

任意布置方式下两任意形状孔洞平面弹性问题的解析法研究*

张路青 杨志法

(中国科学院地质与地球物理研究所工程地质力学开放研究实验室, 北京 100029)

吕爱钟

(山东科技大学, 泰安 271019)

摘要 利用 Schwarz 交替法, 找到了解决两任意形状孔洞任意布置方式下平面弹性问题的简单交替算法, 并可得到任意次迭代后应力场及位移场的计算公式. 通过精度分析发现: 20 次迭代后的计算结果已具有非常高的精度, 继续迭代求解可得到更高精度的计算结果. 与有限单元法计算结果的比较更进一步证实了本文简单交替算法的可靠性.

关键词 Schwarz 交替法 两任意形状孔洞 简单交替算法 应力场 位移场 精度分析

在工程设计中经常会遇到两平行孔洞问题, 并且孔洞形状多种多样. 当两平行孔洞相距很近时, 其应力场及位移场就要受到强烈的相互影响, 并为工程设计者所关心. 两孔洞的平面问题在力学上属于双连通域问题. 国内外学者一直设法寻找一个行之有效的求解办法^[1~8], 但其工作只限于圆形孔洞或夹杂物及两椭圆孔问题. 如今的数值方法虽可以解决双连通域问题, 但它不会象解析方法那样能较迅速和较准确地计算出任一点的应力和位移, 难以方便地分析各个参数对计算结果的影响. 更重要的是, 解析法可从理论上把握双孔洞应力场和位移场的分布规律.

Schwarz 交替法作为一种解析方法, 是将双连通域问题归结为一系列的单连通域问题来求解. 数学上已由 Mikhlin 证明了 Schwarz 交替法二维求解双连通域问题的收敛性^[9], 由 Soboleff 给出了三维上的收敛证明^[10]; 显然, 只要能找出简单的交替算法使迭代求解顺利进行下去, Schwarz 交替法就可以作为解决任意布置方式下两任意形状孔洞问题的有效工具.

1 基本原理

Schwarz 交替法求解两任意形状孔洞问题的关键在于迭代求解的顺利进行. 每个单连通域问题本文使用柯西积分法进行求解^[11]. 柯西积分法是将边界形状复杂区域映射到单位圆域后才可进行; 如按常规方法求解, 则因复杂映射函数的引入而使迭代求解寸步难行. 本文另辟捷径, 提出可得到任意次迭代计算结果的简单交替算法.

1999-06-07 收稿, 1999-10-20 收修稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 49772166)

1.1 映射函数与逆映射函数

本文使用 Schwarz-Christoffel 积分公式为基础的混合罚函数法来获得映射函数^[12]. 在利用柯西积分法求解单个孔洞问题时, 是将孔外域映射到单位圆外的无限区域后进行求解, 则映射函数的一般形式为:

$$z = w(z) = R \left(z + B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \cdots + \frac{B_n}{z^n} \right), \quad (1)$$

其中 R 反映了孔洞的大小, $B_0, B_1, B_2, \cdots, B_n$ 反映了孔洞的形状, z, z 分别为原平面和映射平面上的复坐标.

本文把单位圆外域映射回原平面孔外域的函数称为逆映射函数, 变换形式为 $z = w^{-1}(z)$. 逆映射函数依然是孔外无限域之间的映射变换, 函数形式可写为:

$$z = w^{-1}(z) = r \left(z + A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots + \frac{A_m}{z^m} \right). \quad (2)$$

由于逆映射函数是针对映射函数而言的, 经过逆映射变换的两对应点与经过映射变换的两对应点 z 和 z 要一致. 那么, 利用(1)和(2)式可得到求解系数 $r, A_0, A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的复数线性方程. 当方程数远大于未知系数个数时, 则需要求解含有复数的线性矛盾方程组, 如此得到的逆映射函数的整体效果将会增加.

为书写方便, 两孔洞的映射函数分别改写为:

$$w_1(z_1) = \sum_{k=-1}^n m_k / z_1^k \text{ 和 } w_2(z_2) = \sum_{k=-1}^n n_k / z_2^k, \quad (3)$$

而逆映射函数分别改写为:

$$w_1^{-1}(z_1) = \sum_{k=-1}^m p_k / z_1^k \text{ 和 } w_2^{-1}(z_2) = \sum_{k=-1}^m q_k / z_2^k. \quad (4)$$

1.2 Schwarz 交替法的求解步骤

图 1 给出了两平行孔洞计算模型的最一般情形以适应孔洞形状的多样性, 并认为无穷远处荷载均为均布应力. 在图 1 中, z_1, z_2 分别是 $x_1 o_1 y_1, x_2 o_2 y_2$ 坐标系下的复坐标; c 是两平行孔洞的相对位置矢量 ($x_1 o_1 y_1$ 坐标系下); s_x^∞, s_y^∞ 和 t_{xy}^∞ 分别为无穷远处竖直、水平、剪切应力; L_1 和 L_2 分别为洞 1、洞 2 的周边.

