguez A, Rodríguez-Martínez A, Shkarin S. Spectral theory of Volterra-composition operators. Math Z, 2009, 2: 431–472
28 Montes-Rodríguez A, Rodríguez-Martínez A, Shkarin S. Cyclic behaviour of Volterra composition operators. Proc Lond Math Soc, 2011, 103: 535–562
29 Herzog G, Weber A. A class of hypercyclic Volterra type operators. Demonstratio Math, 2006, 39: 465–468
30 Salas H N. Hypercyclic weighted shifts. Trans Amer Math Soc, 1995, 347: 993–1004
31 Salas H N. Supercyclicity and weighted shifts. Studia Math, 1999, 135: 55–74
32 Shu Y L, Zhao X F, Zhou Y H. The conjugate class of a supercyclic operator. Complex Anal Oper Theory, 2011, 6: 603–611
33 Bourdon P, Shapiro J H. Cyclic composition operators on H^2. Proc Sympos Pure Math, 1990, 51: 43–53

34 Bourdon P, Shapiro J H. Cyclic Phenomena for Composition Operators, vol. 596. Providence: Amer Math Soc, 1997
35 Bonet J. Dynamics of differentiation operator on weighted spaces of entire functions. Math Z, 2009, 261: 649–657
36 Shapiro J H. Composition Operators and Classical Function Theory. New York: Springer-Verlag, 1993
37 Gallardo-Gutiérrez E, Montes-Rodríguez A. The role of the spectrum in cyclic behavior of composition operators. Mem Amer Math Soc, 2004, 167: 1–81
38 Bernal-González L, Bonilla A. Compositional frequent hypercyclicity on weighted Dirichlet spaces. Bull Belg Math Soc Simon Stevin, 2010, 17: 1–11
39 Zhang L, Zhou Z H. Hypercyclicity of weighted composition operator on weighted Dirichlet space. Complex Var Elliptic Equ, 2014, 59: 1043–1051
40 Miralles A, Wolf E. Hypercyclic composition operators on $H^{\infty}_{\nu,0}$ spaces. Math Nachr, 2012, 286: 1–8
41 Liang Y X, Zhou Z H. Hypercyclic behaviour of multiples of composition operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions. Bull Belg Math Soc Simon Stevin, 2014, 21: 385–401
42 Liang Y X, Zhou Z H. Hereditarily hypercyclicity and supercyclicity of different weighted shifts. J Korean Math Soc, 2014, 51: 363–382
43 Hazarika M, Arora S C. Hypercyclic operator weighted shifts. Bull Korean Math Soc, 2004, 41: 589–598
44 Hilden H M, Wallen L J. Some cyclic and non-cyclic vectors of certain operators. Indiana Univ Math J, 1974, 23: 557–565
45 Montes-Rodríguez A, Salas H N. Supercyclic subspaces: Spectral theory and weighted shifts. Adv Math, 2001, 163: 74–134
46 Bermúdez T, Bonilla A, Peris A. On hypercyclicity and supercyclicity criteria. Bull Aust Math Soc, 2004, 70: 45–54
47 Feldman N, Miller V, Miller T. Hypercyclic and supercyclic cohyponormal operators. Acta Sci Math (Szeged), 2002, 68: 303–328
48 Chan K C, Sanders R. Two criteria for a path of operators to have common hypercyclic vectors. J Operator Theory, 2009, 61: 191–223
49 Chan K C, Sanders R. Common hypercyclic vectors for the unitary orbit of a hypercyclic operator. J Math Anal Appl, 2012, 387: 17–23
50 Abakumov E, Gordon J. Common hypercyclic vectors for multiplies of backward shift. J Funct Anal, 2003, 200: 494–504
51 Bayart F. Common hypercyclic vectors for composition operators. J Operator Theory, 2004, 52: 353–370
52 Bayart F. Common hypercyclic subspaces. Integral Equations Operator Theory, 2005, 53: 467–476
53 Bayart F, Matheron E. How to get common universal vectors. Indiana Univ Math J, 2007, 56: 553–580
54 Costakis G, Sambarino M. Genericity of wild holomorphic functions and common hypercyclic vectors. Adv Math, 2004, 182: 278–306
55 León-Saavedra F, Müller V. Rotations of hypercyclic and supercyclic operators. Integral Equations Operator Theory, 2004, 50: 385–391
56 Chan K C, Sanders R. Common supercyclic vectors for a path of operators. J Math Anal Appl, 2008, 337: 646–658
57 Aron R, Bès J, León F, et al. Operators with common hypercyclic subspaces. J Operator Theory, 2005, 54: 251–260
58 Montes-Rodríguez A. Banach spaces of hypercyclic vectors. Michigan Math J, 1996, 43: 419–436
59 Zhang L, Zhou Z H. Notes about the structure of common supercyclic vectors. J Math Anal Appl, 2014, 418: 336–343
60 Javaheri M. Semigroups of matrices with dense orbits. Dyn Syst, 2011, 26: 235–243
61 Ayadi A. Hypercyclic Abelian semigroup of matrices on $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{R}^n$ and k-transitivity ($k \geqslant 2$). Appl Gen Topol, 2011, 12: 35–39
62 Javaheri M. Topologically transitive semigroup actions of real linear fractional transformations. J Math Anal Appl, 2010, 368: 587–603
63 Feldman N S. Hypercyclic tuples of operators and somewhere dense orbits. J Math Anal Appl, 2008, 346: 82–98
64 Shkarin S. Hypercyclic tuples of operators on $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{C}^n$. Linear Multilinear Algebra, 2012, 60: 885–896
65 Bermúdez T, Bonilla A, Conejero J A, et al. Hypercyclic topologically mixing and chaotic semigroups on Banach spaces. Studia Math, 2005, 170: 57–75
66 Bernal-González L, Grosse-Erdmann K-G. Existence and non existence of hypercyclic semigroups. Proc Amer Math Soc, 2007, 135: 755–766
67 Albanese A A, Bonet J, Ricker W J. C_0-semigroups and mean ergodic operators in a class of Fréchet spaces. J Math Anal Appl, 2010, 365: 142–157
68 Bayart F. Dynamics of holomorphic groups. Semigroup Forum, 2011, 82: 229–241
69 Shkarin S. Remarks on common hypercyclic vectors. J Funct Anal, 2010, 258: 132–160

