

好格子点法设计的进一步研究

献给方开泰教授 80 华诞

陈镠, 唐煜*

苏州大学数学科学学院, 苏州 215006

E-mail: 435479007@qq.com, ytang@suda.edu.cn

收稿日期: 2019-03-31; 接受日期: 2019-07-19; 网络出版日期: 2020-05-07; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11671290) 和江苏省重点学科 (批准号: GD10700118) 资助项目

摘要 作为一种有效的数论方法, 好格子点法常被用来构造均匀设计. 但长久以来, 由好格子点法构造的设计的均匀性性质并没有被深入地分析和研究. 本文将以可卷型 L_2 -偏差为准则, 回顾好格子点法设计的构造, 分析其性质, 并对好格子点法进行改进, 最终给出一系列具体参数的低偏差设计.

关键词 好格子点法 均匀设计 拉丁超立方体设计 可卷型 L_2 -偏差

MSC (2010) 主题分类 62K15, 62K10

1 引言

均匀设计由方开泰和王元于 20 世纪 70 年代末共同提出. 经过了 40 多年的发展, 均匀设计已被广泛应用于社会生产生活的各个方面. 正如当时系统工程中的多个项目所要求的那样 (参见文献 [1, 2]), 均匀设计成功地应用于实际的主要原因在于它可以用相对较少的试验次数确定出多个定量因子的比较好的水平组合, 而在这一点上恰好弥补了传统试验设计, 包括正交试验设计的不足. 随着均匀设计的应用不断被推广和深入, 有关均匀设计的理论也不断被建立和完善. 这些理论涉及均匀性度量的定义, 各种均匀性度量下性质的讨论, 均匀性度量与正交性、字长型及距离等其他度量之间的关系, 以及均匀设计的构造等方面, 文献 [3] 对此作出了全面细致的阐述. 其中, 对于均匀设计的构造, 大致有三种思路. 在均匀设计的早期发展过程中, 出现过好格子点法 [2, 4]、拉丁方法 [5] 和正交设计扩展法等方法. 但这些方法仅提供了一种直观上简单可行的替代性构造方法, 只能被看作是构造均匀设计的近似性途径. 因为在当时, 虽然关于均匀设计的理论已经有了均匀性度量—星偏差的概念, 但并没有去深入分析星偏差的组合性质, 同时更没有从优化的角度去尽可能逼近星偏差的下界, 因而通过以上方法构造出来的设计并不能保证一定是在星偏差下最为均匀的. 后来, Hickernell [6, 7] 提出了一系列改进 L_p -偏差之后, 围绕特定均匀性度量下均匀设计构造的讨论不断见诸文献. 其中, 一种比较有效的方法是

英文引用格式: Chen E, Tang Y. Further research on the good lattice point design (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2020, 50: 585–598, doi: 10.1360/N012019-00091

采用优化算法. 特别地, 门限接受算法被成功地用于搜索均匀设计, 具体的例子可参见文献 [8-11] 等. 另外, 通过组合设计的方法来构造特定偏差下的均匀设计也是一种行之有效的手段. 基于离散偏差下均匀设计的组合方法构造可参见文献 [12, 13] 等, 而针对中心化 L_2 - 偏差和可卷型 L_2 - 偏差下均匀设计的组合方法可参见文献 [14-16] 等.

采用均匀设计进行安排的试验, 一般都是针对定量因子的. 均匀设计具备明确的空间几何意义, 也可被看成是一种空间填充设计. 为了统一, 讨论均匀设计的构造时大都限定在单位正立方体区域上. 但正如许多文献中所指出的, 考虑到计算上的方便, 几乎所有的均匀设计都是构造在所谓的 U 型设计集上的. U 型设计实际上可以被看成是一种部分因子设计. 显而易见的是, 对于给定试验次数 N 和因子个数 k , 不同的因子水平 q 对应于不同的 U 型设计. 但在计算设计的均匀性时, 都会通过线性映射把具体 U 型设计上的设计点映射到单位正立方体中的点, 然后再计算特定偏差下的均匀性度量值. 一个自然的问题是, 对于给定的偏差, 基于不同水平而构造的设计其均匀性是否有所差异呢? 为此, 我们通过比较均匀设计主页 (<https://dst.uic.edu.hk/cn/isci/uniform-design/uniform-design-tables>) 上所列的不同水平下偏差值的变化, 得到了一些直观结果. 图 1 显示的是试验次数取 12 和 24 及因子个数取 5 和 7 的 4 种参数组合下的中心化 L_2 - 偏差和可卷型 L_2 - 偏差的偏差值受因子水平的影响情形. 可以明显看出, 无论是对于中心化 L_2 - 偏差, 还是对于可卷型 L_2 - 偏差, 当考虑具有相同参数 (例如, 具有相同的试验次数 12 和因子个数 5, 即图中实折线所示) 的设计时, 我们发现随着水平数的增加, 网页上所列设计的偏差值均有下降的趋势. 这种趋势也体现在另外三组参数组合中. 直观上, 随着因子的水平数变大, 单个因子的水平重复数将降低, 设计的一维投影变得更均匀, 从而将有利于设计的整体均匀性. 第 3 节给出理论证明, 在平均可卷型 L_2 - 偏差下, 这种趋势具有必然性.