两孔洞的平面问题可分为平面应力和平面应变问题, 根据应力边界条件和位移边界条件的不同又可将其分为不同的边值问题. 本文在叙述 Schwarz 交替法原理及基本公式推导时以地下工程中的两平行洞室(无支护)为例. 此时, s_x^∞, s_y^∞ 和 t_{xy}^∞ 为无穷远处相应

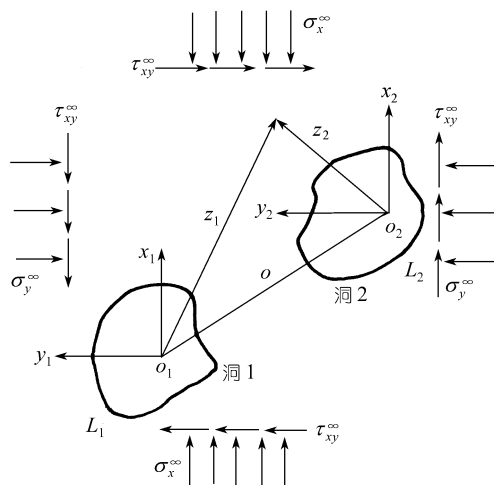


图 1 两平行孔洞的计算模型

的地应力.

利用 Schwarz 交替法求解两任意形状洞室问题的基本过程如下: 首先在岩石中挖出洞 1, 其应力解可利用柯西积分法获得; 此时, 洞 2 虽未开挖, 但在拟开挖周边上的应力值可以求出. 由此可以得到洞 2 周边的多余面力(本文把洞边不为零的面力称为多余面力), 并且用级数来逼近这个多余面力, 使求解过程中所利用的应力边界条件变得简单. 然后可在岩石中模拟开挖洞 2, 即在洞 2 周边作用与多余面力大小相等、方向相反的外力(也称反面力, 同样表示为级数形式), 使得洞 2 周边满足零面力边界条件. 此时, 如果设想洞 1 不存在, 则上述问题也是单连通域问题; 可以求出在洞 2 周边反面力作用下只存在洞 2 时的解, 随之可得此时在洞 1 周边相应的多余面力. 重复上述模拟开挖过程, 可求得在洞 1 周边级数表示的反面力作用下只有洞 1 时的解, 此时洞 1 周边满足零面力边界条件, 而洞 2 周边仍存在多余面力. 为消除洞室周边的多余面力必须继续迭代求解, 直至两个洞室周边均满足零面力边界条件(两洞室无支护时), 把每次迭代的计算结果叠加起来就可得到原问题的解.

本文定义, 两个洞室周边各加一次反面力为完成一次迭代(除第一次迭代外).

实际计算不可能做无数次的迭代求解, 但随迭代次数的增多, 多余面力越来越接近零面力. 达到一定的迭代次数后, 计算结果的精度能满足工程所需即可停止迭代.

当两孔边有外荷载(分布力或集中力)时, 在第一次迭代过程中两洞室的开挖需考虑外荷载的作用, 即: 开挖洞 1 时, 荷载条件为洞 1 周边外荷载及无穷远处的应力; 开挖洞 2 时, 荷载条件为洞 2 周边外荷载及相应的反面力. 在第二次及以后的迭代过程中, 荷载条件均是相应的反面力. 上述简单交替算法适用于任意双孔洞的平面弹性问题.

2 应力场分析的基本公式

2.1 在地应力作用下只存在洞 1 的解

洞 1 及洞 2 的映射函数和逆映射函数分别为 $z_1 = w_1(z_1)$, $z_2 = w_2(z_2)$ 和 $z_1 = w_1^{-1}(z_1)$, $z_2 = w_2^{-1}(z_2)$, 其中 z_1 , z_2 分别为两映射平面上的复坐标. 在地应力 s_x^∞ , s_y^∞ 和 t_{xy}^∞ 作用下只有洞 1 的解 $j_{11}(z_1)$, $y_{11}(z_1)$ 可表示为:

$$\begin{cases} j_{11}(z_1) = Bw_1(z_1) + j_{10}(z_1), \\ y_{11}(z_1) = (B' + iC')w_1(z_1) + y_{10}(z_1), \end{cases} \quad (5)$$

式中 $B = \frac{s_x^\infty + s_y^\infty}{4}$, $B' = \frac{s_y^\infty - s_x^\infty}{2}$, $C' = t_{xy}^\infty$; $j_{10}(z_1)$, $y_{10}(z_1)$ 为 z_1 平面上单位圆外包括无穷远点在内的解析函数. 求解 $j_{11}(z_1)$, $y_{11}(z_1)$ 的应力边界条件为:

$$j_{11}(s_1) + \frac{w_1(s_1)}{w_1'(s_1)} \overline{j_{11}'(s_1)} + \overline{y_{11}(s_1)} = 0, \quad (6)$$

其中 s_1 为 z_1 平面上单位圆周上的坐标; $j_{11}(s_1)$, $y_{11}(s_1)$ 为 $j_{11}(z_1)$, $y_{11}(z_1)$ 在 z_1 平面上单位圆周上的值.

