Hermite 流形上的第一或第二 k -Ricci 曲率

汤凯

浙江师范大学数学与计算机科学学院, 金华 321004

E-mail: kaitang001@zjnu.edu.cn

收稿日期: 2021-02-22; 接受日期: 2021-07-16; 网络出版日期: 2022-01-27

国家自然科学基金 (批准号: 12001490) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LQ20A010005) 资助项目

摘要 本文研究具有非正或非负的第一和第二 k -Ricci 曲率的基本性质. 首先获得它们与 Ricci 曲率及全纯截面曲率之间的不等式, 然后给出具有正第一或第二 k -Ricci 曲率的紧致 Hermite 流形上的消灭定理. 特别地, 本文证明, 如果紧致 Kähler 流形上具有正的第二 k -Ricci 曲率 ($k \geq 2$) 的 Hermite 度量, 则它一定是射影流形.

关键词 第一 k -Ricci 曲率 第二 k -Ricci 曲率 Hermite 流形

MSC (2020) 主题分类 53C24, 53C55

1 引言

假设 (M^n, g) 是 Kähler 流形, R 表示 Chern 曲率张量. 为了研究紧致 Kähler 流形的 k -双曲性, Ni^[1] 引进了 k -Ricci 曲率条件. 曲率记号 Ric_k 表示全纯切丛 $T'M$ 的 k 维全纯子空间上的 Chern Ricci 曲率. 因此, 当 $k=1$ 时, 它是全纯截面曲率 H ; 当 $k=n=\dim_{\mathbb{C}} M$ 时, 它是流形 M 上的 Ricci 曲率. 其中, $\text{Ric}_k > 0$ (< 0) 不能推得 $\text{Ric}_{k+1} > 0$ (< 0). 众所周知, 刻画全纯截面曲率与 Chern Ricci 曲率之间的关系一直是 Kähler 几何的重要问题之一. 因此, 理解 k -Ricci 曲率条件将是一个很好的过渡.

最近, 数学家们研究了具有正或负 k -Ricci 曲率条件的紧致 Kähler 流形. Yang^[2] 证实了 Yau^[3] 的一个猜想: 如果紧致 Kähler 流形具有正的全纯截面曲率, 即 $\text{Ric}_1 > 0$, 则它一定是射影和有理连通的. 这里有理连通是指流形上任意两点都能用一条有理曲线连接. 对于 $1 \leq k \leq n$, Ni^[4] 证明了这个结论在条件 $\text{Ric}_k > 0$ 时也是成立的. 这推广了 Yang^[2] ($k=1$)、Campana^[5] 和 Kollár 等^[6] ($k=n$) 的定理. 而对于 $\text{Ric}_1 < 0$ 的紧致 Kähler 流形, Yau^[3] 也猜测它具有丰富的典范线丛或负的第一 Chern 类. 在射影流形情形下, Wu 和 Yau^[7] 给出了上述猜想的证明. 在 2017 年, Tosatti 和 Yang^[8] 将 Wu 和 Yau 的结果^[7] 推广到了 Kähler 流形的情形. 在 2020 年, Chu 等^[9] 证明了 $\text{Ric}_k < 0$ ($1 < k < n$) 的紧致 Kähler 流形具有丰富的典范线丛. 特别地, 它是射影流形. Li 等^[10] 对 Chu 等^[9] 的结果也给出了另一种证明. 对于相关的研究, 可参见文献 [11–17].

英文引用格式: Tang K. On first and second k -Ricci curvatures for Hermitian manifold (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 901–912, doi: 10.1360/SSM-2021-0034

Ric_k 的定义也可以推广到 Hermite 流形. 假设 (N^n, h) 是 Hermite 流形, R 是 Chern 曲率张量, 其中 $R \in \Gamma(N, \wedge^{1,1} T^* N \otimes \text{End}(T' N))$. Σ 表示全纯切丛 $T'_p N$ 的 k 维子空间, $p \in N$, $1 \leq k \leq n$. 对于任意向量 $v \in \Sigma$, 定义第一 k -Ricci 曲率 Ric_k^1 和第二 k -Ricci 曲率 Ric_k^2 :

$$\text{Ric}_k^1(p, \Sigma)(v, \bar{v}) = \sum_{i=1}^k R(v, \bar{v}, E_i, \bar{E}_i), \quad \text{Ric}_k^2(p, \Sigma)(v, \bar{v}) = \sum_{i=1}^k R(E_i, \bar{E}_i, v, \bar{v}),$$

其中 $\{E_i\}$ 表示 Σ 的一组酉 (unitary) 标架. 文献 [4, 18] 也给出了这个定义. 当 $k=1$ 时, Ric_1^1 和 Ric_1^2 都表示全纯截面曲率 H . 而当 $k=n$ 时, Ric_n^1 是第一 Chern Ricci 曲率 Ric^1 , Ric_n^2 是第二 Chern Ricci 曲率 Ric^2 . 如果 h 是 Kähler 度量, 则 Ric_k^1 和 Ric_k^2 是等价的, 它们是 k -Ricci 曲率. 那么, 一个重要的问题是, Hermite 流形上是否也有类似的刚性定理.

我们提出如下猜想:

猜想 1.1 设 (N^n, h) 是紧致的 Hermite 流形, $\text{Ric}_k^1(h)$ 和 $\text{Ric}_k^2(h)$ 分别表示第一 k -Ricci 曲率和第二 k -Ricci 曲率, 其中 $1 \leq k \leq n$. K_N 是流形 N 的典范线丛.

- (1) 如果 $\text{Ric}_k^1(h) > 0$, 则 N 是射影流形. 进一步地, 它是有理连通的.
- (2) 如果 $\text{Ric}_k^1(h) < 0$, 则 K_N 是丰富的或流形 N 具有负的第一 Chern 类. 特别地, N 是射影流形.
- (3) 如果 $\text{Ric}_k^2(h) > 0$, 则 N 是射影流形. 进一步地, 它是有理连通的.
- (4) 如果 $\text{Ric}_k^2(h) < 0$, 则 K_N 是丰富的或流形 N 具有负的第一 Chern 类. 特别地, N 是射影流形.

