

文章编号: 1002-0268 (2007) 01-0055-05

# 同时考虑滑移和纵向剪力重分布时组合梁 挠度变形的理论分析

毛学明, 赵人达, 万 臻

(西南交通大学 土木工程学院, 四川 成都 610031)

**摘要:** 以均布荷载作用下的简支组合梁为研究对象, 同时考虑滑移效应和纵向剪力重分布的影响, 将界面受力全过程划分为 3 个工作阶段, 通过建立截面曲率函数, 推导了组合梁挠度变形的计算公式, 并将根据本文公式得到的计算结果与按我国钢结构设计规范建议的折减刚度法得到的计算结果进行了比较。研究表明: 当荷载超过 0.5 倍的极限荷载时, 按本文方法得到的挠度结果普遍大于根据规范得到的计算值。

**关键词:** 钢-混凝土组合梁; 挠度; 剪力重分布; 滑移; 曲率; 全过程分析

中图分类号: U448.21<sup>+</sup>6

文献标识码: A

## Theoretical Analysis of the Deflection of Composite Beams Considering the Effects of Slip and Longitudinal Shear-force Redistribution

MAO Xue-ming, ZHAO Ren-da, WAN Zhen

(School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Sichuan Chengdu 610031, China)

**Abstract:** The effects of slip and longitudinal shear-force redistribution were taken into consideration for the study of simply supported composite beams under uniform distribution load, with the mechanics full-range of interface divided into three work-stages. Based on the curvature function, a set of formulae for calculating the deflection of composite beams were presented at different work-stage. The deflection obtained from these formulae were compared with that calculated by the reduced rigidity method suggested in the code of steel structures design of P. R. China. The research shows that when load exceeds half ultimate load, the deflection calculated by the proposed method is greater than that calculated under the design code.

**Key words:** steel-concrete composite beam; deflection; shear-force redistribution; slip; curvature; full-range analysis

钢-混凝土组合梁是组合结构中常见的横向承重构件, 它由钢和混凝土两种不同材料组成, 通常这种结构构件在设计时都被认为钢梁与混凝土翼板之间存在有足够的抗剪连接, 能形成整体共同工作。然而, 在实际情况中, 所谓钢梁与混凝土翼板形成整体共同工作只是一种理想化的假设, 其交界面处的滑移是不可避免的; 尤其是在目前, 组合梁采用部分剪力连接设计被认为是更经济合理, 这样也就造成了滑移效应的影响更加突出。

相对滑移的存在将使组合梁的变形增大, 刚度降

低, 截面抗弯承载力减小, 这已被大量的试验研究和理论分析所证实<sup>[1,2]</sup>。钢-混凝土组合梁在正常使用状态下的挠度计算是工程设计人员经常遇到的问题, 近几十年来, 国内外学者对这一问题开展了大量的理论分析与试验研究: 1951 年 N. M. Newmark<sup>[3]</sup> 使用挠曲微分方程法分析了 T 型组合梁, 但由于分析过程计算繁杂, 未能在工程实践中得到广泛应用; 聂建国等<sup>[2]</sup> 得到了不同荷载作用下钢-混凝土组合梁因滑移效应引起的附加变形计算公式, 蒋丽忠<sup>[4]</sup>、孙文彬<sup>[5]</sup> 等对均布荷载作用下的简支组合梁的界面滑移进行了理论分

收稿日期: 2005-06-24

基金项目: 西南交通大学 2004 年博士生创新基金资助项目

作者简介: 毛学明 (1976-), 男, 河南安阳人, 工学博士, 从事钢-混凝土组合结构行为研究、桥梁仿真分析。(maoxuemingwz@163.com)

析,但这几种方法都事先假定组合梁界面上的水平剪力正比于钢梁与混凝土翼板之间的相对滑移量,没有考虑界面纵向剪力重分布的影响,只能近似得到组合梁的挠度计算公式。

试验和分析表明,采用栓钉等柔性剪力连接件的钢-混凝土组合梁在荷载作用下,连接件会发生变形,导致钢梁与混凝土翼板在界面上出现相对滑移,从而产生剪力连接件之间的内力重分布,使得各剪力连接件在极限状态下受力趋于均匀。显然,上述各方法假定组合梁界面上的水平剪力正比于钢梁与混凝土翼板之间的相对滑移量与剪力连接件的实际工作状态不相符。鉴于此,本文以均布荷载作用下的简支钢-混凝土组合梁为研究对象,从组合梁界面各工作阶段的受力状态出发,通过建立组合梁在全过程中不同截面的荷载-曲率关系,然后利用积分法推导考虑滑移效应和纵向剪力重分布影响时组合梁挠度变形的简化计算公式。

