中国科学: 数学　2024 年　第 54 卷　第 12 期: 2179～2198
SCIENTIA SINICA Mathematica
综 述

全纯自同构群与开性 L^2 延拓

献给中山大学建校百年暨中山大学数学学科建设 100 周年

林章立[1], 徐旺[2], 周向宇[3*]

1. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005;
2. 中山大学数学学院, 广州 510275;
3. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: linzhl@xmu.edu.cn, xuwang6@mail.sysu.edu.cn, xyzhou@math.ac.cn

收稿日期: 2024-06-10; 接受日期: 2024-08-10; 网络出版日期: 2024-09-20; * 通信作者
国家重点研发计划 (批准号: 2021YFA1003100)、国家自然科学基金 (批准号: 11688101 和 12288201) 资助项目

摘要　本文介绍作者们近期在多复变领域中若干问题上的研究进展, 包括 $\mathbb{C}^n$ 的全纯自同构群理论和最优开性 L^2 延拓问题.

关键词　全纯自同构群　高阶插值　最优开性 L^2 延拓　多次调和函数　乘子理想层

MSC (2020) 主题分类　32M17, 32E30, 32D15, 32A36

赵爽除了为《周髀算经》作序和作注, 还写了一篇纯数学论文, 文中提出 "形诡而量均, 体殊而数齐" 这一商高 - 赵爽 "形体不变量思想". 这里, "诡", 变也.《周髀算经》记载, 商高在回答周公的天地之问 "夫天不可阶而升, 地不可得尺寸而度. 请问数安从出?" 时, 阐释了其对勾股定理的证明. 证明思想包括 "既方之" (即: "皆方之", 这里 "既" 是全、都之意), "折矩"、"积矩", "环而共盘", 其中 "环而共盘" 的思想, 蕴涵着勾股形在平移、旋转的运动中保持性质不变的思想, 体现了 "形诡而量均" 的思想. 商高 - 赵爽 "形体不变量思想" 贯穿于数学的演化和发展之中. 多复变函数论是 "数学中研究多个复变量的全纯函数的性质和结构的分支学科". 进而言之, 多复变研究复解析范畴, 在该范畴中, 对象 (objects) 是复流形、复空间, 而态射 (morphisms) 是复流形、复空间之间的全纯映射. 多复变的一个基本思想和内容是研究全纯不变量. 按照商高 - 赵爽的语言, 这里 "形体" 演化为复流形、复空间, " 诡殊" 演化为全纯映射, "量均数齐" 演化为全纯不变量.

本文旨在介绍作者们近期在多复变领域中若干问题上的研究进展, 主要包括 $\mathbb{C}^n$ 的全纯自同构群理论与开性 L^2 延拓理论两个方面. 第 1 节简要介绍 $\mathbb{C}^n$ 的全纯自同构群及其各种子群的结构问题和插值问题在过去三十余年的研究进展, 以及作者们近期的一些研究结果. 第 2 节简要回顾开性 L^2 延拓问题的历史, 介绍作者们近期在最优开性 L^2 延拓问题上取得的研究成果, 以及这些结果在相关问题中的应用, 此外也将介绍作者们在广义 Suita 猜想方面的研究进展.

英文引用格式: Lin Z L, Xu W, Zhou X Y. Holomorphic automorphism groups and L^2 extensions of openness type (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 2179–2198, doi: 10.1360/SSM-2024-0198

1 $\mathbb{C}^n$ 的全纯自同构群的结构与插值问题

自同构群是几何学中的一种基本不变量, 也是函数论中的一种基本研究对象, 相应地多复变与复几何中研究的便是复流形的全纯自同构群. 在本节中, 我们将讨论复欧式空间 $\mathbb{C}^n$ 的全纯自同构群、$(\mathbb{C}^*)^n$ 的全纯自同构群以及它们的一些子群的结构问题, 同时还将讨论 $\mathbb{C}^n$ 的全纯自同构的高阶插值问题. 本节回顾 Rosay, Rudin, Andersén, Lempert, Forstnerič 和 Buzzard 等在 1980 年代至 2010 年代的一些工作, 并介绍作者们近期在这方面做出的一些新结果.

1.1 $\mathbb{C}^n$ 的全纯自同构群及其子群

设 M 为一个复流形, 我们用 $\mathrm{Aut}(M)$ 表示 M 的所有全纯自同构构成的群. 熟知在 M 的全纯自映射空间 $\mathcal{O}(M,M)$ 的紧开拓扑下 $\mathrm{Aut}(M)$ 是一个拓扑群, 并且这个拓扑可由一个完备的度量诱导, 因此 $\mathrm{Aut}(M)$ 是一个 Baire 空间. 进一步地, 当 M 是一个双曲复流形 (例如 $\mathbb{C}^n$ 的有界区域) 或紧复流形时, $\mathrm{Aut}(M)$ 是一个有限维实李群或复李群 (参见文献 [41, 第 3.1 节]). 这是 1970 年代之前就已熟知的结果, 但是这对一般的复流形是不成立的, 即使是对于 $\mathbb{C}^n$ 本身也是如此. 众所周知, 当 $n \geqslant 2$ 时 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 并不是一个李群 ($\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ 等于 $\mathbb{C}$ 的仿射自同构群). Rosay 和 Rudin 在 1988 年的文章 [51] 中利用 $\mathbb{C}^n$ 的一些简单的全纯自同构对 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 做了一些深入的研究, 他们的结果表明, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 是一个很大且复杂的群. 后来 Andersén 和 Lempert [3] 在 1992 年做出了一个突破. 我们接下来从现在的视角来审视他们的这个结果.

研究自同构群首先当然是找出一些简单的自同构来. 从现在起到本节结束, 若无其他声明, 我们将假定 $n \geqslant 2$ 是一个整数. 关于 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 一些被找出的简单全纯自同构有

$$z \mapsto (z_1, \ldots, z_{j-1}, z_j + f, z_{j+1}, \ldots, z_n), \tag{1.1}$$

$$z \mapsto (z_1, \ldots, z_{j-1}, z_j \mathrm{e}^f, z_{j+1}, \ldots, z_n), \tag{1.2}$$

$$z \mapsto (z_1 \mathrm{e}^{c_1 g(z^\alpha)}, \ldots, z_n \mathrm{e}^{c_n g(z^\alpha)}), \tag{1.3}$$

其中 $1 \leqslant j \leqslant n$, $z := (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $c := (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$, $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ $(0 \in \mathbb{N}!)$ 满足 $c \cdot \alpha := \sum c_j \alpha_j = 0$, $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ 只依赖于除 z_j 外的不超过 k $(k \leqslant n-1)$ 个变量, $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. (1.1) 被称作加法 shear, (1.2) 被称作乘法 shear. 若将 f 和 g 换为 $-f$ 和 $-g$, 我们便得到 (1.1)–(1.3) 的逆. 比 (1.2) 和 (1.3) 更一般的是以下全纯自同构:

$$z \mapsto (z_1 \mathrm{e}^{c_1 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha}, \ldots, z_n \mathrm{e}^{c_n \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha}), \tag{1.4}$$

其中 $c := (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$, $\sum a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ 满足若 $c \cdot \alpha := \sum c_j \alpha_j \neq 0$ 则 $a_\alpha = 0$, 这等价于说这个级数只包含满足 $c \cdot \alpha = 0$ 的项 $a_\alpha z^\alpha$. 同样地, 若将 c 换为 $-c$, 我们便得到 (1.4) 的逆.

目前被找到的可以写出表达式的 $\mathbb{C}^n$ 的全纯自同构要么是 (1.1) 类和 (1.4) 类自同构的有限复合, 要么是个别具体的多项式自同构, 如 Nagata 自同构 (参见文献 [52]). 此处应该特别指出, 线性的 (1.1) 类自同构 $(k=1)$ 恰好生成 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ (参见文献 [1, 定理 A]), 再加上线性的 (1.2) 类自同构 $(k=1)$ 则可生成 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. 关于 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 的结构最理想的情况是所有这些已知的简单自同构恰好生成整个群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$, 但是这并不成立. Andersén 和 Lempert 所建立的结果是:

定理 1.1 (参见文献 [3, 定理 1.2 和 1.3]) 在紧开拓扑下, (1.1) 类和 (1.2) 类自同构 ($k=1$) 生成 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 的一个稠密子群, 但 (1.1) 类 ($k=n-1$) 和 (1.4) 类自同构再加上任意可数多个全纯自同构只能生成 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 的一个第一纲真子群.

注 1.1 定理的第二部分比最初的要稍强, 但证明方法是完全一致的.

Andersén 和 Lempert [3] 证明定理 1.1 第一部分的方法是较为晦涩的. 1993 年, Forstnerič 和 Rosay [23] 指出, Andersén 和 Lempert 的证明其实是利用了动力系统中的一些基本引理和一个关键的关于多项式的引理. 他们的这套方法后来被推广到一般的复流形上, 并成功应用到多复变与复几何的众多问题中, 被称作 Andersén-Lempert 理论, 至今仍蓬勃发展 (参见文献 [22]). Andersén 和 Lempert 所观察到的关于多项式的非平凡引理为:

引理 1.1 (参见文献 [21, 引理 4.9.9]) 全体 m 次齐次多项式向量场 $P:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 构成的复线性空间有一组如下形式的基:

$$(\Lambda_1 z)^m v_1,\ \ldots,\ (\Lambda_l z)^m v_l,\ (\Lambda_{l+1}z)^{m-1}\langle z,v_{l+1}\rangle v_{l+1},\ \ldots,\ (\Lambda_{N_1}z)^{m-1}\langle z,v_{N_1}\rangle v_{N_1},$$

其中 $\Lambda_j:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ 是线性泛函, $v_j\in\mathbb{C}^n$ 满足 $|v_j|=1$ 且 $\Lambda_j v_j=0$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准内积.

注意到 $(\Lambda_j z)^m v_j$ 是一个完备的全纯向量场, 它生成 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 的单参数子群

$$z\mapsto z+t(\Lambda_j z)^m v_j,$$

这是 (1.1) 类自同构 ($k=1$) 的 $\mathrm{SU}(n)$ 共轭 (参见文献 [21, 引理 4.1.1]). $(\Lambda_j z)^{m-1}\langle z,v_j\rangle v_j$ 也是一个完备的全纯向量场, 它生成 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 的单参数子群

$$z\mapsto z+(\mathrm{e}^{t(\Lambda_j z)^{m-1}}-1)\langle z,v_j\rangle v_j,$$

这是 (1.2) 类自同构 ($k=1$) 的 $\mathrm{SU}(n)$ 共轭 (参见文献 [21, 引理 4.1.1]). 现在给出定理 1.1 第一部分的证明概要, 详细的证明可参见文献 [21, 第 4.9 节].