当 $k=n$ 时, Yang^[2] 证明了, 若紧致 Kähler 流形上存在一个 $\text{Ric}_n^2(h) > 0$ 的 Hermite 度量 h , 则它是射影和有理连通流形. 运用著名的 Calabi 和 Yau^[19] 的结果推得: 紧致 Kähler 流形上如果存在 $\text{Ric}_n^1(h) > 0$ 的 Hermite 度量 h , 则它是 Fano 流形. 再运用 Campana^[5] 和 Kollár 等^[6] 的定理可得, Fano 流形是有理连通的. 而对于 $\text{Ric}_n^1(h) < 0$, 上述猜想显然成立. 当 $k=1$ 时, Yang^[2] 证实了具有 $\text{Ric}_1^1(h) > 0$ 的 Hermite 度量 h 的紧致 Kähler 复曲面一定是射影和有理连通的. 为了把 Wu 和 Yau^[7] 的结果论推广到 Hermite 流形的情形, Yang 和 Zheng^[20] 引进了实双截曲率的概念. 在 Kähler 流形的情形, 它和全纯截面曲率是等价的; 在 Hermite 流形的情形, 这个条件略强于全纯截面曲率. 如果把全纯截面曲率条件换成实双截曲率条件, Lee 和 Streets^[21] 证明了, 具有负实双截曲率的紧致 Hermite 复曲面一定有丰富的典范线丛. 对于一般的 Hermite 流形 (非 Kähler 流形), 上述猜想还有待进一步研究.

本文主要讨论第一和第二 k -Ricci 曲率的基本性质及其应用.

首先, 考虑 $\text{Ric}_k^1(h) < \lambda$ 或 $\text{Ric}_k^2(h) < \lambda$. 第一个结论是关于 Ric^1 或 Ric^2 与全纯截面曲率 H 的不等式.

定理 1.1 设 (N^n, h) 是一个 Hermite 流形.

- (1) 如果 $\text{Ric}_k^1(h) \leq -(k+1)\sigma$, 其中 $1 \leq k \leq n$, $\sigma \in \mathbb{R}$, 那么对任意向量 $X \in T^{1,0}N$, 都有

$$(k-1)|X|_h^2 \text{Ric}^1(X, \bar{X}) + (n-k)|X|_h^4 H(X, \bar{X}, X, \bar{X}) \leq -(n-1)(k+1)\sigma|X|_h^4. \quad (1.1)$$

- (2) 如果 $\text{Ric}_k^2(h) \leq -(k+1)\sigma$, 其中 $1 \leq k \leq n$, $\sigma \in \mathbb{R}$, 那么对任意向量 $X \in T^{1,0}N$, 都有

$$(k-1)|X|_h^2 \text{Ric}^2(X, \bar{X}) + (n-k)|X|_h^4 H(X, \bar{X}, X, \bar{X}) \leq -(n-1)(k+1)\sigma|X|_h^4. \quad (1.2)$$

运用定理 1.1 以及 Royden^[22] 的证明技巧, 可得如下推论:

推论 1.1 设 N^n 是一个 Hermite 流形, h 是平衡 (balance) 度量, S 表示 h 的数量曲率.

(1) 如果 $\text{Ric}_k^1(h) \leq -(k+1)\sigma$, 其中 $1 < k \leq n$, $\sigma \in \mathbb{R}$, 那么有如下不等式成立:

$$(nk + n - k - 2)Sh + k\text{Ric}^1 + (n - k)\text{Ric}^2 \leq -n(n+1)(n-1)(k+1)\sigma h. \quad (1.3)$$

(2) 如果 $\text{Ric}_k^2(h) \leq -(k+1)\sigma$, 其中 $1 < k \leq n$, $\sigma \in \mathbb{R}$, 那么有如下不等式成立:

$$(nk + n - k - 2)Sh + k\text{Ric}^2 + (n - k)\text{Ric}^1 \leq -n(n+1)(n-1)(k+1)\sigma h. \quad (1.4)$$

特别地, 当 h 是 Kähler 度量时, 上述定理 1.1 和推论 1.1 是已知的 (参见文献 [9]). 与文献 [9] 情形一样, 如果上述两个定理的条件改成 $\text{Ric}_k^1(h) > \lambda$ 或 $\text{Ric}_k^2(h) > \lambda$, 那么将结论中的 “ $\leq$ ” 改成 “ $>$ ”, 结论也是成立的. 这里需要指出, 上述定理 1.1 和推论 1.1 以及后面的引理 3.1 的证明方法本质上和文献 [9] 中引理 2.1、2.3 和 2.2 是类似的. 但是在非 Kähler 流形的情形, 曲率张量不满足通常的 Kähler 对称性, 所以会涉及更多的曲率条件.

Ni^[4] 利用黏度 (viscosity) 技巧以及极值原理方法证明了, 具有正的 k -Ricci 曲率的紧致 Kähler 流形 M^n , 其上的 Hodge 数 $h^{i,0}$ 消没, 其中 $1 \leq i \leq n$. 运用类似的技巧到 Hermite 流形, 我们得到第二个主要定理:

定理 1.2 设 (N^n, h) 是紧致 Hermite 流形.

(1) 如果 $\text{Ric}_k^2(h) > 0$, 其中 $1 \leq k \leq n$, 那么对于任意 $p \leq k$, 都有 Hodge 数 $h^{p,0} = 0$.

(2) 如果 $\text{Ric}_k^1(h) > 0$, 其中 $1 \leq k \leq n$, 则有 Hodge 数 $h^{k,0} = 0$.

因此, 运用 Kodaira 定理^[23] (或参见文献 [24, 性质 3.3.2 和推论 5.3.3]), 我们得到如下推论. 这推广了 Ni^[4] 的结果.

推论 1.2 设 (N^n, h) 是紧致 Hermite 流形, 且 N 上还存在一个 Kähler 度量.