利用 Harnack 定理及 Cauchy 积分公式的推广形式, 由(6)式可得到只有洞 1 的解为:

$$\begin{cases} j_{11}(z_1) = Bw_1(z_1) + \frac{a_1}{z_1} + \frac{a_2}{z_1^2} + \cdots + \frac{a_n}{z_1^n}, \\ y_{11}(z_1) = \overline{k_{n-2}z_1^{n-2}} + \overline{k_{n-3}z_1^{n-3}} + \cdots + \overline{k_1z_1} - \frac{\overline{w_1}\left(\frac{1}{z_1}\right)}{w_1'(z_1)} j_{10}'(z_1) - \frac{2B\overline{m_{-1}}}{z_1} + (B' + iC')m_{-1}z_1, \end{cases} \quad (7)$$

式中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是已确定出的各幂次项系数; $k_1, k_2, \dots, k_{n-2}$ 分别为 $\frac{w_1(z_1)}{\overline{w_1}\left(\frac{1}{z_1}\right)} \overline{j_{10}'\left(\frac{1}{z_1}\right)}$ 的级数展开

式中 $z_1^{-1}, z_1^{-2}, \dots, z_1^{-n+2}$ 的系数.

2.2 洞 2 周边多余面力的确定

$j_{11}(z_1), y_{11}(z_1)$ 求出后, 就可以求出洞 2 周边相应反面力作用下开挖洞 2 的解 $j_{22}(z_2), y_{22}(z_2)$. 而从 $j_{11}(z_1), y_{11}(z_1)$ 到 z_2 表示的洞 2 周边多余面力中间要经历逆映射变换、坐标平移及映射变换. 由于映射函数和逆映射函数的复杂性, 通过变换两复应力函数表示由洞 1 的开挖在洞 2 周边引起的多余面力将十分困难. 本文从另一角度出发, 直接利用 $j_{11}(z_1), y_{11}(z_1)$ 计算洞 2 周边各点的多余面力, 所利用的公式为:

$$f_{12}(s_2) = j_{11}(g_1) + \frac{w_1(g_1)}{w_1'(g_1)} \overline{j_{11}'(g_1) + y_{11}(g_1)}, \quad (8)$$

式中 s_2 为洞 2 周边点 t_2 在 z_2 平面上的坐标; $f_{12}(s_2)$ 为由 $j_{11}(z_1), y_{11}(z_1)$ 在 s_2 对应点 t_2 处引起的多余面力; g_1 则是 s_2 经过映射变换 $t_2 = w_2(s_2)$, 坐标平移 $T_1 = t_2 + c$ 及逆映射变换 $g_1 = w_1^{-1}(T_1)$ 得到的在 z_1 平面上的坐标.

在多个 s_2 所对应的 $f_{12}(s_2)$ 求出之后, 利用复数级数 $\sum_{k=-L}^L D_k s_2^k$ 来逼近 $f_{12}(s_2)$ 在洞 2 周边的分布; D_k 是级数逼近式中 s_2^k 的系数, 并且 D_k 一般为复数. 简单的多余面力形式保证了 Schwarz 交替法迭代求解的成功.

在每次迭代过程中, 多余面力的求解及分布形式的获得都按上述方法进行.

2.3 在反面力 $-\sum_{k=-L}^L D_k \phi_2^k$ 作用下只存在洞 2 的解

在反面力 $-\sum_{k=-L}^L D_k s_2^k$ 作用下只存在洞 2 的解为 $j_{22}(z_2), y_{22}(z_2)$, 所利用的应力边界条件为:

$$j_{22}(s_2) + \frac{w_2(s_2)}{w_2'(s_2)} \overline{j_{22}'(s_2) + y_{22}(s_2)} = -\sum_{k=-L}^L D_k s_2^k, \quad (9)$$

式中 $j_{22}(s_2), y_{22}(s_2)$ 为 z_2 平面上单位圆外解析函数 $j_{22}(z_2), y_{22}(z_2)$ 在单位圆周上的值.

利用 Harnack 定理及 Cauchy 积分公式的推广形式, 可得到 $j_{22}(z_2), y_{22}(z_2)$ 如下:

$$\begin{cases} j_{22}(z_2) = \frac{F_1}{z_2} + \frac{F_2}{z_2^2} + \cdots + \frac{F_L}{z_2^L}, \\ y_{22}(z_2) = \overline{L_{n-2}}z_2^{n-2} + \overline{L_{n-3}}z_2^{n-3} + \cdots + \overline{L_1}z_2 - \frac{\overline{w_2}\left(\frac{1}{z_2}\right)}{w_2'(z_2)}j_{22}'(z_2) - \sum_{k=1}^L \overline{D_k}/z_2^k, \end{cases} \quad (10)$$

式中 $F_1, F_2, \dots, F_L$ 是已确定出的各幂次项系数; $L_1, L_2, \dots, L_{n-2}$ 分别为 $\frac{w_2(z_2)}{\overline{w_2}\left(\frac{1}{z_2}\right)}j_{22}'\left(\frac{1}{z_2}\right)$ 的级数

展开式中 $z_2^{-1}, z_2^{-2}, \dots, z_2^{-n+2}$ 的系数.