定理 1.1 第一部分证明概要 设 $F\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$. 要证明的是 F 可被 (1.1) 类和 (1.2) 类全纯自同构 ($k=1$) 的有限复合紧致逼近. 第 1 步, 注意到平移变换和 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 都可被 (1.1) 类和 (1.2) 类全纯自同构 ($k=1$) 生成, 故不妨设 $F(0)=0$ 且 $\mathrm{D}F(0)=I_n$. 第 2 步, 观察到 F 是时间依赖全纯向量场

$$X_{t_0}(z):=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0}F_t\circ F_{t_0}^{-1}(z)$$

的时一映射, 作此向量场的 m 段分段逼近 $Y_{m,t}(z):=X_{\frac{k}{m}}(z)$, $\frac{k}{m}\leqslant t<\frac{k+1}{m}$, $k=0,1,\ldots,m-1$. 可证明当 $m\to\infty$ 时, $Y_{m,t}$ 的流紧致收敛于 F, 而 $Y_{m,t}$ 的流是 m 个 $\mathbb{C}^n$ 上的时间独立全纯向量场 $X_{\frac{k}{m}}$, $k=0,1,\ldots,m-1$ 的流的复合, 因此我们只需证明 $\mathbb{C}^n$ 上的任一个时间独立全纯向量场的流都可被 (1.1) 类和 (1.2) 类全纯自同构 ($k=1$) 的复合紧致逼近. 第 3 步, 设 Z 是 $\mathbb{C}^n$ 上的任一个时间独立全纯向量场, 则 Z 的幂级数展开的前 m 项部分和 Z_m 紧致收敛到 Z, 可证明 Z_m 的流也紧致收敛到 Z 的流. 而 Z_m 是一个多项式向量场, 因此我们只需证明, $\mathbb{C}^n$ 上的任一个多项式向量场的流都可被 (1.1) 类和 (1.2) 类全纯自同构 ($k=1$) 的复合紧致逼近. 第 4 步 (此步需要用到引理 1.1), 设 W 是 $\mathbb{C}^n$ 上的任一个多项式向量场, 则 W 是有限个形如引理 1.1 中的向量场的和, 可以证明 W 的流可被这些向量场的流的有限复合紧致逼近, 而这些向量场的流都是 (1.1) 类和 (1.2) 类全纯自同构 ($k=1$) 的

有限复合, 因此 W 的流可被 (1.1) 类和 (1.2) 类自同构 ($k=1$) 的有限复合紧致逼近, 这就完成了证明. □

现在我们对 (1.1) 类和 (1.2) 类自同构作更细致的考察. 当我们分别限制 $k=1,\dots,n-1$ 时 (1.1) 类和 (1.2) 类自同构分别生成 $n-1$ 个子群 $G_1,G_2,\dots,G_{n-1}$, 显然有子群链关系 $G_1\leqslant G_2\leqslant\cdots\leqslant G_{n-1}$. Andersén 和 Lempert 的原始论文证明的是 G_1 在 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 中稠密, 而 G_{n-1} 仅为 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 的第一纲真子群. 于是就产生了一个自然的问题: *是否有 $G_1<G_2<\cdots<G_{n-1}$?* Forstnerič 在一篇关于 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 的综述文章中提及了这个问题 (参见文献 [19, 问题 6]). 近期作者给出了这个问题的肯定回答, 其证明的核心思想与定理 1.1 第二部分的证明是一致的.

定理 1.2 (参见文献 [43, 定理 1.1]) 当 $n\geqslant 3$ 时, $G_1<G_2<\cdots<G_{n-1}$ 成立.

注 1.2 若我们进一步限制 (1.1) 类和 (1.2) 类自同构都是多项式则有 $G_1=G_2=\cdots=G_{n-1}$ (参见文献 [54, 定理 5.2.1]).

现在我们只关注 (1.1) 类自同构, 这类自同构都是保体积的, 即 $F^*\Omega=\Omega$, 或者说 $\det \mathrm{D}F=1$, 此处 $\Omega=dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$. 记 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 中那些保体积自同构构成的子群为

$$\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n):=\{F\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n):\det\mathrm{D}F=1\},$$

这是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 的一个闭子群, 因此它是一个 Baire 空间. 一个自然的问题是 (1.1) 类自同构生成的子群与 $\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n)$ 有何关系? Rosay 和 Rudin 在 1988 年的文章 [51] 中问到: *是否任意 $F\in\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n)$ 都可被 (1.1) 类自同构的有限复合紧致逼近?* Andersén 在 1990 年的文章 [1] 中给了这个问题的肯定回答, 这篇文章是 Andersén-Lempert 理论的第一篇论文.

定理 1.3 (参见文献 [1, 定理 C] 和 [3, 定理 1.1]) 在紧开拓扑下, (1.1) 类自同构 (限制 $k=1$) 生成 $\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n)$ 的一个稠密子群, 但 (1.1) 类自同构 ($k=n-1$) 加任意可数多个保体积全纯自同构只能生成 $\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n)$ 的一个第一纲真子群.

注 1.3 定理 1.3 的第二部分包含在 Andersén 和 Lempert 1992 年的论文中 (具体可参见文献 [3, 定理 1.1]).

与定理 1.1 类似, 证明定理 1.3 的关键是一个关于多项式的引理:

引理 1.2 (参见文献 [21, 引理 4.9.9]) 全体 m 次齐次多项式零散 (即 $\sum\partial_{z_j}P_j=0$) 向量场 $P=(P_1,\dots,P_n):\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 构成的复线性空间有一组如下形式的基:

$$(\Lambda_1 z)^m v_1,\ \dots,\ (\Lambda_{N_2}z)^m v_{N_2},$$

其中 $\Lambda_j:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ 是线性泛函, $v_j\in\mathbb{C}^n$ 满足 $\Lambda_j v_j=0$.

在偶数维的情形, Forstnerič 还考虑了一个更小的子群, 称作辛全纯自同构群:

$$\mathrm{Aut}_{sp}(\mathbb{C}^{2n}):=\{F\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{2n}):\mathrm{D}F^{\mathrm{T}}J\mathrm{D}F=J\},\quad J:=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix},$$

这也是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{2n})$ 的一个闭子群, 因此它也是一个 Baire 空间. 易知

$$\mathrm{Aut}_{sp}(\mathbb{C}^{2n})\begin{cases}=\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^2), & n=1,\\ <\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^{2n}), & n>1.\end{cases}$$

这个群中有一类称作辛 shear 的简单的自同构, 如下:

$$z \mapsto z + f(z^{\mathrm{T}} J v) v, \tag{1.5}$$

其中 $z, v \in \mathbb{C}^{2n}$ 是列向量, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{2n})$. 可以证明 (1.5) 是 (1.1) 在 $2n$ 维情形下的 $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ 共轭, 而且线性的 (1.5) 类自同构能生成 $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ (参见文献 [39, 第 6.9 节]). 如下定理成立:

定理 1.4 (参见文献 [18, 定理 5.1] 和 [43, 定理 1.3])　在紧开拓扑下, (1.5) 类自同构生成 $\mathrm{Aut}_{sp}(\mathbb{C}^{2n})$ 的一个稠密但为第一纲的真子群.

证明定理 1.4 的关键是以下关于多项式的引理.

引理 1.3 (参见文献 [18, 命题 5.2])　全体 m 次齐次多项式哈密顿 (即 $\mathrm{D}P^{\mathrm{T}} J + J\mathrm{D}P = 0$) 向量场 $P : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ 构成的复线性空间有一组如下形式的基

$$(z^{\mathrm{T}} J v_1)^m v_1, \ \ldots, \ (z^{\mathrm{T}} J v_{N_3})^m v_{N_3},$$

其中 $v_j \in \mathbb{C}^{2n}$.

注意到 $(z^{\mathrm{T}} J v_j)^m v_j$ 是一个完备的全纯向量场, 它生成 $\mathrm{Aut}_{sp}(\mathbb{C}^{2n})$ 的单参数子群

$$z \mapsto z + t(z^{\mathrm{T}} J v_j)^m v_j,$$

这恰好是 (1.5) 类自同构.

1.2　$(\mathbb{C}^*)^n$ 的全纯自同构群及其子群

本小节考虑 $(\mathbb{C}^*)^n$ 的全纯自同构群以及它的一些子群, 此处 $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$, 目标是建立类似定理 1.1 的结果. 我们要考虑的都是 $\mathrm{Aut}((\mathbb{C}^*)^n)$ 的闭子群, 因此它们都是 Baire 空间.

与研究 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 的方法类似, 首先是寻找一些简单的自同构, 注意到 (1.4) 其实也是 $(\mathbb{C}^*)^n$ 的全纯自同构并且它保 $(\mathbb{C}^*)^n$ 的不变体积形式 ω, 即 $F^*\omega = \omega$, 此处

$$\omega := \frac{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{z_1 \cdots z_n}.$$

所以我们先考虑 $\mathrm{Aut}((\mathbb{C}^*)^n)$ 中那些可延拓成 $\mathbb{C}^n$ 的自同构且保 ω 的自同构构成的子群:

$$\mathrm{Aut}_\omega(\mathbb{C}^n) := \{F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n) : F^*\omega = \omega\},$$

显然 (1.4) 属于这个群. $\mathrm{Aut}_\omega(\mathbb{C}^n)$ 中的另一种简单自同构为偶置换映射

$$T_\sigma : z \mapsto (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}), \tag{1.6}$$

其中 σ 是 $\{1, \ldots, n\}$ 的一个偶置换. 对于 $\mathrm{Aut}_\omega(\mathbb{C}^n)$, 我们有如下结构定理.

定理 1.5 (参见文献 [45])　在紧开拓扑下, (1.4) 类和 (1.6) 类自同构生成 $\mathrm{Aut}_\omega(\mathbb{C}^n)$ 的一个稠密但为第一纲的真子群. 更进一步地, 对任意 $F \in \mathrm{Aut}_\omega(\mathbb{C}^n)$, 都有唯一的偶置换映射 T_σ 使得 $T_\sigma \circ F$ 可被以下两类自同构的有限复合紧致逼近:

$$\begin{aligned} &z \mapsto (z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k \mathrm{e}^{b z^\alpha}, z_{k+1}, \ldots, z_n), \\ &z \mapsto (z_1, \ldots, z_{j-1}, z_j \mathrm{e}^{c\beta_l z^\beta}, z_{j+1}, \ldots, z_{l-1}, z_l \mathrm{e}^{-c\beta_j z^\beta}, z_{l+1}, \ldots, z_n), \end{aligned}$$

其中 $b \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 满足 $\alpha_k = 0$, $c \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{N}^n$.

证明以上定理也是需要一个关于多项式的关键引理, 如下.

引理 1.4 (参见文献 [45]) 满足 $z_j \mid p_j$, $j = 1, \ldots, n$ 且

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_j}{\partial z_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{z_j}$$

的 m 次齐次多项式 $P = (p_1, \ldots, p_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 构成的复线性空间有一组如下形式的基:

$$z^\alpha z_k \mathrm{e}_k, \quad \beta_l z^\beta z_j \mathrm{e}_j - \beta_j z^\beta z_l \mathrm{e}_l,$$

其中 $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准基, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 满足 $\|\alpha\|_1 = m-1$ 且 $\alpha_k = 0$, $\beta \in \mathbb{N}^n$ 满足 $\|\beta\|_1 = m-1$ 且 $\min_{\beta_i \neq 0}\{i\} =: j < l \leqslant n$, $\beta_l \neq 0$.

注意到完备向量场 $z^\alpha z_k \mathrm{e}_k$ 生成 $\mathrm{Aut}_\omega(\mathbb{C}^n)$ 的单参数子群

$$z \mapsto (z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k \mathrm{e}^{tz^\alpha}, z_{k+1}, \ldots, z_n),$$

而完备向量场 $\beta_l z^\beta z_j \mathrm{e}_j - \beta_j z^\beta z_l \mathrm{e}_l$ 生成 $\mathrm{Aut}_\omega(\mathbb{C}^n)$ 的单参数子群

$$z \mapsto (z_1, \ldots, z_{j-1}, z_j \mathrm{e}^{t\beta_l z^\beta}, z_{j+1}, \ldots, z_{l-1}, z_l \mathrm{e}^{-t\beta_j z^\beta}, z_{l+1}, \ldots, z_n),$$

它们有着定理 1.5 中的两类自同构的形式.

