中国科学 : 数学 2014 年 第 44 卷 第 11 期 : 1165 ～ 1184
link.springer.com math.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

对角占优矩阵奇异 - 非奇异的充分必要判据

金继东

首都经济贸易大学信息学院, 北京 100071
E-mail: jjd@cueb.edu.cn

收稿日期: 2014-02-17; 接受日期: 2014-07-22

摘要 本文研究对角占优矩阵奇异 - 非奇异的充分必要条件. 基于 Taussky 定理, 本文得出, 可约对角占优矩阵的奇异性由其独立 Frobenius 块的奇异性决定, 从而将这一问题化为不可约对角占优矩阵的奇异 - 非奇异性问题; 运用 Taussky 定理研究奇异不可约对角占优矩阵的相似性和酉相似性, 获得这类矩阵元素辐角间的关系; 并与 Taussky 定理给出的这类矩阵元素模之间的关系结合在一起, 研究不可约对角占优矩阵奇异的充分必要条件; 最后给出不可约对角占优矩阵奇异 - 非奇异性的判定方法.

关键词 对角占优矩阵 奇异 非奇异 可约 不可约 Frobenius 标准型 酉相似性

MSC (2010) 主题分类 15A29, 15A21, 15B99, 65F18, 15B52

1 引言

矩阵的非奇异性判定是对角占优矩阵论中的一个重要问题. Taussky [1] 总结了 19 世纪 70 年代末到 20 世纪 40 年代这方面的研究; Varga [2] 则总结了 20 世纪 70 年代中期之前这方面的研究. Ostrowski [3–5] 提出的广义对角占优以及 M 和 H 矩阵的概念对这一学科的发展产生了深远的影响. Berman 和 Plemmons [6] 总结了非奇异 M 矩阵的 50 个充分必要条件. H 矩阵的判定是我国计算数学较为活跃的研究领域之一. 在这方面, 文献 [7–14] 等作了许多开拓性的工作.

对角占优矩阵的非奇异性与矩阵伴随有向图的性质密切相关. Taussky 定理 [15, 16] 指出, 如果矩阵的伴随有向图强连通, 那么只需要存在一个严格对角占优行, 对角占优矩阵就是非奇异的. Shivakumar 和 Chew [17] 则进一步指出, 如果矩阵伴随有向图的每个结点到某一个严格对角占优行所对应的结点存在路径, 那么, 对角占优矩阵就是非奇异的.

本文研究对角占优矩阵奇异 - 非奇异的充分必要条件. 21 世纪初, Kolotilina [18] 给出了奇异不可约对角占优矩阵的一个酉相似结果, 实际上给出了不可约对角占优矩阵奇异的一个充分必要条件. 本研究则从另外一个角度 —Taussky 定理出发, 获得了更为细致的结果. 此外, 文献 [19–21] 根据 Taussky 定理将可约对角占优矩阵的奇异 - 非奇异性问题化为不可约对角占优矩阵的奇异 - 非奇异性问题. 换言之, 对角占优矩阵奇异 - 非奇异的充分必要条件可以归结到 Taussky 定理这样一条理论线索之下. 本文将从 Taussky 定理出发, 循序渐进地进行讨论, 主要包括:

(1) 化可约对角占优矩阵的奇异 - 非奇异性问题为不可约对角占优矩阵的奇异 - 非奇异性问题;

(2) 奇异不可约对角占优矩阵的相似性和酉相似性分析;

(3) 不可约对角占优矩阵奇异 - 非奇异的充分必要条件及其判定方法 (本文的主要结果).

英文引用格式: Jin J D. Necessary and sufficient criterion for singularity or non-singularity of diagonally dominant matrices (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 1165–1184, doi: 10.1360/N012014-00010

2 Taussky 定理及其推论

文中若无特别说明, 一律假定所讨论的矩阵 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 其中 $\mathbb{C}$ 是复数域, $|\cdot|$ 为复数的模.

定义 2.1 (1) 矩阵 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 如果满足

$$|a_{ii}|\geqslant\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,\dots,n,\tag{2.1}$$

则称 A 是行对角占优矩阵. i 行取严格不等号, 则 i 行为严格对角占优行; i 行取等号, 则 i 行为非严格对角占优行. 如果 A 的所有行都是严格对角占优行, 则称 A 为行严格对角占优矩阵; 如果 A 的所有行都是非严格对角占优行, 则称 A 为行弱对角占优矩阵.

(2) 矩阵 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 如果满足

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0,\quad i=1,\dots,n,\tag{2.2}$$

则称 A 是行平衡矩阵; 实数域上的行平衡矩阵 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 称为仿射矩阵.

对列可以作类似的定义.

如果矩阵 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 不仅关于行是对角占优的而且关于列也是对角占优的, 则称 A 为行列双对角占优矩阵; 如果矩阵 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 不仅关于行是平衡的而且关于列也是平衡的, 则称 A 为行列双平衡矩阵.

定义 2.2 矩阵 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 给定, 简单有向图 $\Gamma(A)=\langle V,\mathcal{E},A\rangle$ 称为矩阵 A 的伴随有向图, 其中 $V=\{v_i\mid i=1,\dots,n\}$ 是 $\Gamma(A)$ 结点的集合, $\mathcal{E}=\{(v_i,v_j)\in V\times V\mid a_{ij}\neq 0\}$ 是 $\Gamma(A)$ 边的集合.

定义 2.3 矩阵 A 的伴随有向图 $\Gamma(A)=\langle V,\mathcal{E},M\rangle$ 是强连通的, 则 A 是不可约的; 否则就是可约的.

关于不可约对角占优矩阵有以下著名的 Taussky 定理 [15,16].

定理 2.1 (Taussky) $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是不可约对角占优矩阵. 如果 A 存在严格对角占优行, 则 A 是非奇异的.

2.1 可约对角占优矩阵的 Frobenius 标准型

A 是方阵, 则存在置换矩阵 P, 使得

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} A_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & A_{ss} & & & \\ A_{s+1,1} & \cdots & A_{s+1,s} & A_{s+1,s+1} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{s+k,1} & \cdots & A_{s+k,s} & A_{s+k,s+1} & \cdots & A_{s+k,s+k}\end{pmatrix}.\tag{2.3}$$

分块矩阵 (2.3) 称为 A 的 Frobenius 标准型 [22–24], 其中对角块 A_{pp} $(p=1,\dots,s+k)$ 为不可约方阵 ($\Gamma(A_{pp})$ 是 $\Gamma(A)$ 的强分量 - 极大强连通子图), 称为 A 的 Frobenius 块. A 的 Frobenius 标准型 (2.3)

有以下特点:

$$\begin{cases} A_{pq} = 0, & \forall\, q \neq p, \quad p \leqslant s, \\ A_{pq} \neq 0, & \exists\, q < p, \quad p > s. \end{cases} \tag{2.4}$$

因此, 称 $A_{11}, \ldots, A_{ss}$ 为 A 的独立 Frobenius 块, $A_{s+1,s+1}, \ldots, A_{s+k,s+k}$ 为 A 的非独立 Frobenius 块.

文献 [19–21] 给出了以下结果.

推论 2.1 对角占优矩阵 A 的非独立 Frobenius 块是非奇异的. A 是奇异的当且仅当 A 的独立 Frobenius 块中至少有一个是奇异的.

证明 假设 (2.3) 是矩阵 A 的 Frobenius 标准型, A_{pp} 是 A 的非独立 Frobenius 块. A 是对角占优的, 因此, A_{pp} 是对角占优的. A_{pp} 是 A 的非独立 Frobenius 块, 根据 (2.4), 存在 $q < p$, $A_{pq} \neq 0$. 因此, 即便 A_{pp} 在 A 中的对应行均为非严格对角占优行, A_{pp} 也必定存在严格对角占优行. Frobenius 块 A_{pp} 是不可约的, 根据 Taussky 定理, A_{pp} 是非奇异的. A 所有的非独立 Frobenius 块是非奇异的, 那么, 它们所对应的 A 的行线性无关, A 的奇异 - 非奇异性由其独立 Frobenius 块的奇异 - 非奇异性决定. A 是奇异的当且仅当 A 的独立 Frobenius 块中至少有一个是奇异的. □

推论 2.1 将一般 (可约) 对角占优矩阵的奇异 - 非奇异性化为其所有独立 Frobenius 块的奇异 - 非奇异性. 由于 Frobenius 块不可约, 因此也就将这种问题化为不可约对角占优矩阵的奇异 - 非奇异性.

2.2 不可约对角占优矩阵

由定义立得 Taussky 定理的以下推论.

推论 2.2 不可约对角占优矩阵 A 是奇异的, 则 A 是弱对角占优的.

推论 2.3 不可约对角占优矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是奇异的, 则 $\mathrm{Rank}A = n - 1$.

证明 修改 a_{ii} 为 a'_{ii}, 使 $|a'_{ii}| > |a_{ii}|$. 修改后的矩阵 A' 的 i 行是严格对角占优行. 根据 Taussky 定理, A' 是非奇异的. 据此可得 A 除 i 行以外的各行是线性无关的. 因此, $\mathrm{Rank}A \geqslant n - 1$. A 是奇异的, 则有 $\mathrm{Rank}A = n - 1$. □

这意味着奇异不可约对角占优矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的任意一行均为其他 $n-1$ 行的线性组合且线性组合系数均不为零. 进而有以下推论.

推论 2.4 不可约对角占优矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是奇异的, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^{\mathrm{T}}$ 分别是 A 零特征根的左右特征向量, ρ 和 γ 均不存在零元素.