## 1 挠度计算的积分法

考虑到实际工程情况,在利用积分法进行平弯梁的挠度计算时,可以做以下假定:<sup>①</sup>忽略剪力对梁变形的影响;<sup>④</sup>任一横截面的形心在梁轴线方向的位移分量忽略不计;<sup>④</sup>将钢梁和混凝土翼板视为理想的弹性体<sup>[2]</sup>。为了分析方便,建立如图1所示的坐标系,图中 $\theta$ 和 $y$ 分别表示任一横截面的转角和挠度,并规定向下的挠度为正、顺时针向的转角为正。

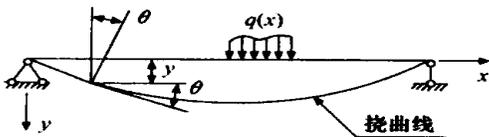


图1 梁的挠曲线

Fig 1 Deflection curve

挠度方程和转角方程分别用下式表示:

$$y = y(x), \quad (1)$$

$$\theta \approx \text{tg} \theta = y'(x). \quad (2)$$

根据数学知识,平面挠曲线的曲率在直角坐标系中又可表示成:

$$\Phi(x) = y''(x) / [1 + y'(x)^2]^{3/2} \approx y''(x), \quad (3)$$

考虑到挠曲线通常是1条极其平坦的曲线, $y'(x)$ 的值很小, $y'(x)^2$ 与1相比可略去不计。然后对式(3)所示梁的挠曲线近似微分方程分别积分1次和2次,这样即可得到梁的转角方程和挠度方程:

$$y'(x) = \int \Phi(x) dx + C_1, \quad (4)$$

$$y(x) = \int \left[ \int \Phi(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2, \quad (5)$$

式中, $C_1$ 、 $C_2$ 为积分常数,可通过已知的转角和位移边界条件来确定。

## 2 曲率分布函数

### 2.1 纵向剪力重分布机理

组合梁的破坏模式可能有弯曲破坏、钢梁失稳破坏、界面纵向剪切破坏等几种形式,在正常设计情况下,应当使弯曲破坏先于其他破坏形式发生,但在实际工程中组合梁截面设计并非都由承受弯矩的大小所控制,也有可能由刚度确定,此时剪力连接件的数量可不必按极限弯矩所产生的纵向剪力来计算,即设计成部分剪力连接组合梁。部分剪力连接组合梁的破坏形态多为界面纵向剪切破坏,本文以下讨论均假定界面纵向剪切破坏先于其他破坏形式发生。根据界面上剪力连接件的受力状态,将组合梁界面工作的全过程分为以下3个阶段:

(1) 阶段iv: 从加载初期到弹性极限荷载(这里指当梁端部界面上栓钉的工作剪力刚好达到其抗剪承载能力时的工作荷载),在该阶段内界面上的全部栓钉均未达到其抗剪承载能力,栓钉变形很小,剪力重分布的能力也很差,可以忽略不计。

(2) 阶段⑤: 随着荷载的继续增加直到破坏极限荷载(这里指当界面上全部栓钉的工作剪力均达到其抗剪承载能力时的工作荷载)之前,在此阶段内当组合梁界面上部分栓钉达到其抗剪承载能力时,即发生塑性变形,并引起其相邻区域内的栓钉发生剪力重分布。

(3) 阶段⑥: 即界面纵向剪切破坏阶段,当荷载达到破坏极限荷载时,界面上全部栓钉均达到其抗剪承载能力,继续增加荷载,界面抗剪强度不足,产生过大滑移,界面丧失抗剪承载能力,使组合梁失去组合作用。

对于简支组合梁,在均布荷载作用下,界面纵向剪力重分布的具体计算原理笔者已做过详细推导和研究,本文限于篇幅仅用图2所示的计算简图加以说明。

图2中 $v_i$ 表示单位长度界面上的纵向抗剪承载能力, $v(x)$ 、 $w(x)$ 分别为考虑和不考虑剪力重分布影响时外荷载作用下单位长度界面上的纵向工作剪力值。显然,在阶段iv不用考虑各栓钉之间的剪力重分布,直接按弹性理论计算界面纵向工作剪力;在阶段⑤必须考虑栓钉之间的剪力重分布,即用考虑剪力重分