接下来我们考虑一个更小的子群, 这是为了回应 Rosay 和 Rudin 在 1988 年提出的一个公开问题. 记

$$E = \{z \in \mathbb{C}^n : z_1 \cdots z_n = 0\},$$

考虑子群

$$\mathrm{Aut}_\omega(\mathbb{C}^n)_E := \{F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n) : F^*\omega = \omega,\ F|_E = \mathrm{Id}\}.$$

Rosay 和 Rudin 提的问题为: *是否每一个满足 $F|_E = \mathrm{Id}$ 的 $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 都是有限个固定 E 每个点的 (1.3) 类自同构的复合?* 本文作者近期给出了这个问题的否定回答. 不难验证, 要求自同构 (1.4) 固定 E 的每个点, 其实就是加上条件

$$z_1 \cdots z_n \mid c_j z_j \sum a_\alpha z^\alpha, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

我们建立的定理如下.

定理 1.6 (参见文献 [45]) 在紧开拓扑下, 带条件 (1.7) 的 (1.4) 类自同构生成 $\mathrm{Aut}_\omega(\mathbb{C}^n)_E$ 的一个稠密但为第一纲的真子群. 更进一步地, 任意 $F \in \mathrm{Aut}_\omega(\mathbb{C}^n)_E$ 都可被以下两类自同构的有限复合紧致逼近:

$$z \mapsto (z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k \mathrm{e}^{bz^\alpha}, z_{k+1}, \ldots, z_n),$$
$$z \mapsto (z_1, \ldots, z_{j-1}, z_j \mathrm{e}^{c\beta_n z^\beta}, z_{j+1}, \ldots, z_{n-1}, z_n \mathrm{e}^{-c\beta_j z^\beta}),$$

其中 $b \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 满足 $\alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha_k}, \ldots, \alpha_n > 0$ 但 $\alpha_k = 0$, $c \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $\beta \in (\mathbb{N}^+)^n$.

证明以上定理也是需要一个关于多项式的如下关键引理.

引理 1.5 (参见文献 [45]) 满足 $z_1\cdots z_n \mid p_j,\ j=1,\dots,n$ 且

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_j}{\partial z_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j}{z_j}$$

的 m 次齐次多项式 $P=(p_1,\dots,p_n):\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 构成的复线性空间有一组如下形式的基:

$$z^\alpha z_k\mathrm{e}_k,\quad \beta_n z^\beta z_j\mathrm{e}_j-\beta_j z^\beta z_n\mathrm{e}_n,$$

其中 $\mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准基, $1\leqslant k\leqslant n$, $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 满足 $\|\alpha\|_1=m-1$ 且 $\alpha_1,\dots,\widehat{\alpha_k},\dots,\alpha_n>0$ 但 $\alpha_k=0$, $1\leqslant j\leqslant n-1$, $\beta\in(\mathbb{N}^+)^n$ 满足 $\|\beta\|_1=m-1$.

同样地, 以上引理中的两类多项式向量场都是完备的, 它们生成的单参数子群有着定理 1.6 中的两类自同构的形式.

最后我们再考虑以下群:

$$\mathrm{Aut}_\omega((\mathbb{C}^*)^n):=\{F\in\mathrm{Aut}((\mathbb{C}^*)^n):F^*\omega=\omega\}.$$

注意到若将自同构 (1.4) 中的级数全纯条件要求放宽为亚纯, 那么 (1.4) 还是 $(\mathbb{C}^*)^n$ 的一个全纯自同构. 即

$$z\mapsto(z_1\mathrm{e}^{c_1\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}a_\alpha z^\alpha},\dots,z_n\mathrm{e}^{c_n\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}a_\alpha z^\alpha}),\tag{1.8}$$

其中 $c:=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{C}^n$, $\sum a_\alpha z^\alpha\in\mathcal{O}((\mathbb{C}^*)^n)$ 满足若 $c\cdot\alpha:=\sum c_j\alpha_j\neq0$ 则 $a_\alpha=0$. 同样地, 若将 c 换为 $-c$, 我们便得到 (1.8) 的逆.

目前被找出的 $(\mathbb{C}^*)^n$ 的另一种简单自同构为以下有理映射:

$$R_A:z\mapsto(z_1^{a_{11}}\cdots z_n^{a_{1n}},\dots,z_1^{a_{n1}}\cdots z_n^{a_{nn}}),\tag{1.9}$$

其中 $A:=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$. 可验证有 $R_A^{-1}=R_{A^{-1}}$. 我们有以下定理.

定理 1.7 (参见文献 [45]) 在紧开拓扑下, (1.8) 类和 (1.9) 类自同构生成 $\mathrm{Aut}_w((\mathbb{C}^*)^n)$ 的一个第一纲真子群.

如果将 (1.9) 中的条件 $A\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ 放宽为 $A\in\pm\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, 则我们同样可以得出类似的结论: *在紧开拓扑下, (1.8) 类和 (1.9) 类 ($A\in\pm\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$) 自同构生成 $\mathrm{Aut}_{\pm\omega}(\mathbb{C}^n)$ 的一个第一纲真子群.* 此处 $\mathrm{Aut}_{\pm\omega}(\mathbb{C}^n):=\{F\in\mathrm{Aut}((\mathbb{C}^*)^n):F^*\omega=\pm\omega\}$. 这否定了 Andersén 的一个猜测 (参见文献 [2, p.1079]): *$n=2$ 时, 每一个 $F\in\mathrm{Aut}((\mathbb{C}^*)^2)$ 都是有限个 (1.8) 类和 (1.9) 类 ($A\in\pm\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$) 自同构的复合.*

注 1.4 与本小节和第一小节的其他定理相比, 我们未能证得定理 1.7 中生成的子群是稠密的.

注 1.5 并不是每一个 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 的子群都满足类似本小节和第一小节几个定理中 "第一纲" 的性质, 例如 $\{F\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2):\det\mathrm{D}F=1,\ F|_E=\mathrm{Id}\}$ 恰好由其中的全部简单自同构

$$z\mapsto(z_1\mathrm{e}^{f(z_1z_2)},z_2\mathrm{e}^{-f(z_1z_2)})$$

组成 (参见文献 [50]), 此处 $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$, $f(0)=0$.

本小节考虑的自同构都满足 $F^*\omega=\pm\omega$, 这是因为我们目前找到的 $(\mathbb{C}^*)^n$ 的自同构都满足这个条件. 事实上, 这里有一个长期悬而未决的猜想[22]: *任意 $F\in\mathrm{Aut}((\mathbb{C}^*)^n)$ 都有 $F^*\omega=\pm\omega$.*

1.3 $\mathbb{C}^n$ 的全纯自同构的插值

本小节考虑 $\mathbb{C}^n$ 的全纯自同构的插值问题, 目标是建立全纯自同构、保体积全纯自同构以及辛全纯自同构在一类可数点集上的高阶插值定理.

我们将用记号 $F_{m,a}$ 表示全纯映射 $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 在点 $a\in\mathbb{C}^n$ 处的不含常数项的 m 阶 Taylor 多项式, 即

$$F_{m,a}(z):=\sum_{0<|\alpha|\leqslant m}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}(a)z^\alpha.$$

于是我们有

$$F(z+a)=F(a)+F_{m,a}(z)+O(|z|^{m+1}),\quad z\to 0. \tag{1.10}$$

若 P 是一个多项式且 $P(0)=0$, $\mathrm{deg}P\leqslant m$, 此处 $m\geqslant 1$ 是一个整数, $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 是一个全纯映射, 则在我们的记号下 $F_{m,a}=P$ 表达的是 F 在 $a\in\mathbb{C}^n$ 处的 1 阶到 m 阶导数由 P 的系数相应给出. 现在设 $F\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$, $a\in\mathbb{C}^n$, 我们来考察 $F_{m,a}$ 满足什么必要条件. 显然 $\det\mathrm{D}P(0)\neq 0$ 是必要的, 这是因为全纯自同构在每一点处都是非退化的, 再进一步假设 $F\in\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n)$, 则利用 (1.10) 可得

$$\det\mathrm{D}P(z)=1+O(|z|^m),\quad z\to 0.$$

若另有 $F\in\mathrm{Aut}_{sp}(\mathbb{C}^{2n})$, $a\in\mathbb{C}^{2n}$, 则类似地可由 (1.10) 推导出

$$\mathrm{D}P(z)^{\mathrm{T}}J\mathrm{D}P(z)=J+O(|z|^m),\quad z\to 0.$$

这启发我们引入以下定义.

定义 1.1 (参见文献 [20, 44, 47]) 若 $P:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 是一个多项式且 $P(0)=0$, $\deg P\leqslant m$, $\det\mathrm{D}P(0)\neq 0$, 则称 P 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个 m 阶 A-jet. 如果进一步地还有 $\det\mathrm{D}P(z)=1+O(|z|^m)$, $z\to 0$, 则称 P 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个 m 阶 A_1-jet. 如果 $P:\mathbb{C}^{2n}\to\mathbb{C}^{2n}$ 是一个多项式且 $P(0)=0$, $\deg P\leqslant m$, $\mathrm{D}P(z)^{\mathrm{T}}J\mathrm{D}P(z)=J+O(|z|^m)$, $z\to 0$, 则称 P 是 $\mathbb{C}^{2n}$ 的一个 m 阶辛 -jet.

三类 jet 的定义都是可判定的, 也就是说对每一个具体的多项式我们都可以经过计算确定它是否属于这三类 jet. 在我们的定义下, 前文的推导结论可以简单表达为: 如果 $F\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$, $a\in\mathbb{C}^n$, 则 $F_{m,a}$ 是一个 m 阶 A-jet; 若进一步地有 $F\in\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n)$, 则 $F_{m,a}$ 是一个 A_1-jet; 若 $F\in\mathrm{Aut}_{sp}(\mathbb{C}^{2n})$, $a\in\mathbb{C}^{2n}$, 则 $F_{m,a}$ 是一个 m 阶辛 -jet. 这个命题反过来也是对的: 若 P 是一个 m 阶 A-jet, $a\in\mathbb{C}^n$, 则存在 $F\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 使得 $F_{m,a}=P$ (参见文献 [20, 命题 2.1]); 若进一步地 P 是一个 A_1-jet, 则可有 $F\in\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n)$ (参见文献 [3, 命题 6.3]); 若 P 是一个 m 阶辛 -jet, $a\in\mathbb{C}^{2n}$, 则存在 $F\in\mathrm{Aut}_{sp}(\mathbb{C}^{2n})$ 使得 $F_{m,a}=P$ (参见文献 [47, 定理 1]). 以上命题即可视作 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$, $\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n)$ 和 $\mathrm{Aut}_{sp}(\mathbb{C}^{2n})$ 的单点高阶插值问题的解. 但我们并不满足于此, 我们希望得到可数点集上的高阶插值问题的解, 但这并不总是有解的, 这是因为有如下 1988 年由 Rosay 和 Rudin 发现的定理:

定理 1.8 (参见文献 [51, 推论 5.3]) 存在 $\mathbb{C}^n$ 中的可数点集族 $\{E_\alpha:\alpha\in\mathbb{R}\}$ 满足其中任意两个点集都不是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 等价的, 即对任意 $\alpha\neq\beta\in\mathbb{R}$, 都不存在 $F\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 使得 $F(E_\alpha)=E_\beta$.

以上定理告诉我们, 对于 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$, 在一般的可数点集上, 即使是零阶插值问题也有可能是无解的, 因此我们只能考虑在一些特殊的可数点集上建立插值定理. 在上述定理的同一篇文章中, Rosay

和 Rudin 就已引入了为一种性质良好的点集, 后来 Forstnerič 和 Buzzard 就是在这个点集上解决了 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 和 $\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n)$ 的高阶插值问题, $\mathrm{Aut}_{sp}(\mathbb{C}^{2n})$ 的高阶插值问题的解则由本文作者林章立 - 周向宇近期给出. 现在我们给出这些点集的定义, 判定定理和一些基本的性质.