$j_{11}(z_1), y_{11}(z_1)$ 与 $j_{22}(z_2), y_{22}(z_2)$ 叠加即为 Schwarz 交替法的第一次迭代结果.

2.4 Schwarz 交替法求解围岩应力

由于迭代求解从洞 1 开始, 所以第一次迭代后, 洞 2 满足零面力的应力边界条件, 而洞 1 周边由于 $j_{22}(z_2), y_{22}(z_2)$ 的存在仍有多余面力. 在洞 1 周边施加相应的反面力, 并可求出此时只有洞 1 的解 $j_{31}(z_1), y_{31}(z_1)$, 所利用的应力边界条件为:

$$j_{31}(s_1) + \frac{w_1(s_1)}{w_1'(s_1)}j_{31}'(s_1) + y_{31}(s_1) = - \sum_{k=-L}^L E_k s_1^k, \quad (11)$$

式中 $j_{31}(s_1), y_{31}(s_1)$ 为 z_1 平面上单位圆外解析函数 $j_{31}(z_1), y_{31}(z_1)$ 在单位圆周上的值; E_k 为洞 1 周边多余面力的级数逼近式中 s_1^k 的系数.

以后每次迭代利用的应力边界条件都如(9)和(11)式, 只是在不同次的迭代和拟挖不同洞室时, 变换相应的量即可. 根据精度要求, 可进行任意次的迭代计算; 最终计算结果为所有次迭代结果的叠加. 假定叠加后两复应力函数为 $j(z), y(z)$, 其中 z 可以是 z_1 或 z_2 , 则可得到正交曲线坐标系下的各应力分量组合为:

$$\begin{cases} s_q + s_r = 4 \operatorname{Re}[\ddot{O}(z)], \\ s_q - s_r + 2it_{rq} = \frac{2z^2}{r^2} \frac{1}{w'(z)} [\overline{w(z)} \ddot{O}'(z) + w'(z) \ddot{O}(z)], \end{cases} \quad (12)$$

其中 s_r, s_q 和 t_{rq} 分别为正交曲线坐标系下的径向应力、环向应力和剪切应力; r 为 z 平面上的径向坐标; $\ddot{O}(z)$ 为 $\frac{j'(z)}{w'(z)}$, $\ddot{O}(z)$ 为 $\frac{y'(z)}{w'(z)}$.

如要考虑洞边作用有外荷载, 只须在 $j_{11}(z_1), y_{11}(z_1)$ 与 $j_{22}(z_2), y_{22}(z_2)$ 函数表达式中加上洞边外荷载作用项, 并在边界条件(6)和(9)等式右侧加上洞边外荷载作用项. 对于位移边值和混合边值问题, 上述迭代求解过程及公式推导步骤是一样的.

3 位移场分析的基本公式

利用 $j(z), y(z)$ 可求解两洞室开挖相互影响下的位移场. 对于地下工程中的先加载后挖洞问题, 洞室开挖后的应力场是地应力和开挖引起的附加应力共同作用的结果; 但对于位移来说, 地应力引起的位移在开挖之前就已完成, 而由洞室开挖所引起的位移才是通常所指的围岩位移. 对于其他类工程中的先挖洞后加载问题则无此之分. 本文以前者为例分析求解位

移的基本公式. 如以第一映射坐标系为参照坐标系, 求解位移场的两复应力函数为:

$$\begin{cases} \underline{j}(z_1) = j(z_1) - Bw_1(z_1), \\ \underline{y}(z_1) = y(z_1) - (B' + iC')w_1(z_1), \end{cases} \tag{13}$$

式中 $j(z_1)$, $y(z_1)$ 为 $j(z)$, $y(z)$ 在 z_1 坐标系下的复应力函数形式.

求解位移场所利用的公式为:

$$2G(u_0 + iv_0) = k \underline{j}(z_1) - \frac{w_1(z_1)}{w_1'(z_1)} \overline{\underline{j}'(z_1) - \underline{y}(z_1)}, \tag{14}$$

其中 u_0 和 v_0 为 $x_1o_1y_1$ 坐标系下两坐标轴方向的位移分量; G 为剪切模量; k 为与泊松比 n 有关的常数, 对于平面应变 $k = 3 - 4n$, 对于平面应力 $k = \frac{3 - n}{1 + n}$.