(1) 如果 $\text{Ric}_k^2(h) > 0$, 其中 $1 < k \leq n$, 则 N 是射影流形.

(2) 如果 $\text{Ric}_2^1(h) > 0$, 则 N 是射影流形.

同样地, 我们也可以考虑正实双截曲率的 Hermite 流形, 得到如下结论:

定理 1.3 设 (N^n, h) 是紧致 Hermite 流形. 如果 h 的实双截曲率 $B_h > 0$, 那么对于任意 $1 \leq p \leq n$, 都有 Hodge 数 $h^{p,0} = 0$. 特别地, 如果 N 上还存在一个 Kähler 度量, 则它是射影流形.

我们需要指出, 文献 [25] 已经证明了, $B_h > 0$ 的紧致 Hermite 流形, 它的 Hodge 数 $h^{1,0} = h^{2,0} = h^{n-1,0} = h^{n,0} = 0$. 如果 3 维的 Hermite 流形上还存在一个 Kähler 度量, 文献 [25] 还证明了它是有理连通的. 本文余下内容先介绍 Hermite 流形的度量以及各种曲率张量的基本定义, 然后给出定理 1.1、推论 1.1、定理 1.2 和 1.3 的证明.

2 预备知识

下面介绍本文将要用到的一些基本定义, 具体可参见文献 [26].

设 N^n 是 n 维 Hermite 流形, J 是其上的近复结构, h 是 Hermite 度量. 我们可以定义一个 2 形式的 ω :

$$\omega(X, Y) = h(JX, Y).$$

也称 ω 为 Kähler 形式. 它是一个 $(1,1)$ 型张量. 设 $(z_1, \dots, z_n)$ 是局部全纯坐标, 则有

$$h = h_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j, \quad \omega = \sqrt{-1} h_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j.$$

当 $d\omega = 0$ 、 $d\omega^{n-1} = 0$ 、 $\partial\bar{\partial}\omega^{n-1} = 0$ 或 $dd^c\omega = 0$ 时, ω 分别被称为 Kähler 度量、平衡度量、Gauduchon 度量或多重闭 (pluriclosed) 度量. 记 ∇ 表示 Chern 联络, 则 ∇ 的挠率张量 T 和曲率张量 R 分别定义为

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned}$$

在局部坐标下, 挠率张量 T 的分量为

$$T_{ij}^k = h^{k\bar{l}} \left(\frac{\partial h_{j\bar{l}}}{\partial z^i} - \frac{\partial h_{i\bar{l}}}{\partial z^j} \right).$$

当 h 是 Kähler 度量时, $T_{ij}^k = 0$. 曲率张量 R 的分量为

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\frac{\partial^2 h_{k\bar{l}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} + h^{p\bar{q}} \frac{\partial h_{k\bar{q}}}{\partial z^i} \frac{\partial h_{p\bar{l}}}{\partial \bar{z}^j}.$$

对曲率张量求迹, 可得

$$R_{i\bar{j}}^1 = h^{k\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \log \omega^n.$$

称 $R_{i\bar{j}}^1$ 为第一 Chern Ricci 曲率张量. 第一 Chern Ricci 形式为

$$\text{Ric}^1 = \sqrt{-1} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \in \Gamma(N, \wedge^{1,1} T^* N).$$

它是闭的实 $(1, 1)$ 形式, 并且是第一 Chern 类 $c_1(N) \in H^2(N, 2\pi\mathbb{Z})$ 的代表元.

第二 Chern Ricci 形式为

$$\text{Ric}^2 \in \Gamma(N, \text{End}(T'N)),$$

且第二 Chern Ricci 曲率的分量为

$$R_{k\bar{l}}^2 = h^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}k\bar{l}}.$$

当 h 是 Kähler 度量时, Ric^1 和 Ric^2 是等价的. Chern 数量曲率 S 定义为

$$S = \sum_{i,j,k,l=1}^n h^{i\bar{j}} h^{k\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}}.$$

对于任意 $X, Y \in T^{1,0}N$, 定义

$$H(X) = \frac{R(X, \bar{X}, X, \bar{X})}{|X|^4}.$$

称 H 为度量 h 的全纯截面曲率. 曲率张量 R 满足对称性:

$$\overline{R(X, \bar{Y}, Z, \bar{W})} = R(Y, \bar{X}, W, \bar{Z}), \quad X, Y, Z, W \in T^{1,0}N.$$

如果 h 是 Kähler 度量, 则 R 满足第一、第三位置可交换性质, 即 $R(X, \bar{Y}, Z, \bar{W}) = R(Z, \bar{Y}, X, \bar{W})$. 对于非 Kähler 情形, 此性质不成立.

Σ 表示全纯切丛 $T'_p N$ 的 k 维子空间, $p \in N$, $1 \leq k \leq n$. 对于任意向量 $v \in \Sigma$, 定义第一 k -Ricci 曲率 Ric_k^1 和第二 k -Ricci 曲率 Ric_k^2 :

$$\text{Ric}_k^1(p, \Sigma)(v, \bar{v}) = \sum_{i=1}^k R(v, \bar{v}, E_i, \bar{E}_i), \quad \text{Ric}_k^2(p, \Sigma)(v, \bar{v}) = \sum_{i=1}^k R(E_i, \bar{E}_i, v, \bar{v}),$$

其中 $\{E_i\}$ 表示 Σ 的一组酉标架. 对于任意 k 维子空间 Σ , 如果满足 $\text{Ric}_k^1(p, \Sigma) < 0$, 则记为 $\text{Ric}_k^1(p) < 0$. 其他情形可以类似定义. 称 $S_k(p, \Sigma) = \sum_{i,j=1}^k R(E_i, \bar{E}_i, E_j, \bar{E}_j)$ 为 k 数量曲率. 显然, $\text{Ric}_k^1(p) < 0$ 或 $\text{Ric}_k^2(p) < 0$ 可以推导出 $S_k(p) < 0$. 如果 h 是 Kähler 度量, 则 Ric_k^1 和 Ric_k^2 是等价的, 它们是 k -Ricci 曲率 (参见文献 [1]).