定义 2.4 $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ 和 $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^{\mathrm{T}}$ 分别是矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 零特征根的左右特征向量. 对角矩阵 $\mathrm{P} = \mathrm{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ 和 $\Upsilon = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ 分别称为 A 零特征根的左右特征矩阵.

根据推论 2.4, 有以下结果.

推论 2.5 奇异不可约对角占优矩阵 A 零特征根的左右特征矩阵 P 和 Υ 是非奇异的.

3 奇异不可约对角占优矩阵的相似性分析

3.1 平衡对角占优矩阵

矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的元素可以表示为 $a_{ij} = |a_{ij}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{ij}}$, 其中 $|a_{ij}|$ 为 a_{ij} 的模, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{ij}}$ 是 a_{ij} 的单位复数, θ_{ij} 为 a_{ij} 的辐角.

命题 3.1 矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是行对角占优的并且是行平衡的, 则

(1) A 是行弱对角占优的;

(2) 对任给的 $a_{ij}\neq 0$ $(j\neq i)$ 有 $\theta_{ij}-\theta_{ii}=2k\pi+\pi$.

证明 A 是行平衡的, (2.2) 成立. 因此,

$$-a_{ii}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}; \tag{3.1}$$

$$|a_{ii}|=|-a_{ii}|=\left|\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}\right|\leqslant\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|, \tag{3.2}$$

等号成立当且仅当所有的 a_{ij} $(a_{ij}\neq 0,\ j\neq i)$ 在复平面上的矢量方向相同.

A 是行对角占优的, $|a_{ii}|\geqslant\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$. 因此, $|a_{ii}|=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$. 这就证明了 (1). (3.2) 中等号成立, (3.2) 中所有 a_{ij} 的辐角 θ_{ij} 相同 $(\forall a_{ij}\neq 0,\ j\neq i)$. 进而由 (3.1) 就证明了 (2). □

命题 3.2 矩阵 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是行平衡的并且是列对角占优的, 则

(1) A 是行弱对角占优的;

(2) 对任给的 $a_{ij}\neq 0$ $(j\neq i)$ 有 $\theta_{ij}-\theta_{ii}=2k\pi+\pi$.

证明 A 是行平衡的, (2.2) 成立. 因此, $-a_{ii}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}$,

$$|a_{ii}|=|-a_{ii}|=\left|\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}\right|\leqslant\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|, \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ii}|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|. \tag{3.4}$$

A 是列对角占优的, 则 $|a_{jj}|\geqslant\sum_{i=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}|$. 因此,

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{jj}|\geqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}|. \tag{3.5}$$

由 (3.4) 和 (3.5) 知, (3.4) 等号成立. 而 (3.4) 等号成立仅当 (3.3) 等号成立. 因此, A 是行弱对角占优的, 这就证明了 (1). 而且它还是行平衡的, 根据命题 3.1, 就证明了 (2). □

由命题 3.2, 立得以下命题.

命题 3.3 矩阵 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是行对角占优的或者列对角占优的, 并且是行列双平衡的, 则

(1) A 是行列双弱对角占优的;

(2) 对任给 $a_{ij}\neq 0$ $(j\neq i)$ 有 $\theta_{ij}-\theta_{ii}=2k\pi+\pi$ 且 $\theta_{ij}-\theta_{jj}=2k\pi+\pi$. 进而, $\theta_{ii}-\theta_{jj}=2k\pi$.

引理 3.1 如果矩阵 A 满足如下性质:

(1) A 是不可约的;

(2) A 是行对角占优的或者列对角占优的;

(3) A 是行列双平衡的,

则 A 所有对角元素的辐角相同, 非对角元素与对角元素的辐角相差 $2k\pi+\pi$.

证明 矩阵 A 是不可约的, 其伴随有向图 $\Gamma(A)=\langle V,\mathcal{E},A\rangle$ 是强连通的. 存在包含所有结点的相连的边的集合:

$$\{(v_{s_1},v_{s_2}),(v_{s_2},v_{s_3}),\ldots,(v_{s_{m-1}},v_{s_m})\}\subset\mathcal{E},\quad\{v_{s_1},v_{s_2},v_{s_3},\ldots,v_{s_{m-1}},v_{s_m}\}=V. \tag{3.6}$$

矩阵 A 是行对角占优的或列对角占优的并且是行列双平衡的. 根据命题 3.3, 只要 $a_{ij} \neq 0$, a_{ii} 和 a_{jj} 的辐角就相同. 根据矩阵伴随有向图的定义, $a_{ij} \neq 0$ 等价于边 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$. 结合 (3.6) 就可得 $\theta_{s_1s_1} = \cdots = \theta_{s_ms_m}$, 而这包括了 A 所有对角元素的辐角. 再根据命题 3.3 就可得 A 所有非对角元素的辐角与 A 对角元素的辐角相差 $2k\pi + \pi$. □

3.2 特征矩阵变换

复数域上的矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 可以写为 A 的模矩阵 $A_M = [|a_{ij}|] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 与单位复数矩阵 $A_C = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(a_{ij})}] \in \mathbb{C}_0^{n\times n}$ 的 Hadamard 积:

$$A = [a_{ij}] = [|a_{ij}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(a_{ij})}] = [A_M \circ A_C],$$

其中 $\mathbb{C}_0$ 为单位复数域, $|a_{ij}|$ 是 a_{ij} 的模, $\theta(a_{ij})$ 是 a_{ij} 的辐角, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(a_{ij})}$ 是 a_{ij} 的单位复数部分.

定义 3.1 符号约定: A 为矩阵, A_M 为 A 的模矩阵, A_C 为 A 的单位复数矩阵.

引理 3.2 $A = [a_{ij}]$ 是奇异不可约行对角占优矩阵, 则存在 A 零特征根的左右特征矩阵 P 和 Υ, 使

$$PA\Upsilon = B, \tag{3.7}$$

其中 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是行列双平衡的双弱对角占优矩阵. 将 B 写为 $B = [B_M \circ B_C]$, $B_C = [b'_{ij}]$ 具有如下性质:

$$b'_{ij} = \begin{cases} \mathrm{e}^{i0} = 1, & j = i, \\ \mathrm{e}^{i\pi} = -1, & j \neq i, \quad a_{ij} \neq 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

即 B 对角元素为正 (辐角为 $2k\pi$), 非零非对角元素为负 (辐角为 $2k\pi + \pi$).

证明 A 为奇异不可约行对角占优矩阵. 由推论 2.5, 存在 A 零特征根的左右特征矩阵 P 和 Υ. P 和 Υ 是非奇异的对角矩阵.

令 $A' = PA$. P 是对角矩阵. PA 不改变 A 原有的行对角占优性, 即 $A' = PA$ 是行对角占优的. P 是 A 零特征根的左特征矩阵, 因此, $A' = PA$ 是列平衡的. 根据命题 3.2, $A' = PA$ 是列对角占优的. 这样 $A' = PA$ 是列平衡的和列对角占优的.

令 $A'' = A'\Upsilon = PA\Upsilon$. Υ 是 A 零特征根的右特征矩阵, 因此, $A'' = A'\Upsilon = PA\Upsilon$ 是行平衡的. 并且 $A'\Upsilon$ 不改变 A' 的列平衡性和列对角占优性. 这样 $A'' = PA\Upsilon$ 是行列双平衡的和列对角占优的.

P 和 Υ 是对角元素不为零的对角矩阵. A 和 $A''=PA\Upsilon$ 的伴随有向图 $\Gamma(A)$ 和 $\Gamma(A'')$ 相同. A 是不可约的, 则 A'' 是不可约的. $A''=PA\Upsilon$ 是行列双平衡的和列对角占优的, 并且不可约. 根据引理 3.1, A'' 所有对角元素的辐角相同, A'' 所有非零非对角元素的辐角与 A'' 对角元素的辐角相差 $2k\pi+\pi$. 令 θ_D 是 $A'' = PA\Upsilon$ 对角元素的辐角, 则

$$PA\Upsilon = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_D}B, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_D}PA\Upsilon = B,$$

$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个实矩阵. B 与 $A'' = PA\Upsilon$ 具有相同的行列平衡性和行列对角占优性, 是行列双平衡的和行列双弱对角占优的. P 是 A 零特征根的左特征矩阵, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_D}P$ 也是 A 零特征根的左特征矩阵, 因此, 存在 A 零特征根的左特征矩阵 P, 使得 $PA\Upsilon = B$. 证毕. □

引理 3.2 是后面将要进行的奇异不可约对角占优矩阵相似性分析的基础. 然而其本身也有自己的重要意义. 例如, 它沟通了奇异不可约对角占优矩阵与双弱对角占优实数矩阵之间的联系.

3.3 相似性

实数域上的矩阵 $S=[s_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 如果满足

$$s_{ij}\geqslant 0,\quad i,j=1,\ldots,n,\quad \sum_{j=1}^{n}s_{ij}=1,\quad i=1,\ldots,n,$$

则 S 为 Markov 矩阵. I 为单位矩阵. $I-S$ 是奇异 M- 矩阵, 称为 Markov M- 矩阵.

定义 3.2 符号约定: $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 为方阵, 定义 $\mathcal{D}(A)=\mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})$, 称为 A 的对角线矩阵, $\mathcal{D}^{-1}(A)$ 为 $\mathcal{D}(A)$ 的逆.