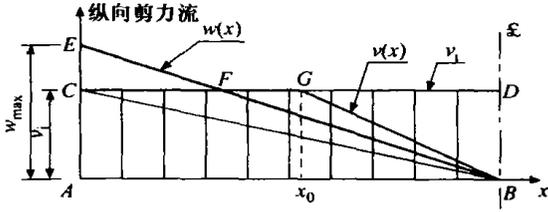


图 2 均布荷载下半跨简支组合梁界面纵向剪力重分布计算简图

Fig 2 Illustration of the longitudinal shear force redistribution calculation

布后的实际纵向剪力分布曲线  $CGB$  代替按弹性理论计算的纵向剪力分布曲线  $EB$ , 其计算原则在图 2 中用  $S_{\triangle ABE} = S_{\text{四边形}ABOC}$  表示; 在阶段 ④ 各剪力连接件均达到其抗剪承载能力, 纵向剪力按直线  $CD$  分布。

## 2.2 曲率计算

根据以上组合梁界面纵向剪力重分布的机理, 笔者已经在文献[6]中给出了简支组合梁在均布荷载作用下截面曲率的详细推导过程, 具体计算公式如下:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{(Lx - x^2)}{EI} \cdot \frac{(1 - K_2)}{K_1} j \cdot v_i & j \in [0, 0.5], & (6-1) \\ \frac{x}{EI} \cdot \left[ \frac{(L-x)}{K_1} j - Z \right] \cdot v_i & x \in [0, x_0], j \in (0.5, 1) & (6-②a) \\ \frac{Lx - x^2}{4EI} \cdot \left[ 4j - \frac{K_2}{1-j} \right] \cdot \frac{v_i}{K_1} + \frac{LZ}{8EI} \cdot \frac{(1-2j)^2}{1-j} \cdot v_i & x \in (x_0, L/2], j \in (0.5, 1) & (6-②b) \\ \frac{x}{EI} \cdot \left[ \frac{(L-x)}{K_1} - Z \right] \cdot v_i & j = 1, & (6-④) \end{cases}$$

式中,  $j \in [0, 0.5]$ 、 $j \in (0.5, 1)$  和  $j = 1$  表示 3 种工况分别对应上述 3 个工作阶段;  $EI = E_s I_s + E_c I_c$ ;  $K_1 = SL / (2I_0)$ ;  $K_2 = SZ / I_0$ ;  $j = q / q_u$ ;  $v_i = 2 \eta_{vf} [N_v^c] / L$ ;  $x_0 = (2j - 1)L / 2$ ;  $L$  为组合梁的跨度;  $Z$  为混凝土翼板截面形心至钢梁截面形心的距离;  $E_s I_s$ 、 $E_c I_c$  分别为钢梁和混凝土翼板的截面刚度;  $S$  为混凝土翼板的换算截面对换算组合截面中性轴的面积矩;  $I_0$  为换算组合截面惯性矩;  $q$  为外荷载;  $q_u = 2v_i / K_1$  为界面发生纵向剪切破坏时的外荷载;  $\eta_{vf}$  为梁半跨范围内按完全剪力连接设计时所需栓钉个数;  $\eta$  为剪力连接程度系数;  $[N_v^c]$  为单个栓钉抗剪承载能力。

## 3 挠度计算公式

在利用截面曲率求解挠度方程时, 需注意的是式(6)中的曲率是指绝对值, 而实际上挠度曲线的曲率的正

负和坐标系的选取有关, 在图 1 所示的坐标系中, 挠曲线向下凸时的曲率为负, 因此需在式(6)所示的曲率公式前乘以一负号。下面按公式(4)和(5)所示原理分阶段求出梁的转角方程和挠度方程。

(1) 阶段 iv:  $j \in [0, 0.5]$ ,  $x \in [0, L/2]$

将式(6-iv)右边乘以一负号后带入式(4), 就可得到梁的转角方程:

$$y'_{iv}(x) = \frac{(1 - K_2)jq_u}{12EI} (2x^3 - 3Lx^2) + C_1, \quad (7)$$

再对式(7)进行 1 次积分, 就可得到梁的挠度方程:

$$y_{iv}(x) = \frac{(1 - K_2)jq_u}{24EI} (x^4 - 2Lx^3) + C_1 x + C_2. \quad (8)$$