定义 1.2 (参见文献 [4, 44, 51])　设 $E=\{a_k\}_{k\geqslant 1}\subset\mathbb{C}^n$, 若存在 $F\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 使得 $F(a_k)=(k,0,\ldots,0)$ 对任意 k 成立, 则称 E 是一个 $\mathbb{C}^n$ 中的 tame 集; 若进一步地有 $F\in\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n)$, 则称 E 是一个 very tame 集. 若 $E=\{a_k\}_{k\geqslant 1}\in\mathbb{C}^{2n}$, $F\subset\mathrm{Aut}_{sp}(\mathbb{C}^{2n})$ 使得 $F(a_k)=(k,0,\ldots,0)$ 对任意 k 成立, 则称 E 是一个 $\mathbb{C}^{2n}$ 中的辛 tame 集.

定义中称作 tame 集而不称作 tame 点列是合理的, 这是因为 tame 集的定义与点列的排列无关, 有以下命题成立.

命题 1.1 (参见文献 [51, 命题 3.1] 和 [4, 引理 3.3])　若 $E=\{a_k\}_{k\geqslant 1}\subset\mathbb{C}^n$ 是 tame 集, $\{b_k\}_{k\geqslant 1}$ 是 E 的另一个重排, 则存在 $F\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 使得 $F(a_k)=b_k$ 对任意 k 成立. very tame 集与辛 tame 集也同样有这种可置换性.

接下来我们给出 tame 集的一个几何判别法.

定理 1.9 (参见文献 [51, 定理 3.5 + 3.9]、[4, 命题 3.6] 和 [44])　设 E 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个可数离散闭子集. 若存在 $1\leqslant k<n$, 使得 $\pi(E)$ 是 $\mathbb{C}^k$ 中的离散闭子集, 此处 $\pi(z)$ 是 $z\in\mathbb{C}^n$ 的前 k 个分量, 则 E 是 tame 集, 若进一步地还有 $\forall\, p\in\pi(E)$, E 中只有有限个点 z 满足 $\pi(z)=p$, 则 E 是 very tame 集. 若 $E\subset\mathbb{C}^{2n}$, $\pi'(E)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的离散闭子集, 此处 $\pi'(z)$ 是 $z\in\mathbb{C}^{2n}$ 的前 n 个分量, 且有 $\forall\, p\in\pi(E)$, E 中只有有限个点 z 满足 $\pi'(z)=p$, 则 E 是辛 tame 集.

三类 tame 集有以下基本性质.

命题 1.2 (参见文献 [51, 推论 3.6] 和 [44])　tame 集的无限子集也是 tame 集, tame 集与有限集的并也是 tame 集, 可数离散闭子集都是两个 tame 集的并. very tame 集和辛 tame 集同样有这三条性质.

以上定理和命题显示三类 tame 集都是非常常见的. 最终我们建立的插值定理为:

定理 1.10 (参见文献 [13, 定理 1.2])　设 $\{a_j\}_{j\geqslant 1}$ 和 $\{b_j\}_{j\geqslant 1}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的 tame (或 very tame) 集, P_j 是 $\mathbb{C}^n$ 中的 m_j 阶 A-jet (或 A_1-jet), 则存在 $F\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ (或 $\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n)$) 使得

$$F(a_j)=b_j,\quad F_{m_j,a_j}=P_j,\quad \forall\, j\geqslant 1.$$

若另外还有多项式紧凸集 $K\subset\mathbb{C}^n-\{a_j\}$, $G\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ (或 $\mathrm{Aut}_1(\mathbb{C}^n)$) 满足 $G(K)$ 不含任何 b_j, 则可使 F 在 K 上任意逼近 G.

定理 1.11 (参见文献 [44])　设 $\{a_j\}_{j\geqslant 1}$ 和 $\{b_j\}_{j\geqslant 1}$ 是 $\mathbb{C}^{2n}$ 中的辛 tame 集, P_j 是 $\mathbb{C}^{2n}$ 中的 m_j 阶辛 -jet, 则 $\exists\, F\in\mathrm{Aut}_{sp}(\mathbb{C}^{2n})$ 使得

$$F(a_j)=b_j,\quad F_{m_j,a_j}=P_j,\quad \forall\, j\geqslant 1.$$

若另外有多项式紧凸集 $K\subset\mathbb{C}^{2n}-\{a_j\}$, $G\in\mathrm{Aut}_{sp}(\mathbb{C}^{2n})$ 满足 $G(K)$ 不含任何 b_j, 则可使 F 在 K 上任意逼近 G.

以上定理显示, 我们不仅在三类 tame 集上建立了相应全纯自同构的高阶插值定理, 还实现了对预先给定自同构的逼近.

2 最优开性 L^2 延拓及相关问题

在多复变函数论中, 将子流形上的全纯函数 (截面) 全纯地延拓至母流形, 是一个基本且重要的问题. 根据 Oka 和 Cartan 的定理, 若母流形是 Stein 的, 则全纯延拓总是存在. 但人们往往还希望延拓后的函数 (截面) 满足一定的控制条件, 譬如有 L^2 延拓问题: *给定复流形 M, 复子流形 $S \subset M$ 以及全纯 Hermite 向量丛 $E \to M$, 假设它们满足自然的条件; 任给 S 上平方可积的全纯截面 $f \in \Gamma(S,E)$, 是否可找到 M 上的全纯截面 $F \in \Gamma(M,E)$ 使得 $F|_S = f$ 且 $\|F\|_{L^2(M)}$ 由 $\|f\|_{L^2(S)}$ 一致地控制*. 关于这一问题的奠基性结果是 1987 年的 Ohsawa-Takegoshi L^2 延拓定理:

定理 2.1 (参见文献 [49]) 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界拟凸域, φ 是 Ω 上的多次调和函数, $H := \{z_n = 0\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的超平面. 任给 $\Omega \cap H$ 上的全纯函数 f, 如果 $\int_{\Omega\cap H} |f|^2 \mathrm{e}^{-\varphi} d\lambda < +\infty$, 那么存在 Ω 上的全纯函数 F 使得 $F|_{\Omega\cap H} = f$ 且

$$\int_\Omega |F|^2 \mathrm{e}^{-\varphi} d\lambda \leqslant C \int_{\Omega\cap H} |f|^2 \mathrm{e}^{-\varphi} d\lambda.$$

这里的 C 是一个仅依赖于 $R := \sup_{z\in\Omega} |z_n|$ 的常数.

此后, 包括 Berndtsson, Demailly, Manivel, McNeal, Ohsawa, 萧荫堂, Varolin 等在内的许多知名学者都曾致力于推广 Ohsawa-Takegoshi 的定理. 现如今, 各种形式的 L^2 延拓定理在多复变和复几何的许多核心问题中有着重要的应用, 例如: 多次调和函数的正则化技术 (Demailly), 多亏格的形变不变性 (萧荫堂), 乘子理想层的强开性质 (关启安 - 周向宇) 等. L^2 延拓问题近十几年来的一大突破是 Błocki[8] 和关启安 - 周向宇[29,30,33] 基于朱朗峰 - 关启安 - 周向宇[59] 的工作证明了具有最优估计的 L^2 延拓定理. 举例来说, 定理 2.1 中最优的一致常数是 $C = \pi R^2$. 在文献 [59] 中, 不同于以往的显式函数法, 作者们对扭因子和权函数引入待定函数, 并找到待定函数的非线性常微分方程加以数值求解, 从而得到了接近最优的 L^2 延拓定理, 这是解决最优 L^2 延拓问题的一个转折点. 利用最优 L^2 延拓定理, 关启安 - 周向宇[29,30] 彻底解决了 Suita[53] 提出的有关黎曼面的 Bergman 核与对数容度的猜想 (包括不等式部分及更困难的等式部分, 平面域的不等式部分的解答参见文献 [8]). 关启安 - 周向宇[30] 利用最优 L^2 延拓定理证明了 Bergman 核的多次调和变分性质, 这个结果起初是由 Maitani-Yamaguchi 和 Berndtsson 得到的. 关启安 - 周向宇[30] 还发现了最优 L^2 延拓定理的一种几何性质, 这在 Hacon-Popa-Schnell[34] 有关 Iitaka 猜想的进展工作中被作为其工作的一个 "主要创新点" 加以应用.

2.1 最优开性 L^2 延拓

我们考虑一个类似的问题: *给定复流形 M、解析集 $S \subset M$、开邻域 $U \supset S$ 以及全纯 Hermite 向量丛 $E \to M$, 假设它们满足适当的条件; 任给 U 上平方可积的全纯截面 $f \in \Gamma(U,E)$, 是否可找到 M 上的全纯截面 $F \in \Gamma(M,E)$ 使得 $F|_S = f|_S$ 且 $\|F\|_{L^2(M)}$ 由 $\|f\|_{L^2(U)}$ 一致地控制*. 为了区别前述的 L^2 延拓问题, 我们把这一问题称为 "**开性 L^2 延拓问题**".

著名的 Hörmander-Bombieri-Skoda 定理 (1970 年代) 可看作是特殊情形的开性 L^2 延拓, 只不过子流形是单点, L^2 估计也未显式地给出. 后来, Jennane[40] 和 Demailly[16,17] 研究了一般情形的开性 L^2 延拓. (开性) L^2 延拓与 Bergman 核理论密切相关, 譬如 Ohsawa-Takegoshi 写作 [49] 的动机是

研究 Bergman 核的边界增长速率. 在研究 Bergman 核理论时, 陈伯勇[14] 和 Herbort[35] 证明了如下的开性 L^2 延拓定理, 其中的子流形也是单点:

定理 2.2 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界拟凸域. 给定一点 $z_0 \in \Omega$ 和常数 $a > 0$, 令 $U := \{z \in \Omega : G_\Omega(z, z_0) < -a\}$, 那么存在一个与 z_0 无关的常数 $C > 0$ 使得如下等价的命题恒成立:

- (参见文献 [14]) 任给全纯函数 $f \in A^2(U)$, 都存在 $F \in A^2(\Omega)$ 使得 $F(z_0) = f(z_0)$ 且

$$\int_\Omega |F|^2 d\lambda \leqslant C \int_U |f|^2 d\lambda.$$

- (参见文献 [35]) 任给全纯函数 $g \in A^2(\Omega)$, 都有

$$B_\Omega(z_0) \geqslant \frac{|g(z_0)|^2}{C \int_\Omega |g|^2 d\lambda}.$$

此处, $A^2(\cdot)$ 表示 Bergman 空间, B_Ω 表示 Ω 的 Bergman 核, G_Ω 表示 Ω 的多复格林函数. 利用定理 2.2, Błocki-Pflug 和 Herbort 证明了 $\mathbb{C}^n$ 中的有界超凸域上的 Bergman 度量是完备的. 同样的论证也可证明 $\mathbb{C}^n$ 中的有界超凸域上的 Bergman 核是穷竭的. 利用某种乘积技巧, Błocki[9] 证明定理 2.2 中最优的一致常数是 $C = \mathrm{e}^{2na}$: 若 $\Omega = \mathbb{B}^n$ 且 $z_0 = 0$, 则 e^{2na} 不能被替换成任何更小的数. 利用这一最优估计, Błocki 给出了 Suita 猜想的不等式部分的另证和推广 (参见文献 [9, 10]).