我们再给出实双截曲率的概念 (参见文献 [20]). 假设 $p \in N$, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ 是全纯切丛 $T'N$ 的酉标架. $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ 是 n 个非负常数, 且 $|a|^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0$. 记 Hermite 度量 h 的实双截曲率为

$$B_h(e, a) = \frac{1}{|a|^2} \sum_{i,j=1}^m R_{i\bar{i}j\bar{j}} a_i a_j.$$

因为向量 v 方向的全纯截面曲率 $H(v) = R_{v\bar{v}v\bar{v}}/|v|^4$, 如果取 e_1 和 v 平行, 且 $a_1 = 1, a_2 = \dots = a_n = 0$, 则 B_h 就是 $H(v)$. 因此, $B_h > 0$ ($\geq 0, < 0$ 或 ≤ 0) 可以推导出 $H > 0$ ($\geq 0, < 0$ 或 ≤ 0). 我们可以参考文献 [20] 了解更多的细节.

3 定理 1.1 和推论 1.1 的证明

为了完整性, 本节利用文献 [9] 中引理 2.1、2.3 和 2.2 的证明方法给出定理 1.1、引理 3.1 和推论 1.1 的证明. 我们先证明定理 1.1.

定理 1.1 的证明 不妨先考虑 $\sigma = 0$ 的情形. 设非零向量 $X \in T'N$, $|X| = 1$. 如果 $k = 1$ 或 $k = n$, 结论显然成立. 令 $2 \leq k \leq n-1$. 选择一个酉标架 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 使得 $X = e_1$. 为了方便, 记 $R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R(e_i, \bar{e}_j, e_k, \bar{e}_l)$. I 是 $\{2, \dots, n\}$ 的一个子集, 且 $|I| = k-1$. 那么存在 C_{k-1}^{n-1} 个不同的 I .

那么运用已知条件和假设, 对每一个 I 都有

$$R_{1\bar{1}1\bar{1}} + \sum_{j \in I} R_{1\bar{1}j\bar{j}} \leq 0. \quad (3.1)$$

对每一个固定的 $i \neq 1$, 包含元素 i 的不同集合 I 有 C_{k-2}^{n-2} 个. 因此, 通过求和所有的 I , 可得

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_I \left(R_{1\bar{1}1\bar{1}} + \sum_{j \in I} R_{1\bar{1}j\bar{j}} \right) \\ &= C_{k-1}^{n-1} R_{1\bar{1}1\bar{1}} + C_{k-2}^{n-2} R_{1\bar{1}2\bar{2}} + C_{k-2}^{n-2} R_{1\bar{1}3\bar{3}} + \dots + C_{k-2}^{n-2} R_{1\bar{1}n\bar{n}} \\ &= C_{k-1}^{n-1} R_{1\bar{1}1\bar{1}} + C_{k-2}^{n-2} \sum_{i=2}^n R_{1\bar{1}i\bar{i}} \\ &= (C_{k-1}^{n-1} - C_{k-2}^{n-2}) R_{1\bar{1}1\bar{1}} + C_{k-2}^{n-2} \sum_{i=1}^n R_{1\bar{1}i\bar{i}} \\ &= C_{k-2}^{n-2} \left(\frac{n-k}{k-1} R_{1\bar{1}1\bar{1}} + R_{1\bar{1}1\bar{1}}^1 \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

即

$$(n-k)R_{1\bar{1}1\bar{1}} + (k-1)\text{Ric}^1(e_1, \bar{e}_1) \leq 0.$$

此时命题得证. 对于一般的 σ , 设 $\tilde{R} = R + \sigma B$, 其中

$$B(X, \bar{Y}, Z, \bar{W}) = h(X, \bar{Y})h(Z, \bar{W}) + h(X, \bar{W})h(Z, \bar{Y}),$$

则对任意 k 维子空间 V 都有

$$\widetilde{\text{Ric}}_{k,V}^1(X, \bar{Y}) = \text{Ric}_{k,V}^1(X, \bar{Y}) + (k+1)h(X, \bar{Y})$$

和

$$\tilde{H}(X) = H(X) + 2\sigma.$$

由题意得 $\widetilde{\text{Ric}}_k^1 \leq 0$, 因此,

$$\begin{aligned} 0 &\geq (k-1)h(X, X)\widetilde{\text{Ric}}^1(X, \bar{X}) + (n-k)\tilde{H}(X)|h(X, \bar{X})|^2 \\ &= (k-1)h(X, X)\text{Ric}^1(X, \bar{X}) + (n-k)H(X)|h(X, \bar{X})|^2 \\ &\quad + ((n+1)(k-1) + 2(n-k))\sigma|h(X, \bar{X})|^2. \end{aligned}$$

我们完成了定理 1.1(1) 的证明. 定理 1.1(2) 类似可证. $\square$

证明推论 1.1 之前, 我们先运用 Royden 技巧^[22] 给出一个引理.

引理 3.1 设 (X^n, h) 是 Hermite 流形, ρ 是 X 上的一个实 $(1, 1)$ 形式, 且满足

$$\alpha h(X, \bar{X})\rho(X, \bar{X}) + \beta R(X, \bar{X}, X, \bar{X}) \leq \lambda |X|_h^4, \quad (3.3)$$

其中 $X \in T'N$, α, β 和 λ 是常数, 且 $\alpha > 0, \beta > 0$. 如果 g 是另一个 Hermite 度量, 则有

$$g^{i\bar{j}}g^{k\bar{l}}(R_{i\bar{j}k\bar{l}} + R_{i\bar{l}k\bar{j}}) \leq \frac{1}{\beta}(\lambda(\text{tr}_g h)^2 - \alpha \text{tr}_g h \cdot \text{tr}_g \rho) + \sum_{i=1}^n R(E_i, \bar{E}_i, E_i, \bar{E}_i), \quad (3.4)$$

这里 $\{E_i\}_{i=1}^n$ 对于度量 g 是酉标架, 对于度量 h 是对角的; R 是度量 h 的曲率张量, 记 $R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R(E_i, \bar{E}_j, E_k, \bar{E}_l)$.