根据边界条件确定积分常数, 梁在支座处位移为零, 在跨中截面转角为零, 所以有:  $C_{iv} = (1 - K_2)jq_u L^3 / (24EI)$ ,  $C_2 = 0$ 。

(2) 阶段 ②  $j \in (0.5, 1)$

① 当  $x \in [0, x_0]$  时, 将式(6-②a)右边乘以一负号后带入式(4), 就可得到梁的转角方程:

$$y'_{②-a}(x) = \frac{q_u}{24EI} [4jx^3 - 3(2j - K_2)Lx^2] + C_3, \quad (9)$$

再对式(9)进行 1 次积分, 就可得到梁的挠度方程:

$$y_{②-a}(x) = \frac{q_u}{24EI} [jx^4 - (2j - K_2)Lx^3] + C_3 x + C_4. \quad (10)$$

④ 当  $x \in (x_0, L/2]$  时, 同样将式(6-②b)右边乘以一负号后带入式(4)得到梁的转角方程:

$$y'_{②-b}(x) = \int_{x_0}^x \Phi_{②-b}(x) dx + C_5, \quad (11)$$

再对式(11)进行 1 次积分, 就可得到梁的挠度方程:

$$y_{②-b}(x) = \int_{x_0}^x \left[ \int_{x_0}^x \Phi_{②-b}(x) dx \right] dx + C_5 x + C_6. \quad (12)$$

根据边界条件和连续条件确定积分常数, 梁在支座处位移为零, 在跨中截面转角为零, 且在  $x = x_0$  处梁的位移和转角均连续, 联立(9~12)式求解化简后有:  $C_3 = q_u L^3 [4j + K_2(4j^2 - 8j + 1)] / (96EI)$ ,  $C_4 = 0$ ,  $C_5 = q_u L^3 [j(j-1)(4j^2 - 8j + 1) + K_2(j-1)(4j-1)] / (24EI)$ ,  $C_6 = q_u L^4 [j(2j-1)(2j-3)(4j^2 - 8j - 1) + 4K_2(2j-1)(4j^2 - 6j + 1)] / (384EI)$ 。

(3) 阶段 ④  $j = 1$ ,  $x \in [0, L/2]$

同样将式(6-④)右边乘以一负号后带入式(4)得到梁的转角方程:

$$y'_{④}(x) = \frac{q_u}{24EI} [4x^3 - 3(2 - K_2)Lx^2] + C_7, \quad (13)$$

再对式(13)进行1次积分,就可得到梁的挠度方程:

$$y_{\text{⑥}}(x) = \frac{q_u}{24EI} [x^4 - (2 - K_2)Lx^3] + C_7x + C_8. \quad (14)$$

同样根据边界条件确定积分常数,梁在支座处位移为零,在跨中截面转角为零,所以有:  $C_7 = (4 - 3K_2)q_uL^3/(96EI)$ ,  $C_8 = 0$ 。

将积分常数  $C_1 \sim C_8$  分别代入式(7~14)就可得到组合梁在各受力阶段的转角方程和挠度方程,考虑到实用上的方便,现将组合梁在各工作阶段的挠度计算公式统一用下式表示:

$$y(x) = \frac{q_u}{192EI} (a_1x^4 + a_2Lx^3 + a_3L^2x^2 + a_4L^3x + a_5L^4). \quad (15)$$

对应不同工作阶段,式(15)中系数  $A = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5\}$  计算式为:

$$A = \begin{cases} \begin{vmatrix} \{8(1 - K_2)j & -16(1 - K_2)j & 0 \\ \{8j & -8(2j - K_2) & 0 \\ \{8j - 2\alpha_2 & -16j + 4\alpha_2 & -3\alpha_2(1 - 2j)^2 \\ \{8 & -16 + 8K_2 & 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 8(1 - K_2)j & 0 \\ 8j + 2\alpha_1K_2 & 0 \\ 8j + \alpha_2\alpha_3 & \alpha_2\alpha_4 \\ 8 - 6K_2 & 0 \end{vmatrix} \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \alpha_2\alpha_4 \\ 0 \end{cases} \begin{cases} j \in [0, 0.5], x \in [0, L/2] \\ j \in (0.5, 1), x \in [0, x_0] \\ j \in (0.5, 1), x \in (x_0, L/2) \\ j = 1, x \in [0, L/2] \end{cases}$$