Błocki[9] 的结果是单点情形的最优开性 L^2 延拓定理. 在文献 [56] 中, 我们研究了更一般情形的最优开性 L^2 延拓问题:

定理 2.3 设 (Ω, ω) 是一个弱拟凸 Kähler 流形, (E, h) 是 Ω 上的全纯 Hermite 向量丛. 给定 Ω 上的拟多次调和函数 $\psi < 0$ 和 φ. 假设存在 Ω 上连续的实值 $(1,1)$- 形式 $\gamma \geqslant 0$ 和 ρ 满足

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \geqslant \gamma, \quad \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \geqslant \rho, \quad \sqrt{-1}\Theta_{E,h} + \gamma + \rho \geqslant_{\mathrm{Nak}} 0.$$

取定常数 $a > 0$, 令 $\Omega_a := \{z \in \Omega : \psi(z) < -a\}$. 给定全纯截面 $f \in \Gamma(\Omega_a, K_\Omega \otimes E)$, 若

$$\int_{\Omega_a} |f|^2_{\omega,h} \mathrm{e}^{-\varphi} dV_\omega < +\infty,$$

则存在 Ω 上的全纯截面 $F \in \Gamma(\Omega, K_\Omega \otimes E)$ 使得

$$F|_{\Omega_a} - f \in \Gamma(\Omega_a, \mathcal{O}(K_\Omega \otimes E) \otimes \mathcal{I}(\varphi + \psi)) \tag{2.1}$$

且

$$\int_\Omega |F|^2_{\omega,h} \mathrm{e}^{-\varphi} dV_\omega \leqslant \mathrm{e}^a \int_{\Omega_a} |f|^2_{\omega,h} \mathrm{e}^{-\varphi} dV_\omega. \tag{2.2}$$

我们回忆, 弱拟凸流形是指其上存在光滑的多次调和穷竭函数; 拟多次调和函数是指它在局部上可写成多次调和函数与光滑函数之和; 而 $\mathcal{I}(\varphi + \psi)$ 表示 $\varphi + \psi$ 对应的乘子理想层, 即

$$\mathcal{I}(\varphi + \psi)_x := \{f \in \mathcal{O}_x : |f|^2 \mathrm{e}^{-\varphi-\psi} \text{ 在 } x \text{ 附近可积}\}, \quad \forall x \in \Omega.$$

令 $\mathfrak{m}_x$ 表示 $\mathcal{O}_x$ 的极大理想. 如果存在一个解析集 $S \subset \Omega_a$ 使得 $\mathcal{I}(\varphi + \psi)_x \subset \mathfrak{m}_x$ $(\forall x \in S)$, 那么条件 (2.1) 意味着 $F|_S = f|_S$. 因此, 定理 2.3 可以看作是更广泛意义上的开性 L^2 延拓定理. 通过引入乘子理想层, 我们也可以处理高阶的开性 L^2 延拓. 例如, 在定理 2.3 中取 $\psi = 2(n+k)G_\Omega(\cdot, z_0)$ 即可得到如下推论, 这推广了 Błocki[9] 的结果:

推论 2.1 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界拟凸域, φ 是 Ω 上的多次调和函数. 给定 $z_0\in\Omega$, $k\in\mathbb{N}$ 和 $a\in\mathbb{R}_+$, 令 $U:=\{G_\Omega(\cdot,z_0)<-a\}$. 任给全纯函数 $f\in A^2(U;\mathrm{e}^{-\varphi})$, 均存在 $F\in A^2(\Omega;\mathrm{e}^{-\varphi})$ 使得 F 和 f 在 z_0 处是 k 阶相等的, 即对任意满足 $|\alpha|\leqslant k$ 的多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ 都有 $\partial^\alpha F(z_0)=\partial^\alpha f(z_0)$, 且

$$\int_\Omega |F|^2\mathrm{e}^{-\varphi}d\lambda\leqslant \mathrm{e}^{2(n+k)a}\int_U|f|^2\mathrm{e}^{-\varphi}d\lambda.$$

若 $\Omega=\mathbb{B}^n$, $z_0=0$ 且 $\varphi\equiv0$, 容易证明推论中的常数 $\mathrm{e}^{2(n+k)a}$ 不能替换成任何更小的数. 因此, 定理 2.3 和推论 2.1 中的 L^2 估计是最优的. 通过考虑乘积流形还可构造更一般的例子.

下面介绍定理 2.3 的证明思路. 通过改造关启安 - 周向宇[30] 证明最优 L^2 延拓定理的方法, 可以比较容易地证明开性 L^2 延拓的存在性. 但是在考虑弱拟凸 Kähler 流形时, 我们需使用 Demailly 的正则化技术来逼近拟多次调和函数, 进而需要在 $\bar\partial$ 方程中引入误差项以应对正性的损失. 通过选取一组合适的辅助函数 (对应于 Bochner-Kodaira-Nakano 不等式中的权函数与扭因子), 此法得到的一致常数是 e^a+1 (详见文献 [56, 定理 3.1]), 它与最优常数 e^a 之间的误差随 $a\to+\infty$ 是可忽略的.

有两种方式可以得到最优估计. 我们回忆, Błocki[9] 借助 Bergman 核的乘积性质, 从定理 2.2 的一个粗糙版本得到最优版本. 注意到 Bergman 核对应于单点情形的极小 L^2 延拓. 作为替代, 我们证明了一般情形的高阶极小 L^2 延拓也具有乘积性质 (详见文献 [56, 定理 1.6]). 利用乘积技巧以及微积分的初等事实: $\lim_{N\to+\infty}\sqrt[N]{\mathrm{e}^{Na}+1}=\mathrm{e}^a$, 我们可在适当的设定下得到最优开性 L^2 延拓定理.

另一种方式则是借助极小 L^2 积分的凹性理论. 我们沿用定理 2.3 中的记号. 任取一个全纯截面 $\tilde f\in\Gamma(\Omega,K_\Omega\otimes E)$ 使得 $\tilde f|_{\Omega_a}-f\in\Gamma(\Omega_a,\mathcal{O}(K_\Omega\otimes E)\otimes\mathcal{I}(\varphi+\psi))$ 且 $\int_\Omega|\tilde f|^2_{\omega,h}\mathrm{e}^{-\varphi}dV_\omega<+\infty$. 对任意的 $t\geqslant0$, 记 $\Omega_t:=\{\psi<-t\}$, 令 $F_t\in\Gamma(\Omega_t,K_\Omega\otimes E)$ 是满足 $F_t-\tilde f|_{\Omega_t}\in\Gamma(\Omega_t,\mathcal{O}(K_\Omega\otimes E)\otimes\mathcal{I}(\varphi+\psi))$ 且使 $I(t):=\int_{\Omega_t}|F_t|^2_{\omega,h}\mathrm{e}^{-\varphi}dV_\omega$ 取得最小值的唯一的全纯截面. 对于 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的拟凸域而 E 是平凡线丛的情形, 关启安[24] 发现 $r\mapsto I(-\log r)$ 是区间 $(0,1]$ 上的凹函数, 其证明的一个关键引理源自文献 [30]. 利用本质上相同的方法, 我们证明上述凹性在弱拟凸 Kähler 流形和全纯向量丛的情形依然成立. 但通过调整原有的证明路线, 我们还可以顺带地证明极小 L^2 积分的凹性退化为线性的一个必要条件: *若 $I(-\log r)$ 是关于 $r\in(0,1]$ 的线性函数, 则对任意的 $t>0$ 均有 $F_t=F_0|_{\Omega_t}$.* 根据凹函数的性质以及 $I(t)$ 的定义, 可知

$$\int_\Omega|F_0|^2_{\omega,h}\mathrm{e}^{-\varphi}dV_\omega=I(0)\leqslant\mathrm{e}^aI(a)\leqslant\mathrm{e}^a\int_{\Omega_a}|f|^2_{\omega,h}\mathrm{e}^{-\varphi}dV_\omega.$$

由此可见 $F_0\in\Gamma(\Omega,K_\Omega\otimes E)$ 即是满足定理要求的一个开性 L^2 延拓.

在定理 2.3 中, 我们要求 $\sqrt{-1}\partial\bar\partial\psi\geqslant\gamma\geqslant0$, 从而 ψ 是多次调和的. 因连通的紧复流形上的多次调和函数都是常数, 定理 2.3 对紧复流形而言是平凡的. 我们自然希望能证明曲率条件更宽泛的开性 L^2 延拓定理, 以涵盖紧 Kähler 流形这一重要情形. 需要注意, ψ 的多次调和性对于极小 L^2 积分的凹性的证明是至关重要的. 在文献 [57] 中, 我们通过改进和简化原有的方法, 证明了如下的最优开性 L^2 延拓定理:

定理 2.4 设 (Ω,ω) 是一个弱拟凸 Kähler 流形, (E,h) 是 Ω 上的全纯 Hermite 向量丛. 设 $\psi<0$ 和 φ 是 Ω 上的拟多次调和函数, 且存在 Ω 上连续的实值 $(1,1)$- 形式 γ 和 ρ 满足 $\sqrt{-1}\partial\bar\partial\psi\geqslant\gamma$ 和 $\sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi\geqslant\rho$. 假设存在一个常数 $\delta\geqslant0$ 使得

$$\sqrt{-1}\Theta_{E,h}+\rho+t\gamma\geqslant_{\mathrm{Nak}}0,\quad \forall\, t\in[1,1+\delta^{-1}).$$

又设 $c(t)>0$ 是区间 $(-\infty,0)$ 上的递增函数, 满足

$$\varliminf_{t\to-\infty} c(t)\mathrm{e}^{-t}>0,\quad c(0):=\lim_{t\to0^-}c(t)<+\infty\quad 和\quad \int_{-\infty}^{0}c(t)dt<+\infty.$$

取定常数 $a>0$, 令 $\Omega_a:=\{\psi<-a\}$. 给定全纯截面 $f\in\Gamma(\Omega_a,K_\Omega\otimes E)$, 若

$$\int_{\Omega_a}|f|^2_{\omega,h}\mathrm{e}^{-\varphi-\psi}c(\psi)dV_\omega<+\infty,$$

则存在 Ω 上的全纯截面 $F\in\Gamma(\Omega,K_\Omega\otimes E)$ 使得

$$F|_{\Omega_a}-f\in\Gamma(\Omega_a,\mathcal{O}(K_\Omega\otimes E)\otimes\mathcal{I}(\varphi+\psi))$$

且

$$\int_{\Omega}|F|^2_{\omega,h}\mathrm{e}^{-\varphi-\psi}c(\psi)dV_\omega\leqslant\frac{\delta c(0)+\int_{-\infty}^{0}c(t)dt}{\int_{-\infty}^{-a}c(t)dt}\int_{\Omega_a}|f|^2_{\omega,h}\mathrm{e}^{-\varphi-\psi}c(\psi)dV_\omega.$$

注意, 如果 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi\geqslant\gamma\geqslant0$, $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi\geqslant\rho$ 且 $\sqrt{-1}\Theta_{E,h}+\rho+\gamma\geqslant_{\mathrm{Nak}}0$, 那么定理 2.4 中的常数 δ 可取成 0. 在这种曲率条件下, 我们取 $c(t)\equiv\mathrm{e}^t$, 则定理 2.4 退化为定理 2.3. 可以构造例子说明定理 2.4 中的 L^2 估计也是最优的.