如果洞 1 用于观测洞, 其开挖先于洞 2, 那么在洞 1 内观测到的位移仅仅是由于开挖洞 2 所引起的位移. 假定开挖洞 1 和开挖洞 2 所引起的位移分别为 u_1 , v_1 和 u_2 , v_2 , 它们对应的复应力函数分别为 $\underline{j}_1(z_1)$, $\underline{y}_1(z_1)$ 和 $\underline{j}_2(z_1)$, $\underline{y}_2(z_1)$. 求 u_1 , v_1 的公式为:

$$2G(u_1 + iv_1) = k \underline{j}_1(z_1) - \frac{w_1(z_1)}{w_1'(z_1)} \overline{\underline{j}_1'(z_1) - \underline{y}_1(z_1)}, \tag{15}$$

其中

$$\begin{cases} \underline{j}_1(z_1) = j_{11}(z_1) - Bw_1(z_1), \\ \underline{y}_1(z_1) = y_{11}(z_1) - (B' + iC')w_1(z_1). \end{cases} \tag{16}$$

求 u_2 , v_2 的公式为:

$$2G(u_2 + iv_2) = k \underline{j}_2(z_1) - \frac{w_1(z_1)}{w_1'(z_1)} \overline{\underline{j}_2'(z_1) - \underline{y}_2(z_1)}, \tag{17}$$

其中

$$\begin{cases} \underline{j}_2(z_1) = \underline{j}(z_1) - \underline{j}_1(z_1), \\ \underline{y}_2(z_1) = \underline{y}(z_1) - \underline{y}_1(z_1). \end{cases} \tag{18}$$

(14), (15)和(17)式中用来计算位移的各复应力函数都是消去刚体位移后的复函数.

4 收敛精度的讨论

为便于精度分析, 取大小相等的两平行地下洞室作为精度分析的算例. 考虑到图 2 所示问题的对称性及精度分析的需要, 在两洞室周边分别以逆时针和顺时针方向取关于 I-I 轴对称的点, 两对称点偏离 x_1 , x_2 轴正向的角度为 q_i (图 2).

由于两洞室相距越近, 其相互影响越大, 分析此时的计算结果最具有代表性和说服力. 本文就图 2 所示的两洞室尺寸和间距, 对 $s_x^\infty = 10.0 \text{ MPa}$, $s_y^\infty = 20.0 \text{ MPa}$, $t_{xy}^\infty = 0.0 \text{ MPa}$

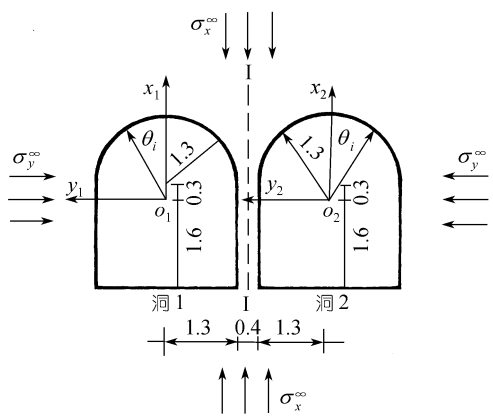


图 2 水平布置的两平行洞室

下迭代 3, 5, 10, 15 及 20 次后的计算结果进行精度分析.

4.1 利用洞室周边多余面力进行精度分析

对于两个不支护的洞室, 实际的应力结果在洞边应满足零面力条件. 交替法求解双连通域问题, 是一个逐步消除多余面力的过程, 计算结果的好坏可直接反映在洞边零面力条件的满足程度. 由于每次迭代后仅洞 1 周边存在多余面力, 所以图 3 给出了不同次迭代后多余面

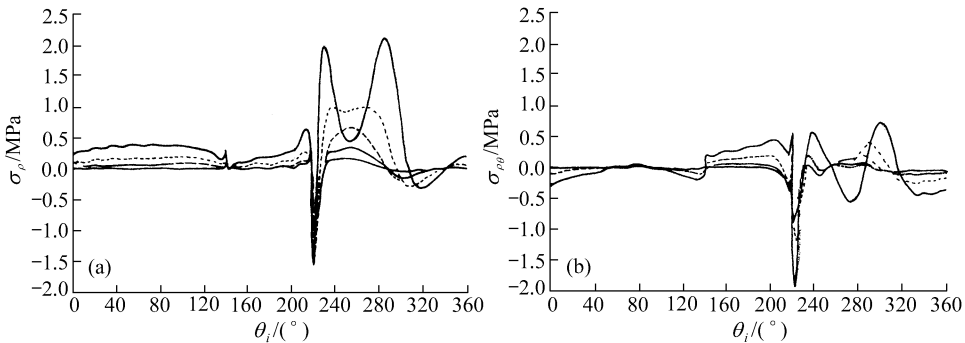


图 3 不同次迭代后洞 1 周边的多余面力 s_r , t_{rq}

——为 3 次迭代, ---为 5 次迭代, - - -为 10 次迭代, - · - · -为 15 次迭代, · · · · ·为 20 次迭代

(a) 径向应力 s_r , (b) 剪切应力 t_{rq}

力 s_r , t_{rq} 在洞 1 周边的分布. 可以看出, 随迭代次数的增多, 多余面力逐渐趋近于零面力.