证明 设 $\{E_i\}_{i=1}^n$ 满足 $g(E_i, \bar{E}_j) = \delta_{i\bar{j}}$ 和 $h(E_i, \bar{E}_j) = \tau_i \delta_{ij}$. 令 $\eta_A = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^A E_i$, $(\varepsilon_i^A) \in \mathbb{Z}_4^n$, 其中 $\mathbb{Z}_4$ 表示单位元的 4 次方根.

对任意固定的 $A \in \mathbb{Z}_4^n$, 有

$$h(\eta_A, \bar{\eta}_A) = \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i^A \overline{\varepsilon_j^A} h(E_i, \bar{E}_j) = \sum_{i=1}^n \tau_i = \text{tr}_g h. \quad (3.5)$$

如果 $i \neq j$, 则有 $\sum_{A \in \mathbb{Z}_4^n} \varepsilon_i^A \overline{\varepsilon_j^A} = 0$, 根据对称性得到

$$\sum_{A \in \mathbb{Z}_4^n} \rho(\eta_A, \bar{\eta}_A) = \sum_{A \in \mathbb{Z}_4^n} \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i^A \overline{\varepsilon_j^A} \rho(E_i, \bar{E}_j)$$

$$\begin{aligned}
&= 4^n \sum_{i=1}^n \rho(E_i, \bar{E}_i) \\
&= 4^n \operatorname{tr}_g \rho.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
\sum_{A \in \mathbb{Z}_4^n} R(\eta_A, \bar{\eta}_A, \eta_A, \bar{\eta}_A) &= \sum_{A \in \mathbb{Z}_4^n} \sum_{i,j,\gamma,\delta=1}^n \varepsilon_i^A \bar{\varepsilon}_j^A \varepsilon_\gamma^A \bar{\varepsilon}_\delta^A R(E_i, \bar{E}_j, E_\gamma, \bar{E}_\delta) \\
&= 4^n \sum_{i \neq j} [R(E_i, \bar{E}_j, E_j, \bar{E}_i) + R(E_i, \bar{E}_i, E_j, \bar{E}_j)] + 4^n \sum_{i=1}^n R(E_i, \bar{E}_i, E_i, \bar{E}_i) \\
&= 4^n g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} (R_{i\bar{j}k\bar{l}} + R_{i\bar{l}k\bar{j}}) - 4^n \sum_{i=1}^n R(E_i, \bar{E}_i, E_i, \bar{E}_i),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

且

$$\begin{aligned}
\sum_{A \in \mathbb{Z}_4^n} |\eta_A|_h^4 &= \sum_{A \in \mathbb{Z}_4^n} \sum_{i,j,\gamma,\delta=1}^n \varepsilon_i^A \bar{\varepsilon}_j^A \varepsilon_\gamma^A \bar{\varepsilon}_\delta^A h(E_i, \bar{E}_j) h(E_\gamma, \bar{E}_\delta) \\
&= 4^n \sum_{i \neq j} [h(E_i, \bar{E}_j) h(E_j, \bar{E}_i) + h(E_i, \bar{E}_i) h(E_j, \bar{E}_j)] + 4^n \sum_{i=1}^n h(E_i, \bar{E}_i) h(E_i, \bar{E}_i) \\
&= 4^n \left(\sum_{i \neq j} \tau_i \tau_j + \sum_i \tau_i^2 \right) \\
&= 4^n (\operatorname{tr}_g h)^2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

现在, 将每个 η_A 代入不等式 (3.3), 并且求和所有的 $A \in \mathbb{Z}_4^n$, 结合等式 (3.5)–(3.8), 可得

$$\lambda(\operatorname{tr}_g h)^2 \geq \beta \left[g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} (R_{i\bar{j}k\bar{l}} + R_{i\bar{l}k\bar{j}}) - \sum_{i=1}^n R(E_i, \bar{E}_i, E_i, \bar{E}_i) \right] + \alpha \operatorname{tr}_g h \cdot \operatorname{tr}_g \rho.$$

至此完成了引理的证明. $\square$

现在证明推论 1.1. 在上述引理 3.1 中, 我们选择度量 $g = h$.

推论 1.1 的证明 我们只需要证明 (1) 即可, (2) 与 (1) 类似. 如同定理 1.1 的证明一样, 可以先考虑 $\sigma = 0$, 再考虑用 $R + \sigma B$ 替换 R . 如果取 $\alpha = k - 1$, $\rho = \operatorname{Ric}^1$, $\beta = n - k$ 和 $\lambda = 0$, 则运用定理 1.1 可知曲率张量 R 满足引理 3.1 的条件. 因此, 由引理 3.1 可推导出

$$h^{i\bar{j}} h^{k\bar{l}} (R_{i\bar{j}k\bar{l}} + R_{i\bar{l}k\bar{j}}) \leq \frac{1}{n-k} [-(k-1)nS] + \sum_{i=1}^n R_{i\bar{i}i\bar{i}}, \tag{3.9}$$

其中 $\{E_i\}_{i=1}^n$ 是度量 h 的西标架, S 是 h 的数量曲率. 记 $\widehat{S} = h^{i\bar{j}} h^{k\bar{l}} R_{i\bar{l}k\bar{j}}$, 则有

$$S + \widehat{S} \leq \frac{-(k-1)n}{n-k} S + \sum_{i=1}^n R_{i\bar{i}i\bar{i}}. \tag{3.10}$$

运用文献 [27] 中第四部分的结论, 有关系

$$S = \widehat{S} + \langle \bar{\partial} \bar{\partial}^* \omega, \omega \rangle.$$