2.2　最优开性 L^2 延拓的若干应用

(1) *最优开性 L^2 延拓的极限情形蕴涵通常意义的最优 L^2 延拓.* 我们以定理 2.1 为例: 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界拟凸域, φ 是 Ω 上的多次调和函数, 令 $R:=\sup_{z\in\Omega}|z_n|$ 和 $S:=\Omega\cap\{z_n=0\}$. 现给定全纯函数 $f\in\mathcal{O}(S)$ 满足 $\int_S|f|^2\mathrm{e}^{-\varphi}d\lambda<+\infty$. 根据 Oka-Cartan 延拓定理, 存在 Ω 上的全纯函数 $\tilde{f}$ 使得 $\tilde{f}|_S=f$. 利用一些标准的论证, 我们不妨假设 $\varphi\in C^\infty(\Omega)$ 且 $\int_\Omega|\tilde{f}|^2\mathrm{e}^{-\varphi}d\lambda<+\infty$. 我们取 $\psi=2\log(|z_n|/R)$, 根据定理 2.3, 任给 $a>0$, 均存在 $F_a\in\mathcal{O}(\Omega)$ 使得 $F_a|_S=\tilde{f}|_S=f$ 且

$$\int_\Omega|F_a|^2\mathrm{e}^{-\varphi}d\lambda\leqslant\mathrm{e}^a\int_{\{\psi<-a\}}|\tilde{f}|^2\mathrm{e}^{-\varphi}d\lambda.$$

仔细计算可知

$$\lim_{a\to+\infty}\mathrm{e}^a\int_{\{\psi<-a\}}|\tilde{f}|^2\mathrm{e}^{-\varphi}d\lambda=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\{|z_n|<R\varepsilon\}}|\tilde{f}|^2\mathrm{e}^{-\varphi}d\lambda=\pi R^2\int_S|f|^2\mathrm{e}^{-\varphi}d\lambda.$$

根据 Montel 定理, 可选取 $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ 使得 $a_j\to+\infty$ 而 F_{a_j} 内闭一致收敛于某个 $F\in\mathcal{O}(\Omega)$. 易知,

$$F|_S=f\quad 且\quad \int_\Omega|F|^2\mathrm{e}^{-\varphi}d\lambda\leqslant\pi R^2\int_S|f|^2\mathrm{e}^{-\varphi}d\lambda.$$

由此我们得到了定理 2.1 的最优形式. 类似的论证适用于更广泛的情形, 譬如我们也可以重新证明 Hosono[37] 关于高阶导数的最优 L^2 延拓定理.

(2) *严格正曲率蕴涵更优的 L^2 估计.* 我们考虑一个比较简单的情形: 设 Ω 是 n 维的弱拟凸 Kälher 流形, (E,h) 是 Ω 上 Nakano 半正定的全纯 Hermite 向量丛, $\psi<0$ 是 Ω 上的多次调和函数; 假设存在 $w\in\Omega$ 附近的一个坐标卡 (U,z) 使得 $z(w)=0$ 且 $\psi-\log|z|$ 在 w 附近有界. 我们记

$dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ 和 $c := \underline{\lim}_{z\to 0}(\psi(z) - \log|z|) \in \mathbb{R}$. 根据最优 L^2 延拓定理 (参见文献 [58]): 任给向量 $\xi \in E_w$, 均存在全纯截面 $F \in \Gamma(\Omega, K_\Omega \otimes E)$ 使得 $F(w) = dz \otimes \xi$ 且

$$\int_\Omega (\sqrt{-1})^{n^2} F \wedge_h \overline{F} \leqslant \frac{(2\pi)^n}{n!} \mathrm{e}^{-2nc} |\xi|_h^2.$$

容易举例说明, 在所考虑的范围内, 上式中的常数 $\frac{(2\pi)^n}{n!}\mathrm{e}^{-2nc}$ 是最优的. 但如果设定的范围变窄了, 则有可能得到更优的 L^2 估计, 例如: 假设 (E,h) 在某点处还是 Nakano 正定的, 通过对度量进行微扰, 可找到全纯截面 $F \in \Gamma(\Omega, K_\Omega \otimes E)$ 使得 $F(w) = dz \otimes \xi$ 且 $\int_\Omega (\sqrt{-1})^{n^2} F \wedge_h \overline{F} < \frac{(2\pi)^n}{n!}\mathrm{e}^{-2nc}|\xi|_h^2$. 利用定理 2.3, 我们在文献 [56] 中证明了一个类似的结果:

定理 2.5 令 $\Omega \ni w$, (E,h) 和 $\psi < 0$ 如上所述. 另外假设 (E,h) 在 w 处还是 Griffiths 正定的, 且 $\psi(z) = c + \log|z| + o(|z|^2)$. 则可找到一个依赖于 h 和 ψ 的常数 $0 < \tau < 1$: 对任意的 $\xi \in E_w$, 均存在全纯截面 $F \in \Gamma(\Omega, K_\Omega \otimes E)$ 使得 $F(w) = dz \otimes \xi$ 且

$$\int_\Omega (\sqrt{-1})^{n^2} F \wedge_h \overline{F} \leqslant (1-\tau)\frac{(2\pi)^n}{n!} \mathrm{e}^{-2nc} |\xi|_h^2.$$

定理 2.5 推广了 Hosono[36] 的结果. 定理的证明思路如下: $\sqrt{-1}\Theta(E,h)|_w >_{\mathrm{Grif}} 0$ 意味着存在满足 "更优 L^2 估计" 的局部全纯延拓, 利用定理 2.3 可以将其延拓为满足 "更优 L^2 估计" 的整体全纯截面. 需注意, Griffiths 正性一般要弱于 Nakano 正性, 而且我们可以给出 τ 的一个显式估计.

基于定理 2.5 的思想, 刘卓 - 徐旺[46] 利用某种 L^2 延拓条件给出了 Griffiths 正性的定量刻画, 这推广了邓富声 - 宁家福 - 汪志威 - 周向宇[15] 的一项结果. 进一步地, 刘卓 - 徐旺[46] 还证明权函数 (或向量丛的度量) 是多调和的 (或平坦的), 当且仅当它满足最优 L^p 延拓条件的等式情形, 这解决了 Inayama[38] 的一个猜想.

(3) *紧流形上的强开性质的整体有效性*. 我们回忆, Demailly 的 "强开性猜想" 是说: 给定多次调和函数 φ, 成立

$$\mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{I}_+(\varphi) := \bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{I}((1+\varepsilon)\varphi).$$

等价地, 给定全纯函数芽 $f_x \in \mathcal{O}_x$, 若 $|f|^2\mathrm{e}^{-\varphi}$ 在 x 附近可积, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $|f|^2\mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)\varphi}$ 在 x 附近也可积. 当 $\mathcal{I}(\varphi)_x = \mathcal{O}_x$ 时, 这一猜想也被称为 "开性猜想". 二维情形的开性猜想和强开性猜想分别被 Favre 和 Jonsson 以及 Jonsson 和 Mustaţă 解决. 利用复 Brunn-Minkowski 理论, Berndtsson[5] 证明了一般维数的开性猜想, 并且给出了 ε 的一个有效估计. 通过动态地使用 L^2 延拓定理 (以往未曾这样使用过), 关启安 - 周向宇[31] 证明了一般维数的强开性猜想. 进一步地, 关启安 - 周向宇[32] 证明了强开性质的有效性结果. 利用极小 L^2 积分的凹性, 关启安[24] 还得到了强开性质的最优有效性结果. 利用定理 2.4 以及文献 [24] 中的方法, 我们可以证明如下的有效性结果:

定理 2.6 设 X 是一个弱拟凸 Kähler 流形, (L,h) 是 X 上的全纯 Hermite 线丛, $\phi < 0$ 是 X 上的拟多次调和函数. 假设 $\theta := \sqrt{-1}\Theta_{L,h} \geqslant 0$ 且存在常数 $\kappa > 1$ 使得 $\theta + \kappa\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi \geqslant 0$. 假设全纯截面 $f \in \Gamma(X, K_X \otimes L)$ 满足

$$\int_X |f|_h^2 \mathrm{e}^{-\phi} < +\infty.$$

给定紧子集 $S \subset X$, 我们定义

$$\alpha_0 := \sup\{p \in (0,\kappa] : f_x \in \mathcal{I}(p\phi)_x, \forall\, x \in S\}.$$

若 $\alpha_0 < \kappa$, 则有

$$\alpha_0 - 1 \geqslant \frac{(\kappa-1)I_0}{\kappa(\int_X |f|_h^2 \mathrm{e}^{-\phi} - \int_X |f|_h^2) + I_0} > 0,$$

其中

$$I_0 := \inf\left\{\int_X |g|_h^2 : g \in \Gamma(X, K_X \otimes L), g_x - f_x \in \mathcal{I}_+(\alpha_0\phi)_x, \forall\, x \in S\right\} > 0.$$

由乘子理想层的强开性和强诺特性易知 $\alpha_0 > 1$, 定理 2.6 则给出了 $\alpha_0 - 1$ 的一个下界估计. 若 X 是 $\mathbb{C}^n$ 中的拟凸域, (L, h) 是平凡线丛, ϕ 是多次调和函数, S 是单点, 令 $\kappa \to +\infty$, 则定理 2.6 退化为关启安[24] 的最优有效性结果. 若 X 是紧 Kähler 流形, 取 $S = X$, 则定理 2.6 给出了 Berndtsson[6] 的结果的有效性估计: Berndtsson 通过发展文献 [5] 中的方法也证明了 $\alpha_0 > 1$.

2.3　广义 Suita 猜想

最优 L^2 延拓问题与 Suita 猜想密切相关. 本小节回顾 Suita 猜想的提出、解决与推广, 并介绍作者在此方面取得的一些进展.

设 Ω 是一个黎曼面, 它的 Bergman 核被定义为

$$\kappa_\Omega(z) := \sup\left\{\sqrt{-1}F(z) \wedge \overline{F(z)} : F \in \Gamma(\Omega, K_\Omega), \int_\Omega \frac{\sqrt{-1}}{2} F \wedge \overline{F} \leqslant 1\right\}.$$

选定 Ω 的一个局部坐标卡 (V, w), 我们记 $\kappa_\Omega|_V = B_\Omega |dw|^2$. 下面假设 Ω 是双曲的, 即 Ω 上存在非平凡的格林函数 G_Ω, 那么 Ω 的对数容度被局部地定义为

$$c_\beta(z_0) := \lim_{z \to z_0} \exp(G_\Omega(z, z_0) - \log|w(z) - w(z_0)|).$$

容易验证, $c_\beta|dw|$ 不依赖于局部坐标的选取. 在 1972 年的文章 [53] 中, Suita 猜测共形度量 $c_\beta|dw|$ 的高斯曲率不超过 -4, 即

$$-\frac{\triangle \log c_\beta}{c_\beta^2} = -\frac{4}{c_\beta^2}\frac{\partial^2 \log c_\beta}{\partial w \partial \bar{w}} \leqslant -4,$$

而且高斯曲率在某点处等于 -4 当且仅当 Ω 共形等价于单位圆盘 (除去一个可能为空的闭极集). Suita[53] 已经证明 $\frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}}(\log c_\beta) = \pi B_\Omega$, 因此上述不等式也等价于

$$\pi B_\Omega(z) \geqslant c_\beta(z)^2.$$

对于边界分支均非退化的双连通区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$, Suita[53] 已经证明 $\pi B_\Omega(z) > c_\beta(z)^2$. 但对于一般的情形, 该猜想长期悬而未决.

Ohsawa[48] 首先注意到了 Suita 猜想中的不等式与 L^2 延拓定理之间的关联, 同时他可以证明 $750\pi B_\Omega(z) \geqslant c_\beta(z)^2$. 一个重要的突破是朱朗峰 - 关启安 - 周向宇[59] 开启了待定函数法, 通过建立常微分方程求解待定函数, 作者们得到了接近最优的估计. 受此影响, Błocki[8] 在平面域情形证明了 Suita 猜想的不等式部分, 而关启安 - 周向宇[29] 则在黎曼面情形证明了 Suita 猜想的不等式部分. 随后, 关启安 - 周向宇[30] 利用更为精细的最优 L^2 延拓定理解决了猜想的等式部分.

定理 2.7 (参见文献 [8] 和 [29,30])　$\pi B_\Omega \geqslant c_\beta^2$. 存在某点 $z_0 \in \Omega$ 使得 $\pi B_\Omega(z_0) = c_\beta(z_0)^2$, 当且仅当 Ω 共形等价于单位圆盘 (除去一个可能为空的闭极集).

在这之后, Błocki[9] 给出了不等式部分基于乘积技巧的另证, Berndtsson-Lempert[7] 则给出了不等式部分基于 Bergman 核的多次调和变分性质的另证. 另一方面, 关启安 - 周向宇[30, 33] 证明了加权 Suita 猜想、等变 Suita 猜想以及 Ohsawa 猜想 (Suita 猜想的一种高维类似), Błocki-Zwonek 则得到了 Suita 猜想的高阶推广 (参见文献 [11]) 和高维推广 (参见文献 [10,12]).