定理 3.1 不可约行对角占优矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是奇异的, 则 A 零特征根的右特征矩阵 Υ 使得

$$\Upsilon^{-1}A\Upsilon=\mathcal{D}(A)(I-S).$$

证明 根据引理 3.2, $PA\Upsilon=B$. 对式子的左端作以下等价变换:

$$PA\Upsilon=P(\mathcal{D}(A)\mathcal{D}^{-1}(A))A\Upsilon=(P\mathcal{D}(A))(\mathcal{D}^{-1}(A)A)\Upsilon.$$

这样

$$(P\mathcal{D}(A))(\mathcal{D}^{-1}(A)A)\Upsilon=B.$$

上式的两端左乘 $\mathcal{D}^{-1}(B)$,

$$(\mathcal{D}^{-1}(B)P\mathcal{D}(A))(\mathcal{D}^{-1}(A)A)\Upsilon=\mathcal{D}^{-1}(B)B. \tag{3.9}$$

$\mathcal{D}^{-1}(A)A$ 和 $\mathcal{D}^{-1}(B)B$ 的对角元素均为 “1”, 因此, $\mathcal{D}^{-1}(B)P\mathcal{D}(A)=\Upsilon^{-1}$. 将其代回 (3.9),

$$\Upsilon^{-1}(\mathcal{D}^{-1}(A)A)\Upsilon=\mathcal{D}^{-1}(B)B.$$

Υ^{-1} 和 $\mathcal{D}^{-1}(A)$ 是对角矩阵, $\Upsilon^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A)=\mathcal{D}^{-1}(A)\Upsilon^{-1}$. 因此,

$$\mathcal{D}^{-1}(A)(\Upsilon^{-1}A\Upsilon)=\mathcal{D}^{-1}(B)B,\quad \Upsilon^{-1}A\Upsilon=\mathcal{D}(A)(\mathcal{D}^{-1}(B)B). \tag{3.10}$$

$B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是行列双平衡的实数矩阵且对角元素为正非对角元素为负. $\mathcal{D}^{-1}(B)B=[b'_{ij}]$ 满足

$$b'_{ii}=1,\quad -1<b'_{ij}\leqslant 0,\quad \sum_{j=1,j\neq i}^{n}b'_{ij}=-1.$$

令 $S=[s_{ij}]$, 其中

$$s_{ij}=\begin{cases}0, & j=i,\\ -b'_{ij}, & j\neq i.\end{cases}$$

S 是 Markov 矩阵, $\mathcal{D}^{-1}(B)B=I-S$ 是 Markov M- 矩阵. 将 $\mathcal{D}^{-1}(B)B=I-S$ 代入 (3.10),

$$\Upsilon^{-1}A\Upsilon=\mathcal{D}(A)(I-S).$$

证毕. □

3.4 酉相似性

定义 3.3 对角占优矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的比较矩阵 $\mu(A)=[g_{ij}]$ 定义为

$$g_{ij}=\begin{cases}|a_{ii}|, & j=i,\\ -|a_{ij}|, & j\neq i.\end{cases}$$

由 (3.8) 易知,

$$[A_M\circ B_C]=\mu(A). \tag{3.11}$$

以下讨论将广泛使用到复数域上矩阵的以下性质: $X,Y\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为复数域上的矩阵. X 和 Y 中有一个是对角矩阵, 那么, X 和 Y 的乘积可以表示为 X 和 Y 模矩阵乘积与单位复数矩阵乘积的 Hadamard 积, 即

$$XY=[X_M\circ X_C][Y_M\circ Y_C]=[X_MY_M\circ X_CY_C].$$

定理 3.2 不可约行对角占优矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是奇异的, 则 A 零特征根右特征矩阵 Υ 的单位复数矩阵 $\Upsilon_C\in\mathbb{C}_0^{n\times n}$ (对角酉矩阵) 使得

$$\Upsilon_C^{-1}A\Upsilon_C=\mathcal{D}(A_C)[A_M\circ B_C]=\mathcal{D}(A_C)\mu(A), \tag{3.12}$$

其中 B_C 为满足 (3.8) 的矩阵.

证明 根据引理 3.2, $PA\Upsilon=B$. P 和 Υ 是对角矩阵, 因此,

$$\begin{aligned}&PA\Upsilon=[P_M\circ P_C][A_M\circ A_C][\Upsilon_M\circ\Upsilon_C]=[P_MA_M\Upsilon_M\circ P_CA_C\Upsilon_C],\quad B=[B_M\circ B_C],\\ &P_CA_C\Upsilon_C=B_C.\end{aligned} \tag{3.13}$$

令 $\mathcal{D}(B_C)$ 为 B_C 的对角线矩阵. 根据 (3.8), $\mathcal{D}(B_C)=I$. 这样变换 (3.13) 关于 A_C 的对角线部分:

$$P_C\mathcal{D}(A_C)\Upsilon_C=\mathcal{D}(B_C)=I,\quad P_C\mathcal{D}(A_C)=\Upsilon_C^{-1}. \tag{3.14}$$

现在讨论 $P_CA\Upsilon_C$. P_C 和 Υ_C 是对角矩阵, 因此,

$$\begin{aligned}&P_CA\Upsilon_C=[I\circ P_C][A_M\circ A_C][I\circ\Upsilon_C]=[A_M\circ P_CA_C\Upsilon_C]=[A_M\circ B_C],\\ &P_CA\Upsilon_C=[A_M\circ B_C].\end{aligned}$$

上式左右两端同时左乘 $\mathcal{D}(A_C)$, 基于 $\mathcal{D}(A_C)$ 和 P_C 的对角性,

$$\mathcal{D}(A_C)(P_CA\Upsilon_C)=\mathcal{D}(A_C)[A_M\circ B_C],\quad (P_C\mathcal{D}(A_C))A\Upsilon_C=\mathcal{D}(A_C)[A_M\circ B_C].$$

由 (3.14), $(P_C\mathcal{D}(A_C))=\Upsilon_C^{-1}$. 因此,

$$\Upsilon_C^{-1}A\Upsilon_C=\mathcal{D}(A_C)[A_M\circ B_C].$$

而由 (3.11), $[A_M\circ B_C]=\mu(A)$. 因此,

$$\Upsilon_C^{-1}A\Upsilon_C=\mathcal{D}(A_C)[A_M\circ B_C]=\mathcal{D}(A_C)\mu(A).$$

证毕. □

3.5 广义对角占优矩阵的酉相似性

本小节讨论定理 3.2 与 Kolotilina [18] 结论间的关系. 为便于对照, 我们给出以下推论.

推论 3.1 不可约行对角占优矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是奇异的, 则 A 零特征根右特征矩阵 Υ 的单位复数矩阵 $\Upsilon_C\in\mathbb{C}_0^{n\times n}$ (对角酉矩阵) 使得

$$\Upsilon_C^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A)A\Upsilon_C=[\mathcal{D}^{-1}(A_M)A_M\circ B_C],\quad \Upsilon_C^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A)A\Upsilon_C=\mu(\mathcal{D}^{-1}(A)A). \tag{3.15}$$

证明 根据定理 3.2,

$$\Upsilon_C^{-1}A\Upsilon_C=\mathcal{D}(A_C)[A_M\circ B_C].$$

上式左右两端同时左乘 $\mathcal{D}^{-1}(A)$, 并基于 $\mathcal{D}^{-1}(A),\Upsilon_C^{-1}$ 和 $\mathcal{D}(A_C)$ 的对角性有

$$\mathcal{D}^{-1}(A)\Upsilon_C^{-1}A\Upsilon_C=\Upsilon_C^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A)A\Upsilon_C,$$
$$\mathcal{D}^{-1}(A)\mathcal{D}(A_C)[A_M\circ B_C]=[\mathcal{D}^{-1}(A_M)\circ\mathcal{D}^{-1}(A_C)][I\circ\mathcal{D}(A_C)][A_M\circ B_C]=[\mathcal{D}^{-1}(A_M)A_M\circ B_C].$$

因此,

$$\Upsilon_C^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A)A\Upsilon_C=[\mathcal{D}^{-1}(A_M)A_M\circ B_C].$$

而由 (3.11), $[\mathcal{D}^{-1}(A_M)A_M\circ B_C]=\mu(\mathcal{D}^{-1}(A)A)$. 将其代入上式就有

$$\Upsilon_C^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A)A\Upsilon_C=\mu(\mathcal{D}^{-1}(A)A).$$

证毕. □

复空间上的方阵 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 称为广义对角占优矩阵, 如果存在 $v_1,\dots,v_n>0$,

$$|a_{ii}|v_i\geqslant\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|v_j,\quad i=1,\dots,n. \tag{3.16}$$

Kolotilina [18] 给出了奇异不可约广义对角占优矩阵的一个酉相似结果. 我们先由推论 3.1 证明这个结果.