其中,  $\alpha_1 = 4j^2 - 8j + 1$ ,  $\alpha_2 = K_2/(1 - j)$ ,  $\alpha_3 = 12j^2 - 12j + 1$ ,  $\alpha_4 = -(2j - 1)^4/8$ 。

#### 4 算例及讨论

某承受均布荷载作用的简支组合梁(如图3所示),跨度为20 m,混凝土强度等级为C30,钢梁材料为Q235,单个栓钉的抗剪承载能力为40 kN,按单列等间距布置。当剪力连接程度  $\eta$  取0.65、0.80、1.0,荷载系数  $j$  分别取0.50、0.75、1.0时,分别按本文公式(15)和折减刚度法对组合梁的挠度进行比较。

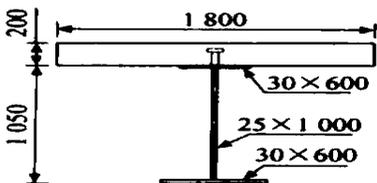


图3 组合梁截面及尺寸(单位: mm)

Fig 3 Composite beam section and dimensions (unit: mm)

根据我国现行《钢结构设计规范》<sup>[7]</sup>建议的折减刚度法和本文建议的公式,分别计算组合梁的挠度,计算结果见表1,不同荷载下两种方法的挠度计算结果沿梁轴向的分布情况比较见图4。图5和图6描述的是截面挠度随作用荷载的发展曲线,其中  $y_1$  表示由现行规范得到的挠度计算值,  $y_2$  表示根据本文方法得到的挠度计算值。

表1 组合梁1/4跨截面和跨中截面挠度计算值的比较

Tab 1 Comparison of the deflection calculation of the two span sections

连接程度系数 $\eta$	荷载系数 $j$	$y_1/\text{mm}$		$y_2/\text{mm}$		$(y_2 - y_1)/y_2$		
		1/4跨截面	跨中截面	1/4跨截面	跨中截面	1/4跨截面	跨中截面	
0.50	0.50	19.55	27.44	19.00	26.67	-0.03	-0.03	
	0.65	0.75	29.33	41.17	31.38	43.14	0.07	0.05
	1.00	39.11	54.89	51.59	70.06	0.24	0.22	
0.80	0.50	23.89	33.53	23.33	32.74	-0.02	-0.02	
	0.75	35.84	50.30	38.52	52.96	0.07	0.05	
	1.00	47.79	67.07	63.34	86.01	0.25	0.22	
1.00	0.50	29.77	41.79	29.20	40.98	-0.02	-0.02	
	0.75	44.66	62.68	48.21	66.28	0.07	0.05	
	1.00	59.55	83.58	79.28	107.66	0.25	0.22	

从表1中可以看出,当荷载小于0.5倍的极限荷载时,两种方法计算结果吻合很好,但随着荷载的增加,由于各栓钉之间开始发生剪力重分布,按现行规范得到的挠度结果逐渐小于根据本文方法得到的计算值,荷载越大,这一情况越加明显,当达到极限荷载时,两者相对误差约23%,说明栓钉之间的剪力重分布现象对挠度的计算有很大影响。

图4也反应出荷载较小时,两种方法计算结果吻合很好,但随着荷载的增加,按现行规范得到的挠度结果逐渐小于根据本文方法得到的计算值。从图5中可以看出,按现行规范得到的挠度与荷载基本呈线性发展关系,而本文挠度计算结果仅在受荷初期与荷载呈线性关系,当荷载系数  $j > 0.5$  时,荷载-挠度曲线明显呈非线性关系,这也是由于栓钉之间剪力重分布的影响,比较符合组合梁的实际发展情况。从图6中本文计算结果可以看出,剪力连接程度越强,荷载-挠度曲线就越晚进入非线性关系阶段,且极限挠度越大;在相同荷载作用下,剪力连接程度越强,截面挠度越小;而按现行规范得到的挠度值几乎不受剪力连接程度的影响。