在文献 [56] 中, 我们发现了极小 L^2 积分的凹性退化为线性的一个必要条件. 利用这个必要条件, 我们可给出关启安 - 周向宇[30] 对 Suita 猜想等式部分的证明中某一关键引理的新证明 (参见文献 [56, 第 5.2 节]). 利用同样的方法, 我们在文献 [55] 中统一证明并推广了文献 [11, 30, 33] 的结果.

为此需要引入一些记号. 设 $p:\mathbb{D}\to\Omega$ 是 Ω 的万有覆盖. 因覆盖群 $\mathrm{Deck}(\mathbb{D}/\Omega)$ 同构于 Ω 的基本群 $\pi_1(\Omega)$, 不妨将它们等同. 因此, $\sigma\in\pi_1(\Omega)$ 可看作是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 中的元素, 且 $\sigma\circ p=p$. 任给 $z_0\in\Omega$, 可找到全纯函数 $g\in\mathcal{O}(\mathbb{D})$ 满足 $\log|g|=p^*G_\Omega(\cdot,z_0)$. 对任意的 $\sigma\in\pi_1(\Omega)$, 因 $|\sigma^*g|=|g|$, 存在模长为 1 的常数 $\chi_{z_0}(\sigma)$ 使得 $\sigma^*g\equiv\chi_{z_0}(\sigma)g$. 容易验证, $\chi_{z_0}:\pi_1(\Omega)\to\mathbb{S}^1$ 是一个群同态, 且它与 g 的选取无关. 类似地, 任给 Ω 上的调和函数 η, 总可找到全纯函数 $\xi\in\mathcal{O}(\mathbb{D})$ 满足 $|\xi|=\exp(p^*\eta)$. 对任意的 $\sigma\in\pi_1(\Omega)$, 因 $|\sigma^*\xi|=|\xi|$, 存在模长为 1 的常数 $\chi_\eta(\sigma)$ 使得 $\sigma^*\xi=\chi_\eta(\sigma)\xi$. 容易验证, $\chi_\eta:\pi_1(\Omega)\to\mathbb{S}^1$ 也是一个群同态, 且它与 ξ 的选取无关.

定理 2.8 设 Ω 是双曲黎曼面, η 是 Ω 上的调和函数, (V,w) 是 $z_0\in\Omega$ 附近的坐标卡. 取定非负整数 m, 定义 m- 阶的加权 Bergman 核为

$$B_{\Omega,\eta}^{(m)}(z_0):=\sup\left\{\left|\frac{\partial^m f}{\partial w^m}(z_0)\right|^2: \begin{array}{c} F\in\Gamma(\Omega,K_\Omega),\ \displaystyle\int_\Omega\frac{\sqrt{-1}}{2}F\wedge\overline{F}\mathrm{e}^{-2\eta}\leqslant 1,\\ F|_V=fdw,\ [f]_{z_0}\in\mathfrak{m}_{z_0}^m\end{array}\right\}.$$

那么

$$\pi B_{\Omega,\eta}^{(m)}(z_0)\geqslant m!(m+1)!c_\beta(z_0)^{2m+2}\mathrm{e}^{2\eta(z_0)}. \tag{2.3}$$

进一步地, 等式成立当且仅当 $\chi_\eta\chi_{z_0}^{m+1}=1$, 当且仅当存在全纯函数 $g\in\mathcal{O}(\Omega)$ 使得

$$\log|g|=(m+1)G_\Omega(\cdot,z_0)+\eta.$$

在等式情形, 全纯 1- 形式 $F:=\partial g-2g\partial\eta\in\Gamma(\Omega,K_\Omega)$ 相对于 $B_{\Omega,\eta}^{(m)}(z_0)$ 是极大的.

根据 Minda 的一个定理, 存在 $g\in\mathcal{O}(\Omega)$ 使得 $\log|g|=G_\Omega(\cdot,z_0)$ 当且仅当 Ω 共形等价于单位圆盘 (除去一个可能为空的闭极集). 因此, Suita 猜想是定理 2.8 取 $\eta\equiv 0$ 且 $m=0$ 的情形. 此外, 关启安 - 周向宇[30, 33] 证明的扩充 Suita 猜想是定理 2.8 取 $m=0$ 的情形, Błocki-Zwonek[11] 的结果则是不等式 (2.3) 取 $\eta\equiv 0$ 的情形. 关启安 - 秘志桐 - 袁铮[27] 基于扩充 Suita 猜想的解答, 得到了更为一般的结果, 可涵盖定理 2.8. 但我们的目的在于以一种新方法统一证明文献 [11, 30, 33] 中的结果.

下面考察平面域上的高阶 Suita 猜想. 我们取 $\eta\equiv 0$, 并简记 $B_{\Omega,\eta}^{(m)}$ 为 $B_\Omega^{(m)}$. 根据黎曼映照定理, 任何的单连通区域 $\Omega\subsetneq\mathbb{C}$ 都共形等价于圆盘, 直接计算可知, 对任意的 $z_0\in\Omega$ 和 $m\in\mathbb{N}$, 都有

$$\pi B_\Omega^{(m)}(z_0)=m!(m+1)!c_\beta(z_0)^{2m+2}.$$

接着考虑 n- 连通 $(n\geqslant 2)$ 的平面域 $\Omega\subset\mathbb{C}$. 因孤立点是 L^2 全纯函数和上有界的次调和函数的可去奇点, 我们不妨假设 $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ 的每个连通分支都是非退化的. 当 $n=2$ 时, 这样的双连通区域总是共形等价于某个圆环 $A_R=\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<R\}$. 由圆环的格林函数的显式表达式可知, 若存在正

整数 $1 \leqslant k \leqslant m$ 使得 $|z_0| = R^{\frac{k}{m+1}}$, 则可找到全纯函数 $g \in \mathcal{O}(A_R)$ 满足 $\log|g| = (m+1)G_{A_R}(\cdot, z_0)$. 因此, 根据定理 2.8, 对任意的正整数 $1 \leqslant k \leqslant m$ 和满足 $|z_0| = R^{\frac{k}{m+1}}$ 的点 $z_0 \in A_R$, 均有

$$\pi B_{A_R}^{(m)}(z_0) = m!(m+1)!c_\beta(z_0; A_R)^{2m+2}.$$

令 $q = R^{-1}$ 和 $\tau = \frac{\sqrt{-1}}{\pi}\log R$, 直接计算可知 (参见文献 [42, 命题 5.7]), $m=1$ 时上式等价于

$$\frac{\wp''(\frac{\tau}{2}; 1, \tau)}{32\pi^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 q^k}{1-q^{2k}} = q\frac{\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})^8}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k-1})^8} = \frac{1}{16\pi^4}\frac{\vartheta_1'(0;q)^4}{\vartheta_4(0;q)^4},$$

其中, $\wp$ 是魏尔斯特拉斯椭圆函数, $\vartheta_\bullet$ 是雅可比 Theta 函数.

利用格林函数与调和测度的关系, 关启安 - 孙逊 - 袁铮[28] 证明: 若存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $z_0 \in \Omega$ 使得 $\pi B_\Omega^{(m)}(z_0) = m!(m+1)!c_\beta(z_0)^{2m+2}$, 则必有 $m \geqslant n-1$; 若 $n=3$, 则存在充分大的 $m \in \mathbb{N}$ 和某个 $z_0 \in \Omega$ 使得 $\pi B_\Omega^{(m)}(z_0) = m!(m+1)!c_\beta(z_0)^{2m+2}$. 基于以上结果, 一个自然的问题是, 若 Ω 是边界分支均非退化的 3- 连通区域, 可否找到 $z_0 \in \Omega$ 满足 2- 阶 Suita 猜想的等式情形? 答案是否定的. 任给正整数 $n \geqslant 3$ 和 $M \geqslant 1$, 我们在文献 [55] 中构造了一族具有实解析边界的 n- 连通区域 $\Omega \Subset \mathbb{C}$ 使得

$$\pi B_\Omega^{(m)}(z_0) > m!(m+1)!c_\beta(z_0)^{2m+2}, \quad \forall\, z_0 \in \Omega,\ \forall\, 0 \leqslant m \leqslant M.$$

最后, 我们来讨论 Suita 猜想的高维推广. 设 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界区域. 我们用 $G_D(\cdot, z)$ 表示 D 上以 $z \in D$ 为极点的多复格林函数, 那么 D 的 Azukawa 度量被定义为

$$A_D(z; X) := \overline{\lim_{\lambda \to 0}}(G_D(z + \lambda X, z) - \log|\lambda|), \quad z \in D,\ X \in \mathbb{C}^n,$$

而 D 在 z 处的 Azukawa 指标集被定义为

$$I_D(z) := \{X \in \mathbb{C}^n : A_D(z; X) < 0\}.$$

易知, $A_D(z;\cdot)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的多次调和函数, $I_D(z)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中拟凸的平衡域. (一个区域 $U \subset \mathbb{C}^n$ 被称作是平衡域, 是指 $z \in U$, $\tau \in \mathbb{C}$, $|\tau| \leqslant 1 \Rightarrow \tau z \in U$.)

下面假设 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界拟凸域. 在定理 2.2 中取 $g \equiv 1$ 和 $C = \mathrm{e}^{2na}$, 可得

$$B_D(z_0) \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{2na}\mathrm{Vol}(\{G_D(\cdot, z_0) < -a\})}, \quad \forall\, z_0 \in D,\ \forall\, a \geqslant 0.$$

这是 Błocki[9] 利用某种乘积技巧证明的. Błocki-Zwonek[10] 进一步证明, 如果 D 是有界超凸域, 那么右端的分母随 $a \to +\infty$ 将收敛于 $I_D(z_0)$ 的体积, 于是有

$$B_D(z_0) \geqslant \frac{1}{\mathrm{Vol}(I_D(z_0))}. \tag{2.4}$$

通过逼近可以证明上述不等式对一般的拟凸域都成立. 在一维的时候, 所有的平面域都是拟凸域, 且 $I_D(z_0) = \pi c_\beta(z_0)^{-2}$, 因此上式是 Suita 猜想的一种高维推广.

在定理 2.8 中, 我们给出了一维的广义 Suita 猜想的等式情形的等价刻画. 一个自然的问题是, 对于高维的广义 Suita 猜想, 我们能否刻画其等式情形? 如果 $D \Subset \mathbb{C}^n$ 是一个拟凸的平衡域, 容易证明 $I_D(0) = D$ 且 $B_D(0) = 1/\mathrm{Vol}(D)$, 此时 (2.4) 式在原点处取等号. 在双全纯等价和相差闭多极集

的意义下, 这是以往的文献中关于高维 Suita 猜想的等式情形仅有的例子. 我们自然地发问, 如果 $D \Subset \mathbb{C}^n$ 是一个拟凸域且 (2.4) 式取等号, 那么是否存在一个双全纯映射把 D 映为平衡域 (除去一个可能为空的闭多极集) 且把 z_0 映为原点? 事实上, Błocki-Zwonek 在文献 [10, 猜想 3] 中曾针对 D 是凸域的情形作此提问. 然而, 我们在文献 [55] 中构造了如下的例子.