推论 3.2 (Kolotilina) A 是满足 (3.16) 的不可约广义对角占优矩阵. A 是奇异的, 当且仅当对 A 所有的行 (3.16) 的等号成立, 并且存在对角酉阵 U 使得

$$U^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A)AU=\mu(\mathcal{D}^{-1}(A)A). \tag{3.17}$$

证明 矩阵 A 是广义对角占优的, 则存在非奇异对角矩阵 $V=\mathrm{diag}(v_1,\dots,v_n)$, 其中 $v_1,\dots,v_n>0$, 使得 AV 是对角占优的. 由于 A 是奇异的, 因此, AV 是奇异的; 由于 A 是不可约的, 因此, AV 是不可约的. 所以, AV 是奇异不可约对角占优矩阵. 将 AV 代入 (3.15) 可得

$$\Upsilon_C^{-1}(\mathcal{D}^{-1}(AV)(AV))\Upsilon_C=[\mathcal{D}^{-1}(A_MV)(A_MV)\circ B_C]. \tag{3.18}$$

V 是对角矩阵, $\mathcal{D}(V)=V$. (3.18) 的左端

$$\Upsilon_C^{-1}(\mathcal{D}^{-1}(AV)(AV))\Upsilon_C=\Upsilon_C^{-1}(\mathcal{D}^{-1}(V)\mathcal{D}^{-1}(A)AV)\Upsilon_C=\Upsilon_C^{-1}(V^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A)AV)\Upsilon_C.$$

$\Upsilon_C,\Upsilon_C^{-1},V^{-1}$ 和 V 均为对角矩阵, 因此,

$$\Upsilon_C^{-1}(V^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A)AV)\Upsilon_C=V^{-1}\Upsilon_C^{-1}(\mathcal{D}^{-1}(A)A)\Upsilon_CV.$$

上式右端左乘 V, 并右乘 V^{-1} 后为

$$\Upsilon_C^{-1}(\mathcal{D}^{-1}(A)A)\Upsilon_C.$$

(3.18) 的右端

$$[\mathcal{D}^{-1}(A_MV)(A_MV)\circ B_C]=[V^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A_M)A_MV\circ B_C].$$

上式右端左乘 V, 并右乘 V^{-1}. 基于 V 和 V^{-1} 的对角性,

$$\begin{aligned}V[V^{-1}(\mathcal{D}^{-1}(A_M)A_M)V\circ B_C]V^{-1}&=[V\circ I][V^{-1}(\mathcal{D}^{-1}(A_M)A_M)V\circ B_C][V^{-1}\circ I]\\&=[VV^{-1}(\mathcal{D}^{-1}(A_M)A_M)VV^{-1}\circ IB_CI]\\&=[(\mathcal{D}^{-1}(A_M)A_M)\circ B_C].\end{aligned}$$

因此,

$$\Upsilon_C^{-1}(\mathcal{D}^{-1}(A)A)\Upsilon_C=[(\mathcal{D}^{-1}(A_M)A_M)\circ B_C].$$

根据 (3.11), $[(\mathcal{D}^{-1}(A_M)A_M)\circ B_C]=\mu(\mathcal{D}^{-1}(A)A)$. 所以,

$$\Upsilon_C^{-1}(\mathcal{D}^{-1}(A)A)\Upsilon_C=\mu(\mathcal{D}^{-1}(A)A).$$

取 $U=\Upsilon_C$, 命题得证. □

对角占优矩阵是 Ostrowski 向量 $v=(v_1,\ldots,v_n)^{\mathrm{T}}$ 取 $v=(1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$ 时广义对角占优矩阵的一种特殊情形. 因此, 推论 3.1 是推论 3.2 的直接推论. 但以上推导说明, 两者并非是一个蕴含另一个的关系, 而是相互等价的关系. 推论 3.2 和 3.1 实际上是一对等价命题.

4 不可约对角占优矩阵奇异 - 非奇异的充分必要条件及其判定方法

4.1 充分必要条件

引理 4.1 不可约行对角占优矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是奇异的, 则 A 零特征根右特征矩阵 Υ 的单位复数矩阵 $\Upsilon_C\in\mathbb{C}_0^{n\times n}$ (对角酉矩阵) 使得

$$\Upsilon_C^{-1}A_C\Upsilon_C=\mathcal{D}(A_C)B_C,\tag{4.1}$$

其中 $A_C\in\mathbb{C}_0^{n\times n}$ 是 A 的单位复数矩阵, $\mathcal{D}(A_C)$ 是 A_C 的对角线矩阵, B_C 满足 (3.8).

证明 根据定理 3.2, $\Upsilon_C^{-1}A\Upsilon_C=\mathcal{D}(A_C)[A_M\circ B_C]$,

$$\Upsilon_C^{-1}A\Upsilon_C=\Upsilon_C^{-1}[A_M\circ A_C]\Upsilon_C=[A_M\circ\Upsilon_C^{-1}A_C\Upsilon_C],\quad \mathcal{D}(A_C)[A_M\circ B_C]=[A_M\circ\mathcal{D}(A_C)B_C].$$

因此, $\Upsilon_C^{-1}A_C\Upsilon_C=\mathcal{D}(A_C)B_C$. □

下面给出本文的主定理: 不可约对角占优矩阵奇异的充分必要条件.

定理 4.1 不可约对角占优矩阵 $A=[a_{ij}]$ 是奇异的, 当且仅当

(1) A 是弱对角占优的;

(2) 存在单位复数 $\gamma_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_1)},\ldots,\gamma_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_n)}\neq0$, 使关于 A 非零非对角元素的辐角方程组

$$\mathrm{mod}\,(-\theta(\gamma_i)+\theta(\gamma_j),2\pi)=\mathrm{mod}\,(\pi+\theta(a_{ii})-\theta(a_{ij}),2\pi),\quad a_{ij}\neq0,\quad j\neq i\tag{4.2}$$

或

$$\mathrm{mod}\,(\theta(\gamma_j),2\pi)=\mathrm{mod}\,(\pi+\theta(a_{ii})-\theta(a_{ij})+\theta(\gamma_i),2\pi),\quad a_{ij}\neq 0,\quad j\neq i \tag{4.3}$$

相容, 即 $\theta(\gamma_1),\dots,\theta(\gamma_n)$ 为以上方程组的解, 其中 $\theta(a_{ij})$ 是 a_{ij} 的辐角, $\theta(a_{ii})$ 是 a_{ii} 的辐角. $\mathrm{mod}\,(x,y)$ 为 x 整除 y 取余运算.

证明　必要性 不可约对角占优矩阵 A 是奇异的. 根据推论 2.2, A 是弱对角占优的. 根据引理 4.1, 如果 A 是奇异的则有

$$\Upsilon_C^{-1}A_C\Upsilon_C=\mathcal{D}(A_C)B_C. \tag{4.4}$$

令 $G=[g_{ij}]=\Upsilon_C^{-1}A_C\Upsilon_C$,

$$g_{ij}=\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta(\gamma_i)+\theta(a_{ii})+\theta(\gamma_i))}, & j=i,\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta(\gamma_i)+\theta(a_{ij})+\theta(\gamma_j))}, & j\neq i,\quad a_{ij}\neq 0,\end{cases}$$

$$\theta(g_{ij})=\begin{cases}\theta(a_{ii}), & j=i,\\ -\theta(\gamma_i)+\theta(a_{ij})+\theta(\gamma_j), & j\neq i,\quad a_{ij}\neq 0.\end{cases}$$

根据引理 4.1, B_C 满足 (3.8). 令 $H=[h_{ij}]=\mathcal{D}(A_C)B_C$,

$$h_{ij}=\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta(a_{ii})+2k\pi)}, & j=i,\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta(a_{ii})+2k\pi+\pi)}, & j\neq i,\quad a_{ij}\neq 0,\end{cases}$$

$$\theta(h_{ij})=\begin{cases}2k\pi+\theta(a_{ii}), & j=i,\\ 2k\pi+\pi+\theta(a_{ii}), & j\neq i,\quad a_{ij}\neq 0.\end{cases}$$

由 (4.4), $G=H$, $g_{ij}=h_{ij}$. 因此, $\theta(g_{ij})=\theta(h_{ij})$. 这样对任给的 $j\neq i$, $a_{ij}\neq 0$,

$$-\theta(\gamma_i)+\theta(a_{ij})+\theta(\gamma_j)=2k\pi+\pi+\theta(a_{ii}),\quad -\theta(\gamma_i)+\theta(\gamma_j)=2k\pi+\pi+\theta(a_{ii})-\theta(a_{ij}).$$

用整除取余运算消除以上方程的参数 k, 可得 (4.2). $\Upsilon_C=\mathrm{diag}(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_1)},\dots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_n)})$ 为 A 零特征根右特征矩阵的单位复数矩阵. 根据推论 2.5, Υ 是非奇异的, 因此,

$$\gamma_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_1)},\quad \dots,\quad \gamma_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_n)}\neq 0.$$

充分性 假定存在 $\gamma_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_1)},\dots,\gamma_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_n)}\neq 0$ 使 (4.2) 成立. 令

$$Q=\mathrm{diag}(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_1)},\dots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_n)}),$$

Q 为单位复数矩阵. 讨论 $Q^{-1}AQ$. Q^{-1} 和 $\mathcal{D}(A_C)$ 为对角矩阵,

$$Q^{-1}AQ=Q^{-1}(\mathcal{D}(A_C)\mathcal{D}^{-1}(A_C))AQ=\mathcal{D}(A_C)(Q^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A_C)AQ).$$

下面证明 $Q^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A_C)AQ$ 是奇异的. Q 为单位复数矩阵, 并基于 $\mathcal{D}^{-1}(A_C)$, Q^{-1} 和 Q 的对角性,

$$Q^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A_C)AQ=[I\circ Q^{-1}][I\circ\mathcal{D}^{-1}(A_C)][A_M\circ A_C][I\circ Q]=[A_M\circ Q^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A_C)A_CQ\,].$$

令 $B_C'=Q^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A_C)A_CQ=[b_{ij}]$. 先证明 B_C' 满足 (3.8). 先看 b_{ii},

$$b_{ii}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta(\gamma_i)-\theta(a_{ii})+\theta(a_{ii})+\theta(\gamma_i))}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}=1.$$

因此, b_{ii} 满足 (3.8). 再看 b_{ij} $(j \neq i, a_{ij} \neq 0)$,

$$b_{ij} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta(\gamma_i)-\theta(a_{ii})+\theta(a_{ij})+\theta(\gamma_j))} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta(\gamma_i)+\theta(\gamma_j)-\theta(a_{ii})+\theta(a_{ij}))}.$$

根据 (4.2), $\mathrm{mod}(-\theta(\gamma_i)+\theta(\gamma_j)-\theta(a_{ii})+\theta(a_{ij}), 2\pi) = \pi$. 因此,

$$\mathrm{mod}(\theta(b_{ij}), 2\pi) = \mathrm{mod}(-\theta(\gamma_i)+\theta(\gamma_j)-\theta(a_{ii})+\theta(a_{ij}), 2\pi) = \pi, \quad b_{ij} = -1,$$

满足 (3.8).