不同次迭代后多余面力接近零面力的程度用多余面力绝对值的均值 $\bar{s}_r$, $\bar{t}_{rq}$ 来表示. 同外荷载相比, 20 次迭代后的 $\bar{s}_r$, $\bar{t}_{rq}$ 已经很小, 分别仅为 5.592×10^{-2} MPa 和 5.771×10^{-2} MPa. 这很好地说明了 20 次迭代后的应力结果可能具有很高的精度.

4.2 多余面力对围岩应力的影响程度

虽然经过 20 次迭代后的多余面力已足够小, 但还不能得出此时的围岩应力状态就已十分精确的结论, 因为还不知道多余面力的变化对围岩应力状态的影响程度. 本文以受多余面力影响最为剧烈的洞 1 周边 s_q 为分析对象, 记 m 次和 n 次迭代后洞 1 周边 q_i 处的环向应力、径向应力、剪切应力分别为 $s_{q_i}^m$, $s_{rq_i}^m$, $t_{rq_i}^m$ 和 $s_{q_i}^n$, $s_{rq_i}^n$, $t_{rq_i}^n$, 则不同次迭代后多余面力的变化对洞边环向应力的影响可用以下两指标表示:

$$F_s = \frac{\frac{1}{NN} \sum_{i=1}^{NN} |s_{q_i}^m - s_{q_i}^n|}{\frac{1}{NN} \sum_{i=1}^{NN} |s_{rq_i}^m - s_{rq_i}^n|}, \quad (19)$$

$$F_t = \frac{\frac{1}{NN} \sum_{i=1}^{NN} |s_{q_i}^m - s_{q_i}^n|}{\frac{1}{NN} \sum_{i=1}^{NN} |t_{rq_i}^m - t_{rq_i}^n|}, \quad (20)$$

式中 NN 为洞 1 周边所取的计算点数 ($NN = 360$), 此处的 m, n 不同于以前公式中的 m, n .

两指标分别表示洞 1 周边径向应力、剪切应力单位变化所引起的洞边环向应力变化量. 随迭代次数的增加, 指标 F_s , F_t 逐渐减小. 由第 15 次与第 20 次迭代后的计算结果 ($F_s = 0.68$, $F_t = 0.32$) 及 (19) 式和 (20) 式推算, 20 次迭代后的多余面力与零面力相比较所能引起的洞 1 周边环向应力的变化分别仅为 0.04 MPa, 0.02 MPa. 这与此时的洞 1 周边最大环向应力 150.465 MPa 相比已十分微小.

20 次迭代后多余面力足够小, 并且对围岩应力状态影响很小, 这说明: 20 次迭代后的应力结果具有很高的精度. 当然, 还可继续迭代以得到精度更高的计算结果.

4.3 利用两洞室周边的环向应力及位移进行精度分析

由于图 2 所示问题的几何条件和荷载条件都是关于 I-I 轴对称, 实际的围岩应力状态也应关于 I-I 轴对称. 两洞室周边环向应力的对称性指标可表示为:

$$S_I = \frac{1}{NN} \sum_{i=1}^{NN} \left| \frac{s_{q_i}^I - s_{q_i}^{II}}{s_{q_i}^I} \right|, \quad (21)$$

其中 NN 为每个洞室周边考察的点数 ($NN = 360$); $s_{q_i}^I$, $s_{q_i}^{II}$ 分别为洞 1, 洞 2 周边 q_i 处的环向

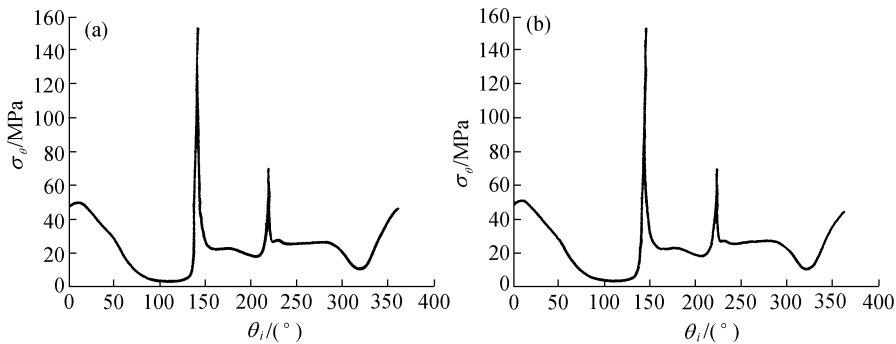


图 4 20 次迭代后两洞室周边的环向应力分布

(a) 洞 1 周边环向应力, (b) 洞 2 周边环向应力

应力. S_I 越小说明对称性越好. 由图 4 可以看出, 20 次迭代后两洞室周边环向应力几乎完全对称 ($S_I = 0.01$).