因为 h 是平衡度量, 所以有 $S = \widehat{S}$. 由不等式 (3.10), 可得

$$(nk + n - 2k)S \leq (n - k) \sum_{i=1}^n R_{i\bar{i}i\bar{i}}. \quad (3.11)$$

选择任意的 $X \in T'N$, 且 $|X| = 1$, 选择一个酉标架 $\{E_i\}_{i=1}^n$ 使得 $X = E_1$. 对每一个固定的 $i \neq 1$, 设 I 是 $\{1, \dots, n\}$ 的一个子集, 满足 $|I| = k - 2 \geq 0$, 且 I 不包含元素 1 和 i . 因此 I 有 C_{k-2}^{n-2} 个不同的选择. 由题意 $\text{Ric}_k^1 \leq 0$, 有

$$R_{i\bar{i}i\bar{i}} + \sum_{j \in I} R_{i\bar{i}j\bar{j}} + R_{i\bar{i}1\bar{1}} \leq 0,$$

即

$$R_{i\bar{i}i\bar{i}} \leq - \sum_{j \in I} R_{i\bar{i}j\bar{j}} - R_{i\bar{i}1\bar{1}}. \quad (3.12)$$

不妨假设 $k > 2$ 以便 $I \neq \emptyset$. 求和所有可能的 I , 对于 $i \neq 1$, 都有

$$\begin{aligned} C_{k-2}^{n-2} R_{i\bar{i}i\bar{i}} &\leq -C_{k-2}^{n-2} R_{i\bar{i}1\bar{1}} - \sum_I \sum_{j \in I} R_{i\bar{i}j\bar{j}} \\ &= -C_{k-2}^{n-2} R_{i\bar{i}1\bar{1}} - C_{k-3}^{n-3} \sum_{j \neq 1, i} R_{i\bar{i}j\bar{j}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

如果 $k = 2$, 则根据 $\text{Ric}_2^1 \leq 0$ 容易推得不等式成立. 对不等式 (3.13) 求和所有的 $i \neq 1$, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_{i\bar{i}i\bar{i}} &\leq 2R_{1\bar{1}1\bar{1}} - \sum_{i=1}^n R_{i\bar{i}1\bar{1}} - \frac{k-2}{n-2} \sum_{2 \leq i, j \leq n; i \neq j} R_{i\bar{i}j\bar{j}} \\ &= 2R_{1\bar{1}1\bar{1}} - \sum_{i=1}^n R_{i\bar{i}1\bar{1}} - \frac{k-2}{n-2} \left[S - \sum_{i=1}^n R_{i\bar{i}i\bar{i}} + 2R_{1\bar{1}1\bar{1}} - \sum_{i=1}^n R_{1\bar{1}i\bar{i}} - \sum_{i=1}^n R_{i\bar{i}1\bar{1}} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

整理不等式 (3.14) 得

$$(n-k) \sum_{i=1}^n R_{i\bar{i}i\bar{i}} \leq -(k-2)S + 2(n-k)R_{1\bar{1}1\bar{1}} + (k-n)\text{Ric}_{1\bar{1}}^2 + (k-2)\text{Ric}_{1\bar{1}}^2. \quad (3.15)$$

由定理 1.1 可知,

$$(n-k)R_{1\bar{1}1\bar{1}} + (k-1)\text{Ric}_{1\bar{1}}^1 \leq 0. \quad (3.16)$$

将 (3.16) 代入 (3.15), 有

$$\begin{aligned} (n-k) \sum_{i=1}^n R_{i\bar{i}i\bar{i}} &\leq -(k-2)S - 2(k-1)\text{Ric}_{1\bar{1}}^1 + (k-n)\text{Ric}_{1\bar{1}}^2 + (k-2)\text{Ric}_{1\bar{1}}^2 \\ &\leq -(k-2)S - k\text{Ric}_{1\bar{1}}^1 + (k-n)\text{Ric}_{1\bar{1}}^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

继续将 (3.18) 代入 (3.11), 可得

$$(nk + n - k - 2)S + k\text{Ric}_{1\bar{1}}^1 + (n-k)\text{Ric}_{1\bar{1}}^2 \leq 0. \quad (3.18)$$

由 $X = E_1$ 的任意性, 命题得证. 对于一般的 σ , 可令 $\tilde{R} = R + \sigma B$, 其中

$$B(X, \bar{Y}, Z, \bar{W}) = h(X, \bar{Y})h(Z, \bar{W}) + h(X, \bar{W})h(Z, \bar{Y}).$$

类似于定理 1.1 的证明, 容易证得结论. $\square$

4 定理 1.2 和 1.3 的证明

本节先利用 Ni^[4] 的黏度技巧证明定理 1.2. 首先介绍一些基本知识 (参见文献 [4, 28]). 设 V 是 Euclid 空间, 一个 r 重向量 $\mathbf{a}$ 是 $\wedge_r V$ 的元素. V^* 表示 V 的对偶空间. 如果存在属于 V 的向量 $v_1, \dots, v_r$ 使得

$$\mathbf{a} = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r,$$

则称 $\mathbf{a}$ 是一个简单 (simple) 向量. r 重余向量也可类似定义. 对于一个 r 重余向量 ω , 范围 (comass) 可定义为

$$\|\omega\|_0 = \sup\{|\omega(\mathbf{a})| : \mathbf{a} \text{ 是简单向量, } \|\mathbf{a}\| = 1\},$$

其中范数 $\|\cdot\|$ 是被内积诱导的范数, 即对于简单向量 $\mathbf{a} = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$, $\mathbf{b} = y_1 \wedge \cdots \wedge y_r$, 且 $x_i, y_j \in V$, 有

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \det(\langle x_i, y_j \rangle).$$

下面给出关于范围的一个经典结论 (参见文献 [28, 第 52–55 页]).

定理 4.1 ^[28] 如下命题恒成立.

(i) $\|\omega\|_0$ 定义了一个范数, 且 $\|\omega\|_0 = \sup\{|\omega(\mathbf{a})| : \|\mathbf{a}\|_0 = 1\}$, 其中 $\|\mathbf{a}\|_0$ 称为 $\mathbf{a}$ 的块 (mass), 定义如下:

$$\|\mathbf{a}\|_0 = \inf \left\{ \sum \|\mathbf{a}_i\| : \mathbf{a} = \sum \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \text{ 是简单向量} \right\}.$$

(ii) 对任意 r 重向量 $\mathbf{a}$, 有 $\|\mathbf{a}\|_0 \geq \|\mathbf{a}\|$, 且等号成立当且仅当 $\mathbf{a}$ 是简单的.