70 Ayadi A, Marzouguib H, Salhi E. Hypercyclic Abelian subgroups of GL$(n,\mathbb{R})$. J Difference Equ Appl, 2012, 18: 721–738

71 Ayadi A. Hypercyclic Abelian affine groups. ArXiv:1012.4901, 2011

72 Conejero J, Peris A. Hypercyclic translation C_0-semigroups on complex sectors. Discrete Contin Dyn Syst, 2009, 25: 1195–1208

73 Conejero J, Peris A. Chaotic translation semigroups. Discrete Contin Dyn Syst, 2007, 269–276

74 Desch W, Schappacher W, Webb G. Hypercyclic and chaotic semigroup of linear operators. Ergodic Theory Dynam Systems, 1997, 14: 793–819

75 Liang Y X, Zhou Z H. Supercyclic translation C_0-semigroup on complex sectors. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 36: 361–370

76 Yousefi B, Moghimi G R. Tuples with hereditarily hypercyclic property. Int J Pure Appl Math, 2013, 82: 339–344

77 Soltani R, Robati B K, Hedayatian K. Hypercyclic tuples of the adjoint of the weighted composition operators. Turk J Math, 2012, 36: 452–462

78 Yousefi B. Supercyclicity of multiple weighted composition operators. Int Math Forum, 2011, 6: 15–18

79 Liang Y X, Zhou Z H. Supercyclic tuples of the adjoint weighted composition operators on Hilbert spaces. Bull Iranian Math Soc, 2015, 41: 121–139

80 Costakis G, Sambarino M. Topologically mixing hypercyclic operators. Proc Amer Math Soc, 2003, 132: 385–389

81 Shkarin S. Mixing operators on spaces with weak topology. Demonstratio Math, 2011, 1: 143–150

82 Shkarin S. Hypercyclic and mixing operator semigroups. Proc Edinb Math Soc, 2011, 54: 761–782

83 Martínez-Giménez F, Peris A. Universality and chaos for tensor products of operators. J Approx Theory, 2003, 124: 7–24

84 Zhang L, Dong X T. Mixing properties in the operator algebra using Hilbert-Schmidt operators. J Comput Anal Appl, 2015, 18: 383–389

85 Rezai H. Chaotic property of weighted composition operators. Bull Korean Math Soc, 2011, 48: 1119–1124

86 Chan K C, Sanders R. Common hypercyclic vectors for the conjugate class of a hypercyclic operator. J Math Anal Appl, 2011, 375: 139–148

87 Martínez-Giménez F, Oprocha P, Peris A. Distributional chaos for backward shifts. J Math Anal Appl, 2009, 351: 607–615

88 Martínez-Giménez F, Oprocha P, Peris A. Distributional chaos for operators with full scrambled sets. Math Z, 2013, 274: 603–612

89 Bayart F, Bermúdez T. Semigroups of chaotic operators. Bull Lond Math Soc, 2009, 42: 823–830

90 Madore B F, Martínez-Avendaño R A. Subspace hypercyclicity. J Math Anal Appl, 2011, 373: 502–511

91 Le C M. On subspace-hypercyclicity operators. Proc Amer Math Soc, 2011, 139: 2847–2852

92 Rezaei H. Notes on subspace-hypercyclic operators. J Math Anal Appl, 2013, 397: 428–433

93 Jiménez-Munguía R R, Martínez-Avendaño R A, Peris A. Some questions about subspace-hypercyclic operators. J Math Anal Appl, 2013, 408: 209–212