对于图 2 所示 q_i 处位移的对称, 应有 $u_1 = u_2$, $v_1 = -v_2$. 同样可以制定类似于 (21) 式的对称性指标来表示不同次迭代后两洞室周边位移的对称程度. 限于篇幅, 这里仅给出 20 次迭代后两洞室周边的位移分布. 从图 5 可以看出, 20 次迭代后两洞室周边位移几乎完全对称.

20 次迭代后两洞边应力和位移的高度对称性直接说明此时高精度计算结果的特点.

5 交替法与有限单元法计算结果的比较

为进一步验证本文所提出的简单交替算法的可靠性, 就图 2 所示问题进行了有限单元法的计算. 考虑到问题的对称性而只对 I-I 轴左侧进行网格剖分. 计算中采用八节点等参单元, 网格划分时考虑了洞室开挖的影响范围.

5.1 应力结果的比较

为便于两种方法应力结果的对比, 用交替法对洞 1 周边第一圈单元 (单元最大尺寸不超过

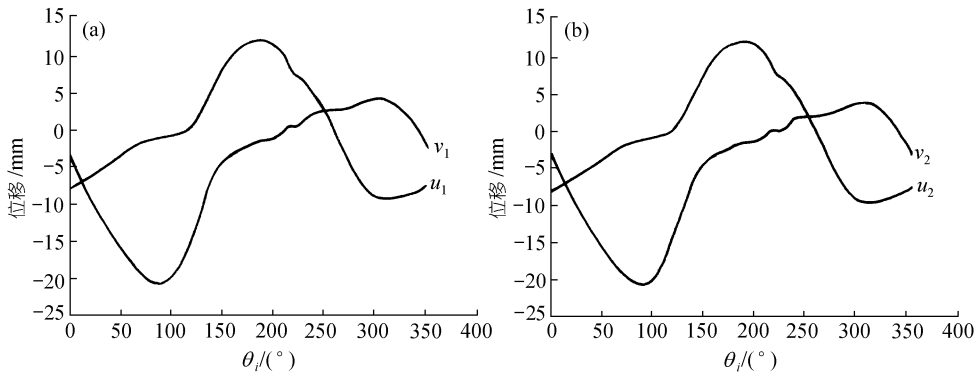


图 5 20 次迭代后两洞室周边的位移分布

(a) 洞 1 周边位移 u_1, v_1 , (b) 洞 2 周边位移 $u_2, -v_2$

0.1 m) 中三排高斯点上的应力进行计算. 由于这些高斯点上的 s_r 和 t_{rq} 仍只在零应力附近, 所以, 图 6 只给出了三圈高斯点上由两种方法得到的 s_q . 该图表明, 除洞室两底角附近外, 其余各高斯点上的 s_q 基本一致, 图 6 中的 q_i 为高斯点逆时针偏离 x_1 轴正向的角度.