#### 5 结语

本文从组合梁界面各工作阶段的受力状态出发,将界面的工作全过程划分为3个工作阶段,提出了栓

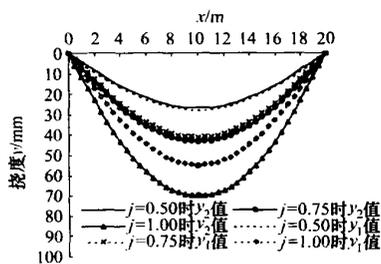


图 4  $\eta = 0.65$  时不同荷载下载面挠度沿轴向的分布情况

Fig 4 Sectional deflection distribution under various load

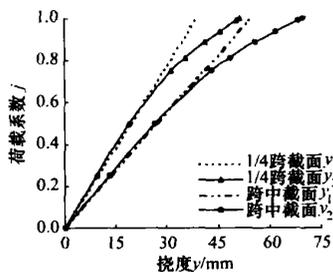


图 5  $\eta = 0.65$  时不同截面位置处荷载-挠度关系曲线

Fig 5 Load vs deflection at different section position

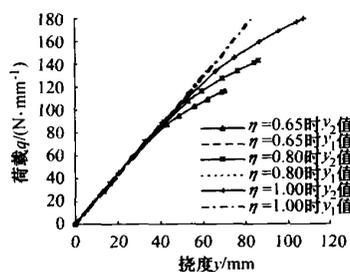


图 6 不同连接程度时跨中截面的荷载-挠度关系曲线

Fig 6 Load vs deflection under different connection

钉之间剪力重分布的简化计算模型, 并通过已建立的组合梁截面曲率分布函数, 推导了均布荷载作用下简支钢-混凝土组合梁的挠度计算公式。本文公式在推导过程中不仅考虑了滑移效应的影响, 同时还考虑了界面上栓钉之间剪力重分布现象的影响, 具有较强的理论意义。并通过算例对本文公式的挠度计算结果进行了分析, 与我国《钢结构设计规范》建议的折减刚度法进行了比较, 结果表明: 当荷载小于 0.5 倍的极限荷载时, 两种方法计算结果吻合很好; 当荷载超过 0.5 倍的极限荷载时, 由于各栓钉之间开始发生剪力重分布, 按现行规范得到的挠度结果普遍小于根据本文方法得到的计算值, 且随着荷载的增加, 两种方法的计算结果相对误差逐渐增大, 当达到极限荷载时, 最大误差约 23%, 此时建议考虑栓钉之间的剪力重分布现象对挠度计算的影响。由于缺乏均布荷载作用下简支钢-混凝土组合梁挠度试验的测试资料, 本文所得理论计算公式尚未与试验结果进行比较, 这也是

本文作者下一步工作的重点。

参考文献:

[1] 朱聘儒, 国明超, 朱起, 等. 钢-混凝土组合梁协同工作的分析及试验 [J]. 建筑结构学报, 1987, 5: 41-51.

[2] 聂建国, 沈聚敏, 袁彦声. 钢-混凝土简支组合梁变形计算的一般公式 [J]. 工程力学, 1994, 11 (1): 21-27.

[3] N M NEWMARK, C P SIESS, I M VIEST. Test and analysis of composite beams with incomplete interaction [J]. Experimental Stress Analysis, 1951, 9 (6): 896-901.

[4] 蒋丽忠, 余志武, 李佳. 均布荷载作用下钢-混凝土组合梁滑移及变形的理论计算 [J]. 工程力学, 2003, 20 (2): 133-137.

[5] 孙文彬, 徐业愚. 部分剪力连接钢-混凝土简支组合梁变形计算的积分法 [J]. 吉林建筑工程学院学报, 2002, 19 (3): 29-31.

[6] 毛学明, 赵人达, 万臻. 钢-混凝土组合梁各受力阶段曲率分布研究 [J]. 公路交通科技, 2006, 23 (9): 67-70, 80.

[7] GB50017-2003, 钢结构设计规范 [S].

(上接第 54 页)

[6] LES A PIEGL, WAYNE TILLER. The NURBS Book (2 edition) [M]. Berlin: Springer, 1996.

[7] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994.

[8] NURBS++ 3.0, <http://yukon.genie.uottawa.ca/lavoie/software/nurbs>, 1996.

[9] 张传义, 等. 工科数学分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[10] 张树仁, 等. 钢筋混凝土及预应力混凝土桥梁结构设计原理 [M]. 北京: 人民交通出版社, 2004.