$A_M = [|a_{ij}|]$ 是 A 的模矩阵, 而 B'_C 满足 (3.8), 因此, 对

$$Q^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A_C)AQ = [A_M \circ Q^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A_C)A_CQ] = [A_M \circ B'_C] = [a'_{ij}]$$

有

$$a'_{ii} = |a_{ii}|, \quad a'_{ij} = -|a_{ij}|, \quad j \neq i.$$

A 是弱对角占优的,

$$|a_{ii}| = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad a'_{ii} = |a_{ii}| = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} -a'_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} = 0.$$

因此, $Q^{-1}\mathcal{D}^{-1}(A_C)A_CQ$ 是奇异的. □

就不可约对角矩阵占优矩阵的奇异性而言, Taussky 定理给出了一个必要条件: 不可约对角占优矩阵是奇异的, 则其一定是弱对角占优的. 定理 4.1 扩充了一个关于非零非对角元素的辐角方程组解的存在性 (或相容性) 条件 (4.2), 使其成为充分必要条件. 因此, 定理 4.1 是 Taussky 定理的改进.

4.2　辐角方程组的求解方法

A 给定, $\theta(a_{ii})$ 和 $\theta(a_{ij})$ 给定. (4.2) 中的每个方程实际上是关于 $\theta(\gamma_i)$ 和 $\theta(\gamma_j)$ 的双变元方程. A 的每个非零非对角元素 a_{ij} 对应一个这样的方程. 对给定的不可约弱对角占优矩阵 A, 可以通过求解方程组 (4.2) 的方法来判定 A 的奇异 - 非奇异性. 定理 4.1 说明, 如果 (4.2) 有解, 那么, A 就是奇异的; 否则就是非奇异的.

推论 4.1　$\gamma_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_1)}, \ldots, \gamma_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_n)} \neq 0$ 是方程组 (4.2) 的解, β 是单位复数, 则

$$\beta\gamma_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta(\gamma_1)+\theta(\beta))}, \quad \ldots, \quad \beta\gamma_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta(\gamma_n)+\theta(\beta))}. \tag{4.5}$$

同样是方程组 (4.2) 的解.

证明　将 (4.5) 代入方程组 (4.2),

$$\mathrm{mod}(\theta(a_{ij}) - \theta(a_{ii}) + (\theta(\gamma_j)+\theta(\beta)) - (\theta(\gamma_i)+\theta(\beta)), 2\pi) = \pi.$$

以上方程等价于 $\mathrm{mod}(\theta(a_{ij}) - \theta(a_{ii}) + \theta(\gamma_j) - \theta(\gamma_i), 2\pi) = \pi$, 即 (4.2). □

以上推论说明, 方程组 (4.2) 的求解并不需要采用常规的方程组求解方法, 通过变元值的辗转代入就可完成. 可以令 $\theta(\gamma_1), \ldots, \theta(\gamma_n)$ 中某个元素, 如 $\theta(\gamma_1) = 0$ $(\gamma_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1)$; 然后利用 (4.3) 逐个求出 $\theta(\gamma_2), \ldots, \theta(\gamma_n)$.

4.2.1 求解过程

下面通过实例介绍辐角方程组的求解过程.

图 1 给出一个 16×16 的不可约弱对角占优矩阵. 该矩阵由独立于本文理论推导的 Kolotilina 定理 (推论 3.2) 生成. 具体做法是将 (3.17) 改写为

$$A=\mathcal{D}^{-1}(A)U\mu(\mathcal{D}^{-1}(A)A)U^{-1}=CUBU^{-1}=UCBU^{-1},$$

由程序随机生成 B,C 和 U 后, 按照上面的公式计算得到 A. B 取不可约 Markov M- 矩阵 $I-S$, C 为对角元素非零的对角矩阵, U 是对角酉矩阵. 易知 $UCBU^{-1}$ 是奇异不可约对角占优矩阵.

为使叙述简单清楚, 本例的 C 和 U 均采用实数矩阵, 其中 U 是实对角酉阵 (对角元素取 1 和 -1), 这样, A 就是实数域上的矩阵. 不过所介绍的方法是针对复数域上一般矩阵的.

实数域上矩阵的辐角方程组的求解方法可以作一些简化. 这将放在 4.3 节进行说明.

下面给出辐角方程组求解的表上作业法. 它易于改造为计算机程序算法, 也可以用于手工作业.

图 2 给出作业表的结构. 作业表的第一行存放解向量 $\theta(\gamma)$ 中分量 $\theta(\gamma_i)$ 的生成次序, 第一列则为其克隆列. 第二列和第二行为矩阵的行标和列标. 第三行为解向量 $\theta(\gamma)$ 的存放区, 相应第四列为其克隆列. 第三列是专门为手工计算方便而设计的一列, 称为不变行参数列. 剩余的右下区域存放拟判定矩阵的辐角矩阵. $a_{ij}=0$ 时, $\theta(a_{ij})$ 无需处理, 因此其在辐角矩阵区的相应位置为空白.

求解过程按行进行. 首先从矩阵的第一行开始. 根据推论 4.1, 解向量 $\theta(\gamma)$ 中有一个分量可以指定值. 因此, 对第一行进行求解时直接指定 $\theta(\gamma_1)=0$. 余下各行按照分量 $\theta(\gamma_i)$ 的生成次序依次处理, 这就保证了对矩阵的 i 行进行处理时 $\theta(\gamma_i)$ 的值已经存在.

求解的基本原理如下: 将递推公式 (4.3) 改写为

$$\text{(I)}\ \ \omega_i=\mathrm{mod}(\pi+\theta(a_{ii})+\theta(\gamma_i),2\pi),\quad \text{(II)}\ \ \theta(\gamma_j)=\mathrm{mod}(\omega_i-\theta(a_{ij}),2\pi). \tag{4.6}$$

ω_i 称为 i 行的不变行参数. 非对角元素 $\theta(a_{ij})$ 称为引导参数; 在处理 i 行时它将引导求出 $\theta(\gamma_j)$ 或对 $\theta(\gamma_j)$ 的相容性进行验证.

下面给出表上作业法的算法描述:

(1) 令 $\theta(\gamma_1)=0$, 并令当前处理行为矩阵的第 1 行 (令 $i=1$).

(2) 先用公式 (I) 求 ω_i.

(3) 用公式 (II) 依次对本行的引导参数 $\theta(a_{ij})$ 进行处理.

(3-1) 计算出 $\alpha=\theta(\gamma_j)$.

(3-2) 判断当前 $\theta(\gamma_j)$ 是否有值.

(3-2-1) 生成新 $\theta(\gamma_j)$: 如果当前 $\theta(\gamma_j)$ 无值, 则赋 α 为 $\theta(\gamma_j)$ 的值; 并在生成次序编号区的对应位置上记录 $\theta(\gamma_j)$ 的生成次序编号.

(3-2-2) 相容性验证: 如果当前 $\theta(\gamma_j)$ 有值 β, 则比较 α 和 β.

(3-2-2-1) $\alpha\neq\beta$, 意味前面已经解出的 $\theta(\gamma_i)$ 和 $\theta(\gamma_j)$ 的值不满足 $\theta(a_{ij})$ 所对应的方程. 找到矛盾方程, 判定矩阵是非奇异的, 整个判定过程结束.

(3-2-2-2) $\alpha=\beta$, 意味前面已经解出的 $\theta(\gamma_i)$ 和 $\theta(\gamma_j)$ 的值也满足 $\theta(a_{ij})$ 所对应的方程.

(4) 本行所有引导参数 $\theta(a_{ij})$ 处理完成后, 将本行新生成的 $\theta(\gamma)$ 分量的值及其生成次序编号复制到解向量 $\theta(\gamma)$ 克隆列和生成次序编号区克隆列的对应位置上. 设置本行为完成处理状态 (在矩阵的行号区设置 $*$ 标志).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	−8	3.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−4.4	0	0	0
2	0	−2	0.7	0	0	0.18	0	0	0	0.74	0	0.08	0	−0.2	0.1	0
3	−0.54	−0.15	3	0.69	0	−0.45	0	0	0	−0.12	0	0	0	0.15	−0.63	−0.27
4	−0.55	−0.65	0	−5	0.5	0	0.4	0.3	0.65	−0.25	0.3	0	0	0.7	−0.7	0
5	0	0	0	−0.29	1	0.22	−0.16	0	0	0	−0.13	0	0	0	0.2	0
6	0.87	0	0.42	0	0	−3	−1.71	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	3.04	0	0	0	0	8	−1.92	0	0	0	0	−3.04	0	0	0
8	0	0	0	−0.7	0	0.21	0	7	−0.84	0.7	0	1.4	−1.89	0	1.26	0
9	1.05	2.6	0	0	0	0	0	−1.3	5	0.05	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	1.4	0	0	1.65	0	5	0.4	0	0	0	0	−1.55
11	3.08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	3.92	0	0	0	0
12	1.1	0	0	0	0	0	−1.1	0	−2.15	0	0	−5	−0.3	−0.35	0	0
13	−0.16	0	−0.07	0.14	0	0	0	0	0	−0.23	0	0	−1	0.33	0	−0.07
14	−0.84	0	0	0	0	−0.24	0	0.64	0	−0.36	0.24	−0.32	0	−4	−0.92	−0.44
15	−0.72	0	−0.3	0	0	0	0	0.81	0.69	0	0	0	0	0	3	−0.48
16	2.2	0.65	0	0	−0.5	0	0	−0.05	0	0.65	0	0	0	−0.95	0	−5

图 1　不可约弱对角占优矩阵例

顺序				1	2	4	10		5				6		7	3	8	9	11
	标号			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		ωi	θ (γ)	0	0	0	π		0				0		0	π	π	0	0
1	1*	0	0	π	0											π			
2	2*	0	0		π	0			0				0		0		π	0	
4	3	π	0	π	π	0	0		π				π				0	π	π
10	4	π	π	π	π		π	0		0	0	0	π	0			0	π	
	5						π	0	0	π				π				0	
5	6	0	0	0		0			π	π									
	7				0					0	π					π			
	8						π		0		0	π	0		0	π		0	
	9			0	0						π	0	0						
6	10	0	0					0			0		0	0					π
	11			0										0	0				
7	12	0	0	0						π		π			π	π	π		
3	13*	π	π	π		π	0						π			π	0		π
8	14	π	π	π					π		0		π	0	π		π	π	π
9	15	π	0	π		π					0	0						0	π
11	16	0	0	0	0			π			π		0				π		π

图 2　作业表及实例矩阵前三行的求解过程

(5) 判断是否所有行均处理完毕.