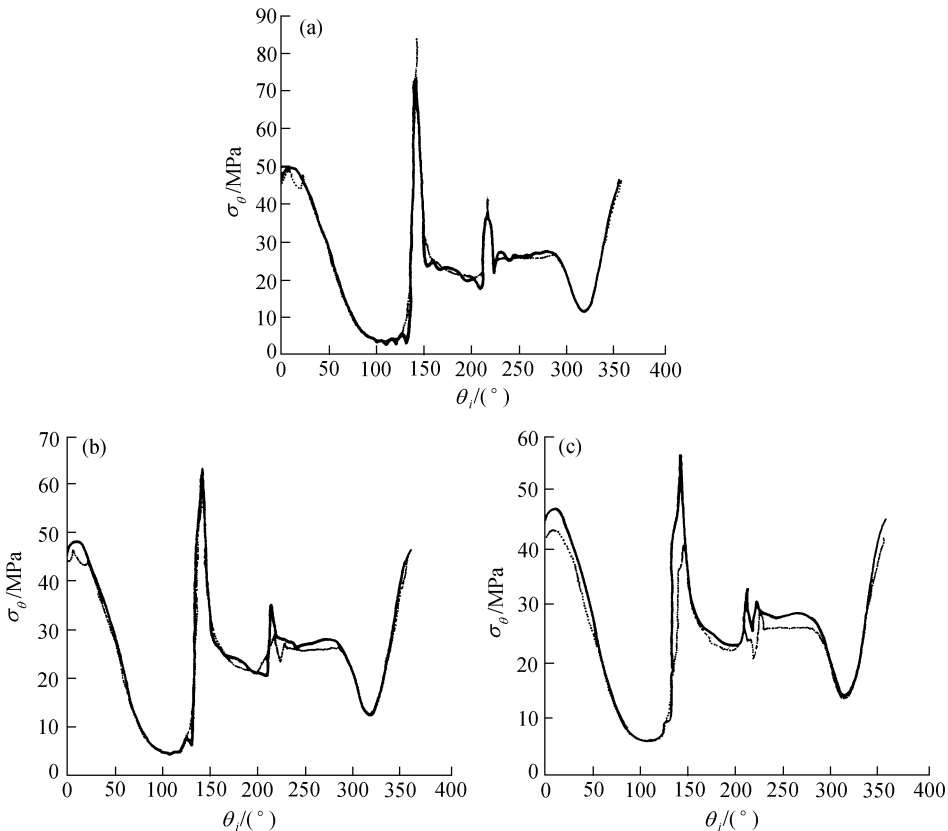


图 6 由两种方法得到的第一圈单元三排高斯点处的 s_q

(a) 第一排高斯点, (b) 第二排高斯点, (c) 第三排高斯点
——为交替法, -----为有限单元法

5.2 位移结果的比较

利用有限单元法可以得到洞 1 周边各节点的绝对位移. 从图 7 可以看出, 用交替法和有

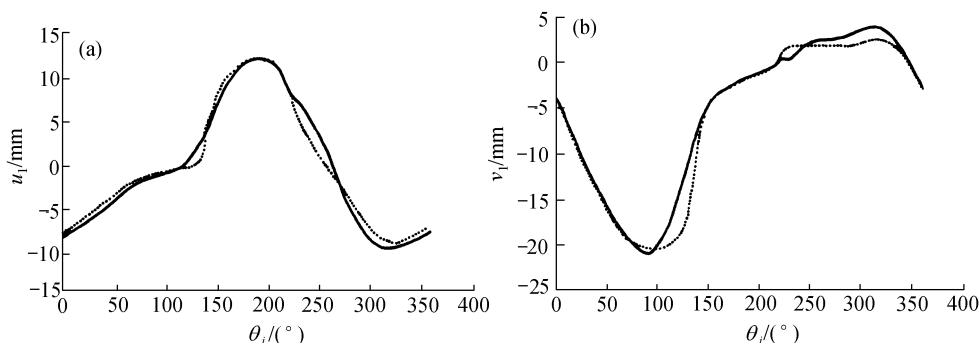


图 7 由两种方法得到的洞 1 周边位移

(a) u_x , (b) v_y . ——为交替法, -----为有限单元法

限单元法得到的洞 1 周边位移变化趋势一致, 数量相差很小.

通过两种方法计算结果的对比, 进一步验证了本文简单交替算法的可靠性.

6 结论

本文所提出的简单交替算法是针对两任意形状孔洞任意布置方式下的平面弹性问题, 其求解方法和基本公式推导过程适用于任何双孔洞的平面弹性问题, 并都可得到任意次迭代后的解析解. 根据不同的问题、不同的精度要求, 都可得到满意的计算结果.

任意布置方式下两任意形状孔洞应力场和位移场解析解的取得无疑会给地下工程、机械制造、压力容器及航空航天器械设计中的双孔洞问题提供更为精确的应力场和位移场分析. 另外, 利用文中所得到的位移解析解可进行双洞室的位移反分析, 并可得到高精度的反演结果.

在应用于地下工程中的双洞室问题时, 本文所提出的解析算法只适用于它的平面应变问题.

参 考 文 献

- 1 潘家铮. 相邻水工隧洞的应力分析. 地下工程, 1979, (01): 2~12
- 2 刘新宇, 侯学渊. 平行圆形隧洞的应力分析. 同济大学学报, 1985, (03): 15~26
- 3 Salerno V L, Mahoney J B. Stress solution for an infinite plate containing two arbitrary circular holes under equal biaxial stresses. Journal of Engineering for Industry, Transactions of ASME, 1968, 35: 656~665
- 4 Ukadgaonker V G. Stress analysis of a plate containing two circular holes having tangential stresses. AIAA Journal, 1980, 18: 125~128
- 5 Kim T J, Ukadgaonker V G. Plane stress analysis of two rigid circular inclusions. AIAA Journal, 1971, 9: 2294~2296
- 6 Ukadgaonker V G. Interaction effect of two arbitrarily oriented cracks-Part I. International Journal of Fracture, 1991, 51: 219~230
- 7 张路青, 吕爱钟. 双孔圆形洞室围岩应力分析的交替法研究. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(5): 534~543
- 8 Yu I W, Sendekyj G P. Multiple circular inclusion problems in plane elastostatics. Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, 1974, 41: 215~220
- 9 Mikhlin S G. Method of Successive Approximation in Solutions to Biharmonic Equations. Trudy, Seismological, USSR, 1934, 39
- 10 Soboleff S. Schwarz algorithm in the theory of elasticity. Reports from Academy of Science, USSR, 1936, IV
- 11 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法. 北京: 煤炭工业出版社, 1994. 70~76
- 12 吕爱钟, 蒋斌松. 岩石力学反问题. 北京: 煤炭工业出版社, 1998. 164~171