定理 2.9 设 $\Omega \Subset \mathbb{C}_z$ 是有界平面域, η 是 Ω 上的调和函数. 设 $D \Subset \mathbb{C}^n_w$ 是拟凸的平衡域, 记它的 Minkowski 泛函为 h. 考虑如下的广义 Hartogs 域:

$$\tilde{\Omega} = \{(z, w) \in \Omega \times \mathbb{C}^n : h(w) < \mathrm{e}^{-\eta(z)}\}.$$

若存在 Ω 上的全纯函数 $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ 使得 $\log |g| = G_\Omega(\cdot, z_0) + n\eta$, 则有

$$B_{\tilde{\Omega}}((z_0, 0)) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(I_{\tilde{\Omega}}((z_0, 0)))}.$$

定理 2.9 的证明基于定理 2.8、Ligocka 公式和一个简单的观察:

$$G_{\tilde{\Omega}}((z, w), (z_0, 0)) \geqslant \max\{G_\Omega(z, z_0), \log h(w) + \eta(z)\}.$$

我们可以容易地找到满足定理要求的 Ω 和 η: 任给平面域 $\Omega \Subset \mathbb{C}$, 可选取一个全纯函数 $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ 使得 $z_0 \in \Omega$ 是它唯一的零点且其重数为 1, 例如 $g(z) = z - z_0$, 那么

$$\eta := \frac{\log |g| - G_\Omega(\cdot, z_0)}{n}$$

是 Ω 上的调和函数且满足 $\log |g| = G_\Omega(\cdot, z_0) + n\eta$. 我们注意到平衡域都是可缩空间, 但 Hartogs 域 $\tilde{\Omega}$ 总是同伦等价于底空间 Ω, 而 Ω 的拓扑可以任意地复杂.

Błocki 和 Zwonek 还研究了高维 Suita 猜想的进一步推广. 设 $H(z) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯齐次多项式, 可按如下方式定义一个微分算子 ∂^H_z:

$$\partial^H_z f := \sum\nolimits_{|\alpha|=m} c_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}.$$

给定区域 $D \Subset \mathbb{C}^n$, 考虑广义的 Bergman 核

$$B^H_D(w) := \sup\left\{|\partial^H_z f(w)|^2 : f \in A^2(D), \int_D |f|^2 d\lambda \leqslant 1, [f]_w \in \mathfrak{m}^m_w\right\}.$$

当 D 是拟凸域时, Błocki-Zwonek[12] 证明了

$$B^H_D(z_0) \geqslant B^H_{I_D(z_0)}(0). \tag{2.5}$$

若 $H(z) \equiv 1$, 则 (2.5) 式退化为 (2.4) 式. 若 D 是平面域且 $H(z) = z^m$, 则 (2.5) 式退化为 (2.3) 式取 $\eta \equiv 0$ 的情形. 类似定理 2.9, 我们在文献 [55] 中也构造了一类使 (2.5) 式取等号的新例子.

参考文献

1 Andersén E. Volume-preserving automorphisms of $\mathbb{C}^n$. Complex Var Theo Appl, 1990, 14: 223–235

2 Andersén E. Complete vector fields on $(\mathbb{C}^*)^n$. Proc Amer Math Soc, 2000, 128: 1079–1085

3 Andersén E, Lempert L. On the group of holomorphic automorphisms of $\mathbb{C}^n$. Invent Math, 1992, 110: 371–388

4 Andrist R, Ugolini R. A new notion of tameness. J Math Anal Appl, 2019, 472: 196–215

5 Berndtsson B. The openness conjecture for plurisubharmonic functions. arXiv:1305.5781, 2013

6 Berndtsson B. Lelong numbers and vector bundles. J Geom Anal, 2020, 30: 2361–2376

7 Berndtsson B, Lempert L. A proof of the Ohsawa-Takegoshi theorem with sharp estimates. J Math Soc Japan, 2016, 68: 1461–1472

8 Błocki Z. Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem. Invent Math, 2013, 193: 149–158

9 Błocki Z. A lower bound for the Bergman kernel and the Bourgain-Milman inequality. In: Geometric Aspects of Functional Analysis. Cham: Springer, 2014, 53–63

10 Błocki Z, Zwonek W. Estimates for the Bergman kernel and the multidimensional Suita conjecture. New York J Math, 2015, 21: 151–161

11 Błocki Z, Zwonek W. One dimensional estimates for the Bergman kernel and logarithmic capacity. Proc Amer Math Soc, 2018, 146: 2489–2495

12 Błocki Z, Zwonek W. Generalizations of the higher dimensional Suita conjecture and its relation with a problem of Wiegerinck. J Geom Anal, 2020, 30: 1259–1270

13 Buzzard G, Forstnerič F. An interpolation theorem for holomorphic automorphisms of $\mathbb{C}^n$. J Geom Anal, 2000, 10: 101–108

14 Chen B Y. Completeness of the Bergman metric on non-smooth pseudoconvex domains. Ann Polon Math, 1999, 71: 241–251

15 Deng F S, Ning J F, Wang Z W, Zhou X Y. Positivity of holomorphic vector bundles in terms of L^p-estimates for $\bar{\partial}$. Math Ann, 2023, 385: 575–607

16 Demailly J-P. Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète. Ann Sci École Norm Sup, 1982, 15: 457–511

17 Demailly J-P. Scindage holomorphe d'un morphisme de fibrés vectoriels semi-positifs avec estimations L^2. In: Seminar Pierre Lelong-Henri Skoda. Berlin-New York: Springer, 1982, 77–107

18 Forstnerič F. Actions of $(\mathbb{R},+)$ and $(\mathbb{C},+)$ on complex manifolds. Math Z, 1996, 223: 123–153

19 Forstnerič F. Holomorphic automorphisms of $\mathbb{C}^n$, a survey. In: Complex Analysis and Geometry. New York: Marcel Dekker, 1996, 173–199

20 Forstnerič F. Interpolation by holomorphic automorphisms and embeddings in $\mathbb{C}^n$. J Geom Anal, 1999, 9: 93–117

21 Forstnerič F. Stein Manifolds and Holomorphic Mappings, the Homotopy Principle in Complex Analysis, 2nd ed. Cham: Springer, 2017

22 Forstnerič F, Kutzschebauch F. The first thirty years of Andersén-Lempert theory. Anal Math, 2022, 48: 489–544

23 Forstnerič F, Rosay J-P. Approximation of biholomorphic mappings by automorphisms of $\mathbb{C}^n$. Invent Math, 1993, 112: 323–349

24 Guan Q A. A sharp effectiveness result of Demailly's strong openness conjecture. Adv Math, 2019, 348: 51–80

25 Guan Q A. A proof of Saitoh's conjecture for conjugate Hardy H^2 kernels. J Math Soc Japan, 2019, 71: 1173–1179

26 Guan Q A, Mi Z T. Concavity of minimal L^2 integrals related to multiplier ideal sheaves. Peking Math J, 2023, 6: 393–457

27 Guan Q A, Mi Z T, Yuan Z. Concavity property of minimal L^2 integrals with Lebesgue measurable gain II. Adv Math, 2024, 450: 109766

28 Guan Q A, Sun X, Yuan Z. A remark on a weighted version of Suita conjecture for higher derivatives. Math Z, 2024, 307: 17

29 Guan Q A, Zhou X Y. Optimal constant problem in the L^2 extension theorem. C R Math Acad Sci Paris, 2012, 350: 753–756

30 Guan Q A, Zhou X Y. A solution of an L^2 extension problem with an optimal estimate and applications. Ann of Math (2), 2015, 181: 1139–1208

31 Guan Q A, Zhou X Y. A proof of Demailly's strong openness conjecture. Ann of Math (2), 2015, 182: 605–616

32 Guan Q A, Zhou X Y. Effectiveness of Demailly's strong openness conjecture and related problems. Invent Math, 2015, 202: 635–676

33 Guan Q A, Zhou X Y. Optimal constant in an L^2 extension problem and a proof of a conjecture of Ohsawa. Sci China Math, 2015, 58: 35–59

34 Hacon C, Popa M, Schnell C. Algebraic fiber spaces over abelian varieties, around a recent theorem by Cao and Păun.

In: Local and Global Methods in Algebraic Geometry. Providence: Amer Math Soc, 2018, 143–195
35 Herbort G. The Bergman metric on hyperconvex domains. Math Z, 1999, 232: 183–196
36 Hosono G. On sharper estimates of Ohsawa-Takegoshi L^2-extension theorem. J Math Soc Japan, 2019, 71: 909–914
37 Hosono G. The optimal jet L^2 extension of Ohsawa-Takegoshi type. Nagoya Math J, 2020, 239: 153–172
38 Inayama T. L^2-extension indices, sharper estimates and curvature positivity. arXiv:2210.08456v3, 2023
39 Jacobson N. Basic Algebra I, 2nd ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1985
40 Jennane B. Extension d'une fonction définie sur une sous-variété avec contrôle de la croissance. In: Séminaire Pierre Lelong-Henri Skoda (Analyse). Berlin: Springer, 1978, 126–133
41 Kobayashi S. Transformation Groups in Differential Geometry. New York-Heidelberg: Springer, 1972
42 Li Z, Xu W, Zhou X Y. On Demailly's L^2 extension theorem from non-reduced subvarieties. Math Z, 2023, 305: 23
43 Lin Z L, Zhou X Y. Various subgroups of Aut($\mathbb{C}^n$). Proc London Math Soc, 2023, 126: 880–899
44 Lin Z L, Zhou X Y. Interpolation and approximation by symplectic holomorphic self-maps in $\mathbb{C}^{2n}$. Preprint, 2024
45 Lin Z L, Zhou X Y. Subgroups generated by simple holomorphic automorphisms of $(\mathbb{C}^*)^n$. Preprint, 2024
46 Liu Z, Xu W. Characterizations of Griffiths positivity, pluriharmonicity and flatness. J Funct Anal, 2024, 287: 110532
47 Løw E, Pereira J, Peters H, Wold E. Polynomial completion of symplectic jets and surfaces containing involutive lines. Math Ann, 2016, 364: 519–538
48 Ohsawa T. Addendum to: "On the Bergman kernel of hyperconvex domains". Nagoya Math J, 1995, 137: 145–148
49 Ohsawa T, Takegoshi K. On the extension of L^2 holomorphic functions. Math Z, 1987, 195: 197–204
50 Peschl E. Automorphismes holomorphes de l'espace à n dimensions complexes. C R Acad Sci Paris, 1956, 242: 1836–1838
51 Rosay J-P, Rudin W. Holomorphic maps from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$. Trans Amer Math Soc, 1988, 310: 47–86
52 Shestakov I, Umirbaev U. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables. J Amer Math Soc, 2004, 17: 197–227
53 Suita N. Capacities and kernels on Riemann surfaces. Arch Ration Mech Anal, 1972, 46: 212–217
54 van den Essen A. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. Basel: Birkhäuser, 2000
55 Xu W, Zhou X Y. Generalized Suita conjectures with jets and weights. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2024, in press
56 Xu W, Zhou X Y. Optimal L^2 extensions of openness type. Math Ann, 2024, 390: 1249–1307
57 Xu W, Zhou X Y. Optimal L^2 extensions of openness type from the sublevel sets of quasi-psh functions. Preprint, 2024
58 Zhou X Y, Zhu L F. An optimal L^2 extension theorem on weakly pseudoconvex Kähler manifolds. J Differential Geom, 2018, 110: 135–186
59 Zhu L F, Guan Q A, Zhou X Y. On the Ohsawa-Takegoshi L^2 extension theorem and the Bochner-Kodaira identity with non-smooth twist factor. J Math Pures Appl, 2012, 97: 579–601

Holomorphic automorphism groups and L^2 extensions of openness type

Zhangli Lin, Wang Xu & Xiangyu Zhou

Abstract We survey recent progress on some topics in several complex variables, including the theory of holomorphic automorphisms of $\mathbb{C}^n$ and the optimal L^2 extension problem of openness type.

Keywords **holomorphic automorphism group, jet interpolation, optimal L^2 extension of openness type, plurisubharmonic function, multiplier ideal sheaf**

MSC(2020) **32M17, 32E30, 32D15, 32A36**

doi: 10.1360/SSM-2024-0198