(iii) 对每一个固定的 ω , 都存在一个 r 重向量 $\mathbf{b}$ 使得 $\|\omega\|_0 = |\omega(\mathbf{b})|$, 且 $\mathbf{b}$ 是简单的, $\|\mathbf{b}\| = 1$.

(iv) 如果 ω 是简单的, 则有 $\|\omega\|_0 = \|\omega\|$.

(v) 不等式 $\|\omega\| \geq \|\omega\|_0 \geq \left(\frac{r!(n-r)!}{n!}\right)^{\frac{1}{2}} \|\omega\|$ 成立, 且第一个不等式的等号成立当且仅当 ω 是简单的.

定理 1.2 的证明 我们采取反证法推导出矛盾. 不妨设存在一个整体的非零全纯 $(p, 0)$ 形式 $\phi \neq 0$, 即 $\phi \in H_{\bar{\partial}}^{p,0}(N) \cong H^0(N, \Omega_N^p)$. 设 $\|\phi\|_0(x)$ 是 ϕ 在点 x 的范围. 因为 N 是紧致的流形, 因此, 它一定在某点 x_0 达到非零的最大值.

由上述定理 4.1(iii) 可知, 在点 x_0 , 存在一个简单的 p 重向量 $\mathbf{b}$, 且 $\|\mathbf{b}\| = 1$. 我们可以假设 $\mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z_p}$, 使得

$$\max_{x \in N} \|\phi\|_0(x) = \|\phi\|_0(x_0) = |\phi(\mathbf{b})|,$$

其中 $\{\frac{\partial}{\partial z_i}\}_{i=1}^n$ 在点 x_0 是酉标架, 即 $h_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\beta}$. 如果记

$$\phi(x) = \frac{1}{p!} \sum_{I_p} a_{I_p}(x) dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p},$$

其中 $I_p = (i_1, \dots, i_p)$, 且如果 $s \neq t$, 则 $i_s \neq i_t$. 这里 $a_{I_p}(x)$ 是全纯的, 则在点 x_0 有

$$\|\phi\|_0(x_0) = |a_{12\dots p}|(x_0).$$

在 x_0 的一个小邻域 U 内, 定义一个局部的 $(p, 0)$ 形式

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(h_{\alpha\bar{\beta}})_{1 \leq \alpha, \beta \leq p}} \sqrt{\det(h^{\alpha\bar{\beta}})_{1 \leq \alpha, \beta \leq 1}}} a_{12 \dots p}(x) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^p.$$

因为 $\tilde{\phi}$ 是简单的, 根据上述定理 4.1(iv), 在邻域 U 上有

$$\|\tilde{\phi}\|_0^2(x) = \|\tilde{\phi}\|^2(x) = \frac{|a_{12 \dots p}|^2(x)}{\det(h_{\alpha\bar{\beta}})_{1 \leq \alpha, \beta \leq p}}.$$

特别地, $\|\tilde{\phi}\|_0(x_0) = \|\phi\|_0(x_0)$. 根据范围 $\|\cdot\|_0$ 的定义, 对任意非零的简单多重向量 $\mathbf{a}$, 都有

$$\|\phi\|_0^2(x) \geq \frac{|\phi(\mathbf{a})|^2}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

不妨在 x_0 小邻域内令 $\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial z^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial z^p}$, 则有

$$\|\phi\|_0^2(x) \geq \frac{|\phi(\mathbf{a})|^2}{\|\mathbf{a}\|^2} = \frac{|a_{12 \dots p}|^2(x)}{\det(h_{\alpha\bar{\beta}})_{1 \leq \alpha, \beta \leq p}} = \|\tilde{\phi}\|_0^2(x).$$

进一步得到

$$\|\tilde{\phi}\|(x) = \|\tilde{\phi}\|_0(x) \leq \|\phi\|_0(x) \leq \|\phi\|_0(x_0) = |a_{12 \dots p}|(x_0) = \|\tilde{\phi}\|_0(x_0) = \|\tilde{\phi}\|(x_0).$$

因此, 在 x_0 的一个小邻域, 我们构造了一个简单的 $(p, 0)$ 形式 $\tilde{\phi}(x)$, 使得在 x_0 点, $\tilde{\phi}(x)$ 的 L^2 范数达到最大值.

因为 $\tilde{\phi}$ 是 $\wedge^p(T'N)^*$ 的局部截面, 对 $\|\tilde{\phi}\|^2(x)$ 运用极值原理和经典的 Bochner 公式, 取任意非零 $v \in T'N$, 在 x_0 点, 则满足

$$\begin{aligned} 0 &\geq \partial_v \partial_{\bar{v}} \|\tilde{\phi}\|^2 \\ &= \|\nabla_v \tilde{\phi}\|^2 + |a_{12 \dots p}|^2 \sum_{i=1}^p R\left(v, \bar{v}, \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}\right). \end{aligned}$$

所以在 x_0 点, 有

$$\sum_{i=1}^p R_{v\bar{v}i\bar{i}} \leq 0. \quad (4.1)$$

由题意 $p \leq k$, 不妨设 k 维子空间 $\Sigma \subset T'_{x_0}N$ 且包含 p 维子空间 $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^p}\}$. 因为已知条件假设 $\text{Ric}_k^2(h) > 0$, 则对于任意 $i \in \{1, \dots, p\}$, 有

$$\sum_{j=1}^k R_{j\bar{j}i\bar{i}} > 0.$$

对 i 求和, 可得

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^k R_{j\bar{j}i\bar{i}} > 0. \quad (4.2)$$

但我们依次令不等式 (4.1) 中的 v 等于 $\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^k}$ 并求和得

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^k R_{j\bar{j}i\bar{i}} \leq 0, \quad (4.3)$$

则 (4.2) 和 (4.3) 矛盾. 因此这证明了对于任意 $p \leq k$, 都有 Hodge 数 $h^{p,0} = 0$.