(5-1) 如果还有行未处理, 则按照分量 $\theta(\gamma_j)$ 产生顺序号找到下一个要处理行的行号 i, 令当前处理行为矩阵的第 i 行, 转到 (2) 进行矩阵的第 i 行的处理.

(5-2) 如果所有行均处理完毕, 则得到了方程组的一个解 $\theta(\gamma)$, 判定矩阵是奇异的, 过程结束.

4.2.2　实例求解

图 2 给出了图 1 矩阵 A 前三行的处理过程 (矩阵的 1、2 和 13 行). 图 3 给出了随后四行的处理过程. 处理矩阵的第 1 行时令 $\theta(\gamma_1)=0$. 计算得

$$\omega_1=\mathrm{mod}(\pi+\theta(a_{11})+\theta(\gamma_1),2\pi)=\mathrm{mod}(\pi+\pi+0,2\pi)=0.$$

顺序				1	2	4	10	13	5	12	14	16	6	15	7	3	8	9	11
	标号			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		ωi	θ (Υ)	0	0	0	π	π	0	π	π	π	0	π	0	π	π	0	0
1	1*	0	0	π	0											π			
2	2*	0	0		π	0			0				0		0		π	0	
4	3*	π	0	π	π	0	0		π				π				0	π	π
10	4	π	π	π	π		π	0		0	0	0	π	0			0	π	
13	5	0	π				π	0	0	π				π				0	
5	6*	0	0	0		0			π	π									
12	7	0	π		0					0	π					π			
14	8	0	π				π		0		0	π	0		0	π		0	
16	9	0	π	0	0						π	0	0						
6	10*	π	0					0			0		0	0					π
15	11	0	π	0										0	0				
7	12*	0	0	0						π		π			π	π	π		
3	13*	π	π	π		π	0						π			π	0		π
8	14	π	π	π					π		0		π	0	π		π	π	π
9	15	π	0	π		π					0	0						0	π
11	16	0	0	0	0			π			π		0				π		π

图 3　$\theta(\gamma)$ 剩余 5 个分量的求解过程

本行存在两个引导参数 $\theta(a_{12})$ 和 $\theta(a_{1,13})$, 计算得出

$$\alpha=\theta(\gamma_2)=\mathrm{mod}(\omega_1-\theta(a_{12}),2\pi)=\mathrm{mod}(0-0,2\pi)=0,$$

$$\alpha=\theta(\gamma_{13})=\mathrm{mod}(\omega_1-\theta(a_{1,13}),2\pi)=\mathrm{mod}(0-\pi,2\pi)=\pi.$$

第 1 行处理完后, 按照 $\theta(\gamma_i)$ 的产生顺序转到矩阵的第 2 行进行处理. 第 2 行处理时 $\theta(\gamma_2)$ 的值也已经存在. 与第 1 行的处理一样, 第 2 行只存在 $\theta(a_{2j})$ $(j=3,6,10,12,14,15)$ 引导下的 $\theta(\gamma_j)$ 的求解, 未发生对 θ_j 进行相容性验证的情形. 第 2 行与第 1 行处理过程类似, 此处不再赘述.

第 2 行处理完毕后, 按照 $\theta(\gamma_i)$ 的产生顺序转到矩阵的第 13 行进行处理. 本行的引导参数为 $\theta(a_{13,j})$ $(j=1,3,4,10,14,16)$, 其中只有 $\theta(\gamma_4)$ 和 $\theta(\gamma_{16})$ 是新生成的, 其余在本行处理前均已有值. 在后一种情形下, 引导参数 $\theta(a_{13,j})$ $(j=1,3,10,14)$ 引导 $\theta(\gamma_j)$ 的相容性验证. 我们仅举一例. 对引导参数 $\theta(a_{13,1})$, $\alpha=\theta(\gamma_1)=\mathrm{mod}(\omega_{13}-\theta(a_{13,1}),2\pi)=\mathrm{mod}(\pi-\pi,2\pi)=0$. 而 $\theta(\gamma_1)$ 已有值 $\beta=0$. $\alpha=\beta$, 关于 $\theta(a_{13,1})$ 的相容性验证通过.

前三行计算完成后, $\theta(\gamma)$ 有 11 个分量的值已经确定. 按照分量的生成顺序, 后面的处理行依序为矩阵的 3、6、10 和 12 行. 第 3 行只存在相容性验证; 第 6 行的处理新生成了 $\theta(\gamma_7)$; 第 10 行的处理新生成了 $\theta(\gamma_5),\theta(\gamma_8)$ 和 $\theta(\gamma_{11})$; 第 12 行的处理新生成了 $\theta(\gamma_9)$. 其余引导参数 $\theta(a_{ij})$ 均引导 $\theta(\gamma_i)$ 和 $\theta(\gamma_j)$ 关于 $\theta(a_{ij})$ 的相容性验证.

前七行处理完毕, 实例问题解向量 $\theta(\gamma)$ 所有分量全部确定. 但整个求解过程并未完成, 需要对剩余行所有元素的相容性检验完成后才能确定 A 的奇异性. 中间只要有一个引导参数 $\theta(a_{ij})$ 计算获得的 $\alpha=\theta(\gamma_j)$ 被检验为与已有的 $\beta=\theta(\gamma_j)$ 不相容, 便可判定 A 是非奇异的.

4.2.3　求解结果的计算验证

下面从另外一个角度来验证求解结果的正确性.

图 4 给出图 1 对应矩阵 A 的比较矩阵 $\mu(A)$. $\mu(A)$ 的元素取 A 元素的模或模的相反数, 且对角元素为正, 非对角元素为负. A 是弱对角占优的. 因此, $\mu(A)$ 是奇异的. 如果可以利用上面求解过程获得的解向量 $\theta(\gamma)$ 生成 $\mu(A)$, 那么就从另一个角度证明 A 的奇异性, 从而也就验证了求解结果的正确性.

根据定理 3.2, A 是奇异的, 则

$$\mathcal{D}^{-1}(A_C)\Upsilon_C^{-1}A\Upsilon_C=\mu(A), \tag{4.7}$$

其中 $\mathcal{D}(A_C)$ 是 A 对角线矩阵 $\mathcal{D}(A)$ 的单位复数矩阵, Υ_C 是对角酉矩阵. 而上面的求解过程实际上获得了 A 的酉相似变换矩阵 $\Upsilon_C=\gamma=\mathrm{diag}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)=\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_1)},\ldots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_n)})$. 根据图 5 给出的最后的解向量 $\theta(\gamma)$, 可得 $\Upsilon_C=\mathrm{diag}(1,1,1,-1,-1,1,-1,-1,-1,1,-1,,1,-1,-1,1,1)$. 由于 A 是实数域上的矩阵, 因此, 上式中 $\mathcal{D}^{-1}(A_C)$ 实际上是 A 对角元素的符号矩阵. 由图 1 知,

$$\mathcal{D}(A_C)=\mathrm{diag}(-1,-1,1,-1,1,-1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,1,-1).$$

通过 Matlab 矩阵运算计算 (4.7) 的左端, 得到了图 4, 即 $\mu(A)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	8	−3.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−4.4	0	0	0
2	0	2	−0.7	0	0	−0.18	0	0	0	−0.74	0	−0.08	0	−0.2	−0.1	0
3	−0.54	−0.15	3	−0.69	0	−0.45	0	0	0	−0.12	0	0	0	−0.15	−0.63	−0.27
4	−0.55	−0.65	0	5	−0.5	0	−0.4	−0.3	−0.65	−0.25	−0.3	0	0	−0.7	−0.7	0
5	0	0	0	−0.29	1	−0.22	−0.16	0	0	0	−0.13	0	0	0	−0.2	0
6	−0.87	0	−0.4	0	0	3	−1.71	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	−3.04	0	0	0	0	8	−1.92	0	0	0	0	−0.3	0	0	0
8	0	0	0	−0.7	0	−0.21	0	7	−0.84	−0.7	0	−1.4	−1.9	0	−1.26	0
9	−1.05	−2.6	0	0	0	0	0	−1.3	5	−0.05	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	−1.4	0	0	−1.65	0	5	−0.4	0	0	0	0	−1.55
11	−3.08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	−3.92	0	0	0	0
12	−1.1	0	0	0	0	0	−1.1	0	−2.15	0	0	5	−0.3	−0.35	0	0
13	−0.16	0	−0.1	−0.14	0	0	0	0	0	−0.23	0	0	1	−0.33	0	−0.07
14	−0.84	0	0	0	0	−0.24	0	−0.64	0	−0.36	−0.24	−0.32	0	4	−0.92	−4.4
15	−0.72	0	−0.3	0	0	0	0	−0.81	−0.69	0	0	0	0	0	3	−0.48
16	−2.2	−0.65	0	0	−0.5	0	0	-0.05	0	−0.65	0	0	0	−0.95	0	5