94 Talebi S, Asadipour M. On subspace-transitive operators. Int J Pure Appl Math, 2013, 84: 643–649

95 Talebi S, Moosapoor M. Subspace-chaotic operators and subspace-weakly mixing operators. Int J Pure Appl Math, 2012, 78: 879–885

96 Zhao X F, Sun Y L, Zhou Y H. Subspace-supercyclicity and common subspace-supercyclic vectors. J East China Norm Univ Natur Sci Ed, 2012, 1: 107–112

97 Zhang L, Zhou Z H. Notes about subspace-supercyclic operators. Ann Funct Anal, 2015, 6: 60–68

98 Bernal-González L. Disjoint hypercyclic operators. Studia Math, 2007, 182: 113–131

99 Bés J, Peris A. Disjointness in hypercyclicity. J Math Anal Appl, 2007, 336: 297–315

100 Martin Ö. Disjoint hypercyclic and supercyclic composition operators. PhD Thesis. Green: Bowling Green State University, 2011

101 Bès J, Martin Ö, Peris A. Disjoint hypercyclic linear fractional composition operators. J Math Anal Appl, 2011, 381: 843–856

102 Bès J, Martin Ö. Compositional disjoint hypercyclicity equals disjoint supercyclicity. Houston J Math, 2012, 38: 1150–1163

103 Shkarin S. A short proof of existence of disjoint hypercyclic operators. J Math Anal Appl, 2010, 367: 713–715

104 Salas H N. Dual disjoint hypercyclic operators. J Math Anal Appl, 2011, 374: 106–117

105 Bès J, Martin Ö, Peris A, et al. Disjoint mixing operators. J Funct Anal, 2012, 263: 1283–1322

106 Bès J, Martin Ö, Sanders R. Weighted shifts and disjoint hypercyclicity. J Operator Theory, 2014, 72: 15–40

107 Sandersa R, Shkarin S. Existence of disjoint weakly mixing operators that fail to satisfy the disjoint hypercyclicity criterion. J Math Anal Appl, 2014, 417: 106–117
108 Yousefi B, Rezaei H. Supercyclicity in the operator algebra using Hilbert-Schmidt operators. Rend Circ Mat Palermo (2), 2007, 56: 33–42
109 Zhang L, Zhou Z H. Disjointness in supercyclicity on the algebra of Hilbert-Schmidt operators. Indian J Pure Appl Math, 2015, 46: 219–228
110 Bonet J, Bonilla A. Chaos of the differentiation operator on weighted Banach spaces of entire functions. Complex Anal Oper Theory, 2013, 7: 33–42
111 Zhang L, Zhou Z H. Dynamics of differentiation operators on generalized weighted Bergman spaces. Open Math, 2015; 13: 141–145
112 Chen X, Cao G, Guo K. Inner functions and cyclic composition operators on $H^2(B_N)$. J Math Anal Appl, 2000, 250: 660–669
113 Jiang L, Ouyang C. Cyclic behavior of linear fractional composition operators in the unit ball of $\mathbb{C}^N$. J Math Anal Appl, 2008, 341: 601–612
114 Liang Y X, Zhou Z H. Disjoint mixing composition operators on the Hardy space in the unit ball. C R Math Acad Sci Paris, 2014, 352: 289–294
115 Liang Y X, Zhou Z H. Disjoint supercyclic powers of weighted shifts on weighted sequence space. Turk J Math, 2014, 38: 1007–1022
116 Chen C C, Chu C H. Hypercyclicity of weighted convolution operators on homogeneous spaces. Proc Amer Math Soc, 2009, 137: 2709–2718
117 Chen C C, Chu C H. Hypercyclic weighted translations on groups. Proc Amer Math Soc, 2011, 139: 2839–2846
118 Chen C C. Chaotic weighted translations on groups. Arch Math, 2011, 97: 61–68
119 Chen C C. Hypercyclic weighted translations generated by non-torsion elements. Arch Math, 2013, 101: 135–141
120 Han S A, Liang Y X. Disjoint hypercyclic weighted translations generated by aperiodic elements. Collect Math, doi: 10.1007/s13348-015-0136-0, 2015

Progress in research on dynamics of linear operators

ZHANG Liang & ZHOU ZeHua

Abstract The research of dynamics of linear operators mainly involves hypercyclic, chaotic, mixing properties and so on. It has close links with complex analysis, theory of operator and differential geometry, with a wide range of applications. Some linear operators on infinite dimensional spaces can display interesting dynamical properties. In particular, hypercyclicity is an essentially infinite dimensional property, when iterations of the operator generate a dense subspace. A local convex complete metric space admits a hypercyclic operator if and only if it is separable and infinite dimensional. Over more than two decades, the study of dynamics of linear operators has turned into a very active research area and many fascinating research results have been given. In this paper, we will systematically summarize the contents of dynamics of linear operators and will give a brief review of the recent research results about wonderful dynamical properties of linear operators, among which related conclusions of our research group are involved.

Keywords complete metric space, linear operators, hypercyclicity

MSC(2010) 47A16, 46E15

doi: 10.1360/N012015-00111