当定理 1.2(2) 假设 $\text{Ric}_k^1(h) > 0$ 时, 由不等式 (4.2) 容易推得 Hodge 数 $h^{k,0} = 0$. $\square$

定理 1.3 的证明 我们采取与定理 1.2 类似的反证法, 同样得到不等式 (4.1), 即在 x_0 点, 对于任意非零 $v \in T'N$, 都有

$$\sum_{i=1}^p R_{v\bar{v}i\bar{i}} \leq 0. \quad (4.4)$$

根据 h 的实双截曲率 $B_h > 0$ 及其定义可知,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq p} R_{j\bar{j}i\bar{i}} > 0. \quad (4.5)$$

依次令不等式 (4.4) 中的 v 等于 $\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^k}$ 并求和, 可得出与 (4.5) 矛盾. 因此对于任意 $1 \leq p \leq n$, 都有 Hodge 数 $h^{p,0} = 0$. 如果还存在一个 Kähler 度量, 因为 $h^{2,0} = 0$, 运用 Kodaira 定理^[23] (或参见文献 [24, 性质 3.3.2 和推论 5.3.3]), 可得此流形是射影的. $\square$

致谢 作者对郑方阳教授给予的指导和帮助表示深深的感谢. 作者感谢审稿人对本文的建议和帮助.

参考文献

- 1 Ni L. Liouville theorems and a Schwarz lemma for holomorphic mappings between Kähler manifolds. *Comm Pure Appl Math*, 2021, 74: 1100–1126
- 2 Yang X K. RC-positivity, rational connectedness and Yau's conjecture. *Camb J Math*, 2018, 6: 183–212
- 3 Yau S T. Problem Section, *Seminar on Differential Geometry*, vol. 102. Princeton: Princeton University Press, 1982
- 4 Ni L. The fundamental group, rational connectedness and the positivity of Kähler manifolds. *J Reine Angew Math*, 2021, 774: 267–299
- 5 Campana F. Connexité rationnelle des variétés de Fano. *Ann Sci Éc Norm Supér (4)*, 1992, 25: 539–545
- 6 Kollár J, Miyaoka Y, Mori S. Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds. *J Differential Geom*, 1992, 36: 765–779
- 7 Wu D, Yau S T. Negative holomorphic curvature and positive canonical bundle. *Invent Math*, 2016, 204: 595–604
- 8 Tosatti V, Yang X K. An extension of a theorem of Wu-Yau. *J Differential Geom*, 2017, 107: 573–579
- 9 Chu J, Lee M C, Tam L F. Kähler manifolds with negative k -Ricci curvature. *arXiv:2009.06297*, 2020
- 10 Li C, Ni L, Zhu X H. An application of C^2 -estimate for a complex Monge-Ampère equation. *arXiv:2011.13508*, 2020
- 11 Wu D, Yau S T. A remark on our paper “Negative holomorphic curvature and positive canonical bundle”. *Comm Anal Geom*, 2016, 24: 901–912
- 12 Heier G, Lu S S Y, Wong B. Kähler manifolds of semi-negative holomorphic sectional curvature. *J Differential Geom*, 2016, 104: 419–441
- 13 Heier G, Wong B. On projective Kähler manifolds of partially positive curvature and rational connectedness. *Doc Math*, 2020, 25: 219–238
- 14 Yang X. RC-positivity, vanishing theorems and rigidity of holomorphic maps. *J Inst Math Jussieu*, 2021, 20: 1023–1038
- 15 Yang X K. RC-positive metrics on rationally connected manifolds. *Forum Math Sigma*, 2020, 8: e53
- 16 Ni L, Zheng F Y. Comparison and vanishing theorems for Kähler manifolds. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2018, 57: 151
- 17 Ni L, Zheng F Y. Positivity and Kodaira embedding theorem. *arXiv:1804.096096*, 2018
- 18 Tang K. The $\partial\bar{\partial}$ -Bochner formulas for holomorphic mappings between Hermitian manifolds and their applications. *Acta Math Sci*, 2021, 41: 1659–1669

- 19 Yau S T. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I. *Comm Pure Appl Math*, 1978, 31: 339–411
- 20 Yang X K, Zheng F Y. On real bisectional curvature for Hermitian manifolds. *Trans Amer Math Soc*, 2019, 371: 2703–2718
- 21 Lee M C, Streets J. Complex manifolds with negative curvature operator. *Int Math Res Not IMRN*, 2021, 2021: 18520–18528
- 22 Royden H L. The Ahlfors-Schwarz lemma in several complex variables. *Comment Math Helv*, 1980, 55: 547–558
- 23 Kodaira K. On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties). *Ann of Math* (2), 1954, 60: 28–48
- 24 Huybrechts D. *Complex Geometry: An Introduction*. Berlin: Springer-Verlag, 2005
- 25 Tang K. Positive curvature operator, projective manifold and rational connectedness. *arXiv:1905.04894*, 2019
- 26 Zheng F Y. *Complex Differential Geometry*. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 18. Providence: Amer Math Soc; Boston: International Press, 2000
- 27 Liu K F, Yang X K. Ricci curvatures on Hermitian manifolds. *Trans Amer Math Soc*, 2017, 369: 5157–5196
- 28 Whitney W. *Geometric Integration Theory*. Princeton: Princeton University Press, 1957

On first and second k -Ricci curvatures for Hermitian manifold

Kai Tang

Abstract This paper studies the basic properties of the non-positive or non-negative first and second k -Ricci curvatures. Firstly, we obtain the inequality for the Ricci curvature and the holomorphic sectional curvature. Secondly, we give vanishing theorems on compact Hermitian manifolds with positive first or second k -Ricci curvature. In particular, we prove that if a compact Kähler manifold has a Hermitian metric with a positive second k -Ricci curvature ($k \geq 2$), then it must be a projective manifold.

Keywords first k -Ricci curvature, second k -Ricci curvature, Hermitian manifold

MSC(2020) 53C24, 53C55

doi: 10.1360/SSM-2021-0034