图 4　图 1 对应矩阵的比较矩阵

顺序				1	2	4	10		5				6		7	3	8	9	11
	标号			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		ωi	θ（Υ）	0	?π	0	π		0				0		0	π	π	0	0
1*	1	0	0	π	π											π			
2*	2	0	π		π	0			0				0		0		π	0	
4	3	π	0	π	π	0	0		π				π				0	π	π
10	4	π	π	π	π		π	0		0	0	0	π	0			0	π	
	5						π	0	0	π				π				0	
5	6	0	0	0		0			π	π									
	7				0					0	π					π			
	8						π		0		0	π	0		0	π		0	
	9			0	0						π	0	0						
6	10	π	0					0			0		0	0					π
	11			0										0	0				
7	12	0	0	0						π		π			π	π	π		
3*	13	π	π	π		π	0						π			π	0		π
8	14	π	π	π					π		0		π	0	π		π	π	π
9	15	π	0	π		π					0	0						0	π
10	16	0	0	0	0			π			π		0				π		π

图 5　非奇异不可约弱对角占优矩阵的判定过程

4.2.4 非奇异情形

修改图 1 中矩阵 A 的元素 $a_{12}=3.6$ 为 $a'_{12}=-3.6$. 修改后的矩阵 A' 只有一个元素的辐角与 A 不同, 因此, A' 依然是不可约弱对角占优矩阵. 用 Matlab 求 A' 的行列式, 得到 $\mathrm{Det}(A')=7.0570\times10^{+8}$. A' 是非奇异的. A' 的元素的辐角如图 5 辐角矩阵区所示. 图 5 辐角矩阵区的第 1 行第 2 列为 π, 与图 2 辐角矩阵区相应位置为 0 不同. 图 5 给出了 $\theta(\gamma_2)$ 首次求解和首次相容性检验的两次处理 (矩阵的第 1 和第 3 行). 第 1 行处理时, $\theta(\gamma_2)$ 被确定为 π, 第 3 行处理时, 引导参数 $\theta(a_{32})$ 引导 $\theta(\gamma_2)$ 的第一次相容性检验,

$$\omega_3=\mathrm{mod}(\pi+\theta(a_{33})+\theta(\gamma_3),2\pi)=\mathrm{mod}(\pi+0+0,2\pi)=\pi,$$
$$\theta(\gamma_2)=\mathrm{mod}(\omega_3-\theta(a_{32}),2\pi)=\mathrm{mod}(\pi-\pi,2\pi)=0$$

与 $\theta(\gamma_2)$ 的已有值 $\beta=\pi$ 不相容. 判定过程即告结束, 判定 A 为非奇异的.

4.3 实数矩阵

对复数 $a=|a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 而言, $\theta\in\{0,\pi\}$, 则 a 为实数. 因此, 称 $\Pi=\{0,\pi\}$ 为实数辐角域. 4.2 节求解过程显示, 如果 A 为实数矩阵, 则当 $\theta(\gamma_1)=0$ 时, $\theta(\gamma_1),\dots,\theta(\gamma_n)\in\{0,\pi\}$. 这从求解公式 (4.3) 得下式:

$$\theta(\gamma_j)=\mathrm{mod}(\pi+\theta(a_{ii})-\theta(a_{ij})+\theta(\gamma_i),2\pi)\tag{4.8}$$

中很容易看出, A 为实数矩阵, $\theta(a_{ii}),\theta(a_{ij})\in\{0,\pi\}$. 因此, 只要 $\theta(\gamma_i)\in\{0,\pi\}$, 则必有 $\theta(\gamma_j)\in\{0,\pi\}$. 选定 $\theta(\gamma_1)\in\{0,\pi\}$, 求解过程将使所有的 $\theta(\gamma_j)\in\{0,\pi\}$ $(j=2,\dots,n)$. 事实上, 求解初值选择任何 $\theta(\gamma_i)\in\{0,\pi\}$ $(i=1,\dots,n)$ 时情形并无不同. 据此易得以下推论.

推论 4.2 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实数域上的奇异不可约 (弱) 对角占优矩阵, 则辐角方程组 (4.2) 存在实数辐角域上的解, 即存在

$$\theta(\gamma_1),\dots,\theta(\gamma_n)\in\{0,\pi\}\tag{4.9}$$

为辐角方程组 (4.2) 的解, 并且只要有任何一个 i $(i=1,\dots,n)$, $\theta(\gamma_i)\in\{0,\pi\}$, (4.9) 就成立.

由于 (4.9) 是 A 酉相似变换矩阵 Υ_C 元素的辐角, 因此有以下推论.

推论 4.3 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实数域上的奇异不可约对角占优矩阵, 则存在实酉相似变换矩阵

$$\Upsilon_C=\mathrm{diag}(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\gamma_1)},\dots,\mathrm{e}^{\theta(\gamma_n)})\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

使得 (3.12) 成立, 其中 $\theta(\gamma_1),\dots,\theta(\gamma_n)\in\{0,\pi\}$.

最后来说明 A 为实数域上矩阵时, 求解过程的计算简化. 根据 (4.6):

$$\text{(I)}\ \ \omega_i=\mathrm{mod}(\pi+\theta(a_{ii})+\theta(\gamma_i),2\pi),\quad \text{(II)}\ \ \theta(\gamma_j)=\mathrm{mod}(\omega_i-\theta(a_{ij}),2\pi).$$

显然, ω_i 中 π 的数量与 $\theta(a_{ii})$ 和 $\theta(\gamma_i)$ 中 π 的数量和具有相反的奇偶性, 而 $\theta(\gamma_j)$ 中 π 的数量与 ω_i 和 $\theta(a_{ij})$ 中 π 的数量和具有相同的的奇偶性. 据此可以很方便地计算 ω_i 和 $\theta(\gamma_j)$. 当然这种简化这只对手工计算有意义.

5 讨论与结语

从奇异对角占优矩阵的性质出发是本文方法上的一个特点. 本节将说明这并非纯粹出于方法上的原因. 本文源于作者在研究网络动力学问题时所面临的数学问题: 奇异对角占优矩阵的数学性质. 事

实上, 网络动力学已经将对角占优矩阵的研究引向了一个新的重要方向: 矩阵伴随有向图结构起重要作用的对角占优矩阵的数学性质. 本节将就其所针对的问题及其应用领域作一些初步的讨论.

5.1 与奇异对角占优矩阵相关的问题及领域

5.1.1 惯性坐标系下的网络动力学系统

近年来, 多个体系统 (multi-agent systems) 受到系统科学、控制论、智能控制、计算机科学、网络通讯、生物学和社会学等领域研究人员的广泛关注, 而 Galileo 惯性坐标系上的多体动力学问题是这类问题中最重要的一类.

令 O 为个体的集合, $o_i \in O$ 为一个个体, $N(t, o_i)$ 为 t 时作用于 o_i 所有个体的集合, 称为 t 时 o_i 的邻集. O 中所有个体的邻集定义了一个时变有向作用网络 $\mathbb{G}(t)$:

$$\mathbb{G}(t) = \langle O, \mathcal{E}(t) \rangle, \quad \mathcal{E}(t) = \{(o_j, o_i)_t \in O \times O \mid o_i \in O, o_j \in N(t, o_i)\}. \tag{5.1}$$

文献 [25–30] 研究了惯性坐标系上多体动力学系统的速度同步模型

$$\dot{v}_i(t) = \sum_{o_j \in N(t,o_i)} -g_{ij}(\|v_i(t) - v_j(t)\|)\vec{v}_{ij} = \sum_{o_j \in N(t,o_i)} -g_{ij}(\|v_i(t) - v_j(t)\|)\frac{v_i(t) - v_j(t)}{\|v_i(t) - v_j(t)\|}, \tag{5.2}$$

其中 $v_i(t)$ 和 $\dot{v}_i(t)$ 分别是 t 时个体 o_i 的速度和加速度; $g_{ij}(\cdot) \geqslant 0$ 是标量函数, 为 o_j 对 o_i 的作用场强; $\vec{v}_{ij} = \frac{v_i(t)-v_j(t)}{\|v_i(t)-v_j(t)\|}$ 是单位矢量; $g_{ij}(\|v_i(t) - v_j(t)\|)$ 前置 "–" 反映 o_i 的速度趋于 o_j 的速度.

模型 (5.2) 是刻画惯性坐标系上多体动力学问题的一个一般力学模型. 这类模型有别于经典物理力学模型; 主要区别在于个体间的作用不要求是相互的, 个体间的作用可以是单向的, 适宜于描述鸟群、鱼群和交通流, 以及无人机群和机器人群体这样的由自然或人工自治体所构成的多体系统中个体在 Galileo 空间中运动时的速度协同过程.

令

$$g'_{ij}(t) = \frac{g_{ij}(\|v_i(t) - v_j(t)\|)}{\|v_i(t) - v_j(t)\|},$$

定义线性算子 $\mathcal{Q}(t) = [\mathcal{G}_{ij}(t)]_{n\times n}$, 其中

$$\mathcal{G}_{ij}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{o_j \in N(t,o_i)} -g'_{ij}(t), & j = i, \\ g'_{ij}(t), & j \neq i. \end{cases} \tag{5.3}$$

(5.2) 就可以写为

$$\dot{v}(t) \otimes I_m = (\mathcal{Q}(t) \otimes I_m)(v(t) \otimes I_m),$$

其中 $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))^{\mathrm{T}}$, $\otimes$ 是 Kronecker 积, I_m $(m = 1, 2, 3)$ 是 m- 维单位矩阵.

由 (5.3) 知, 线性算子 $\mathcal{Q}(t)$ 和 $\mathcal{Q}(t) \otimes I_m$ 是一类特殊的奇异对角占优矩阵, 行平衡对角占优矩阵; 由于它是实数域上的矩阵, 因此是仿射对角占优矩阵. 由此可见, 惯性坐标系上多体动力学模型 (5.2) 是一个基于仿射对角占优线性算子的一阶动力学系统.

5.1.2 线性网络动力学系统

如果存在 γ'_{ij} 对任给的 $y \geqslant 0$, $\gamma'_{ij} = \frac{g_{ij}(y)}{y}$ $(i, j = 1, \dots, n;\ j \neq i)$, 那么, (5.2) 就为一阶线性定常系统,

$$\dot{x}(t) = \Gamma x(t), \quad \gamma_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{o_j \in N(t, o_i)} -\gamma'_{ij}, & j = i, \\ \gamma'_{ij}, & j \neq i. \end{cases} \tag{5.4}$$

由 (5.2) 知, 对所有的 i, j $(j \neq i)$, $\gamma'_{ij} \geqslant 0$, 因此, $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ 是仿射对角占优矩阵.

对模型 (5.4) 的非时变/时变离散化形式 (线性算子 $S(t)$ 为对角元素非零的 Markov 矩阵)

$$x(t+1) = S(t)x(t)$$

的研究可以追溯到文献 [31] 对集体决策统一意见形成条件的研究, 以及文献 [32,33] 对多处理器系统协同最优控制的研究. 前者涉及社会学和经济学领域中的问题, 后者对当今信息科学的热点问题, 如智能通信网络和云 (计算/存储) 系统的最优控制, 具有理论指导意义.

5.1.3 Kolmogorov 微分方程

事实上, 并非只有网络动力学问题才涉及奇异对角占优矩阵.

令 $Q = [q_{ij}]$ $(0 \leqslant q_{ij} \leqslant 1, \sum_{j=1}^n q_{ij} = 1)$ 为 Markov 转移概率矩阵, $P(t) = [p_{ij}(t)]$ 为连续时间 Markov 过程 t 时的状态转移概率矩阵. 令 $\Gamma = Q - I$,

$$\dot{P}(t) = \Gamma P(t) = (Q - I)P(t) \tag{5.5}$$

为著名的 Kolmogorov 微分方程. 而 $\Gamma = Q - I$ 是仿射对角占优矩阵, 并且 (5.5) 可以看作是一阶线性定常系统 (5.4) 的一种特殊情况.

5.2 结语

本文从 Taussky 定理出发, 沿着奇异对角占优矩阵性质这一方向, 一路追问下去, 最终获得了对角占优矩阵奇异 - 非奇异的充分必要条件. 正如前面讨论中所指出的那样, 这不仅是方法上的问题. 奇异对角占优矩阵是一大类相互间存在紧密联系的数学、科学及其现代工程问题的基本数学形式.

本文特别突出了矩阵伴随有向图的性质在对角占优矩阵研究中所起的作用. 本文关于可约对角占优矩阵的奇异 - 非奇异性由其独立 Frobenius 块决定的结论 (推论 2.1) 切实地为这样的一个观点作了一个注脚: 离开了矩阵伴随有向图的结构, 矩阵论中某些问题甚至无法予以清晰地表述; 而一旦搞清楚了矩阵伴随有向图的结构, 某些长期说不清楚的问题就会变得极其平凡.

致谢 此文献给我的导师王政和郑毓蕃. 审稿人仔细地审阅了本文并提出了重要的改进意见, 例如, 本文 4.2 节正是源于审稿人的提议. 在此对审稿人的认真审阅和指导表示感谢.

参考文献

1 Taussky O. A recurring theorem on determinants. Amer Math Monthly, 1949, 56: 672–676
2 Varga R S. On recurring theorems on diagonal dominance. Linear Algebra Appl, 1976, 13: 1–9
3 Ostrowski A M. Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale. Comment Math Helv, 1937, 10: 69–96
4 Ostrowski A M. Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen. Comment Math Helv, 1956, 30: 175–210

5 Ostrowski A M. On some metrical properties of operator matrices and matrices partitioned into blocks. J Math Anal Appl, 1961, 2: 161–209
6 Berman A, Plemmons R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. New York: Academic, 1979
7 高益明. 广义对角占优阵和非奇矩阵的判定. 东北师大学报, 1982, 3: 23–28
8 高益明. 矩阵广义对角占优和非奇的判定 (II). 工程数学学报, 1988, 5: 12–16
9 Gao Y M, Wang X H. Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M-matrices. Linear Algebra Appl, 1992, 169: 257–268
10 Gao Y M, Wang X H. Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M-matrices II. Linear Algebra Appl, 1996, 248: 339–353
11 逄明贤. 广义对角占优矩碎的判定及应用. 数学年刊, 1985, 6A: 323–330
12 黄廷祝. 非奇 H 矩阵的简捷判据. 计算数学, 1993, 15: 318–328
13 黄廷祝. Ostrowski 定理的推广与非奇 H 矩阵的条件. 计算数学, 1994, 16: 19–24
14 黎稳. 广义对角占优矩阵的判别准则. 应用数学与计算数学学报, 1995, 9: 35–38
15 Taussky O. Bounds for characteristic roots of matrices. Duke Math J, 1948, 15: 1043–1044
16 Taussky O. Bounds for the characteristic roots of matrices II. J Res Nat Bureau Standards, 1951, 46: 124–125
17 Shivakumar P N, Chew K H. A sufficient condition for nonvanishing of determinants. Proc Amer Math Soc, 1974: 63–66
18 Kolotilina L Y. Nonsingularity/singularity criteria for nonstrictly block diagonally dominant matrices. Linear Algebra Appl, 2003, 359: 133–159
19 Jin J D, Zheng Y F. Consensus of multi-agent system under directed network: A matrix analysis approach. In: Proceedings of Control and Automation, 2009. ICCA 2009. IEEE International Conference on. Christchurch: IEEE, 2009, 280–284
20 金继东, 郑毓蕃. 有向网络下多个体系统的整体行为. 系统科学与数学, 2011, 31: 114–122
21 金继东. 多个体协同动力学系统的集体行为. 博士学位论文. 上海: 上海大学, 2011
22 黄廷祝, 杨传胜. 特殊矩阵分析及应用. 北京: 科学出版社, 2007
23 Horn R A, Johnson C R. 矩阵分析. 北京: 机械工业出版社, 2005
24 Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
25 Jin J D, Zheng Y F. The collective behavior of asymmetric affine multi-agent system. In: Proceedings of Control Conference (ASCC), 2011 8th Asian. Kaohsiung: IEEE, 2011, 800–805
26 金继东, 郑毓蕃. 有向网络下仿射非线性多个体协同动力学系统的整体行为. 控制理论与应用, 2011, 28: 1377–1383
27 Jin J D, Zheng Y F, Zheng X L. An unified theory for collective behavior of cooperative system. In: Proceedings of Control and Automation (ICCA), 2011 9th IEEE International Conference on. Santiago: IEEE, 2011, 471–476
28 Zheng Y F, Jin J D. Necessary condition of consensus for affine multi-agent systems under time-varying directed networks. In: Proceedings of Control and Decision Conference (CCDC), 2013 25th Chinese. Guiyang: IEEE, 2013, 702–706
29 Jin J D, Zheng Y F. Necessary and sufficient condition of consensus for affine multi-agent cooperative systems under time-varying directed networks. In: Proceedings of Control Conference (ASCC), 2013 9th Asian. Istanbul: IEEE, 2013, 1–6
30 金继东, 郑毓蕃. 时变有向网络下仿射多个体系统的状态一致性. 中国科学: 信息科学, 2013, 43: 1365–1382
31 DeGroot M H. Reaching a consensus. J Amer Statist Assoc, 1974, 69: 118–121
32 Tsitsiklis J N. Problems in decentralized decision making and computation. PhD Thesis. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 1984
33 Tsitsiklis J N, Bertsekas D, Athans M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms. IEEE Trans Automat Control, 1986, 31: 803–812

Necessary and sufficient criterion for singularity or non-singularity of diagonally dominant matrices

JIN JiDong

Abstract The necessary and sufficient conditions that a diagonally dominant matrix is singular or nonsingular are examined in this article. According to Taussky Theorem we find that the singularity of a reducible diagonally dominant matrix is determined by the singularity of its independent Frobenius blocks. Thus, whether a reducible diagonally dominant matrix is singular or not can be transformed into the problem of whether its Frobenius blocks, which are irreducible diagonally dominant matrices, are singular or nonsingular. According to Taussky Theorem we study the similarity and unitary similarity of the singular irreducible diagonally dominant matrices. Furthermore we obtain some relationship of arguments between the elements of this type of matrices. Incorporated with an existing relationship of modulus between the elements of this type of matrices given by Taussky, we study the necessary and sufficient conditions for singularity of this type of matrices. Finally we give the criteria for the singularity or non-singularity of the irreducible diagonally dominant matrices.

Keywords diagonally dominant matrix, singular, nonsingular, reducible, irreducible, Frobenius canonical form, unitary similarity

MSC(2010) 15A29, 15A21, 15B99, 65F18, 15B52

doi: 10.1360/N012014-00010