由上面的讨论可知, 对于具有相同试验次数和因子个数的设计来说, 当其因子的水平数越大, 设计将越趋向均匀. 因而在考虑构造均匀设计时, 我们应尽可能选择因子的水平数与试验次数相同的设计. 这样的设计被称为拉丁超立方体设计 (参见文献 [17]). 可以证明, 拉丁超立方体设计的一维投影是最均匀的. 利用好格子点法构造的设计一定是拉丁超立方体设计. 本文将回顾好格子点法的构造, 同时

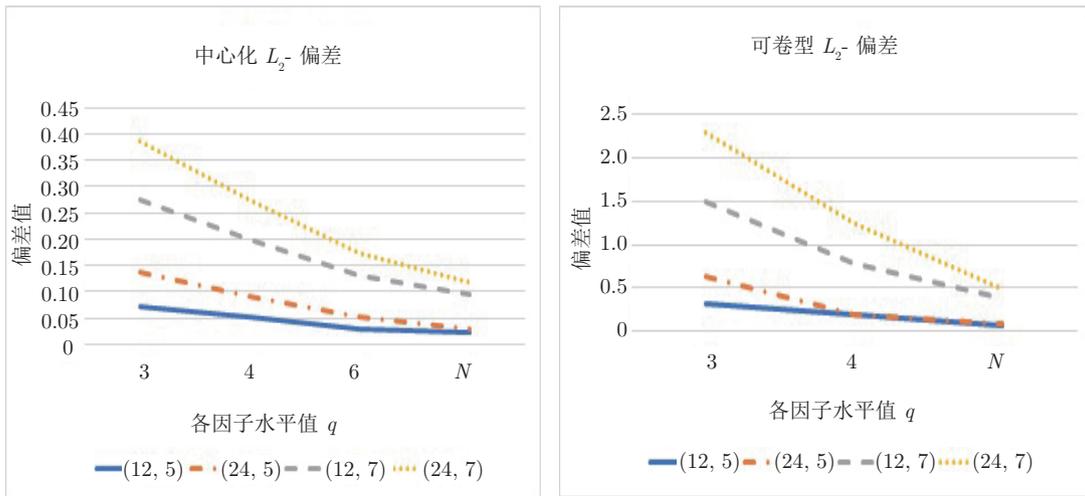


图 1 (网络版彩图) 不同水平下偏差值的变化

考虑对好格子点法进行改进, 最终给出一系列具体参数的低偏差设计. 为此, 我们先在下一节中介绍一些必要的概念与记号.

2 概念与记号

设 \mathcal{P} 是某区域 \mathcal{D} 上的 N 元点集. 用 $M(\mathcal{P})$ 来表示衡量点集 \mathcal{P} 的均匀性的某种度量, 使得 M 值越低, 点集 \mathcal{P} 越均匀. 则均匀设计就是在区域 \mathcal{D} 上的所有可能的 N 元点集中具有最小 M - 值的点集. 这个区域 \mathcal{D} 通常被取成单位立方体 $C^m = [0, 1]^m$ 或其子集.

一个 $N \times m$ 矩阵 \mathbf{X} , 若其第 k ($k = 1, 2, \dots, m$) 列的元素取自集合 $Q = \{1, 2, \dots, q_k\}$, 且这 q_k 个元素出现的频率相等, 均为 $r_k = N/q_k$ 次, 则该矩阵称为是一个 U 型设计 (参见文献 [18]), 记作 $U(N; q_1, \dots, q_m)$. 显然, 这里 N 必须被所有的 q_k 整除, 其中 $k = 1, \dots, m$.

一个 U 型设计被称为是对称的, 如果 $q_1 = \dots = q_m$; 否则, 设计被称为是非对称的. 所有这样的 U 型设计 $U(N; q_1, \dots, q_m)$ 形成的集合被记作 $\mathcal{U}(N; q_1, \dots, q_m)$. 为了方便, 当一些 q_k 相同时, 我们将采用记号 $U(N; q_1^{r_1}, \dots, q_l^{r_l})$ 及 $\mathcal{U}(N; q_1^{r_1}, \dots, q_l^{r_l})$ 来表示相应的 U 型设计及 U 型设计集, 这里

$$\sum_{k=1}^l r_k = m.$$

而当设计是对称时, 相应的 U 型设计和 U 型设计集分别记为 $U(N; q^m)$ 和 $\mathcal{U}(N; q^m)$.

对于一个 U 型设计 $U(N; q_1, \dots, q_m)$, 定义映射

$$f = (f_1, \dots, f_m),$$

其中 $f_k: l \rightarrow (2l-1)/(2q_k)$, $l = 1, \dots, q_k$, $k = 1, \dots, m$, 则 U 型设计的 N 个行就被映射成 C^m 中的 N 个点. 在这种映射下, 整个 U 型设计集 $\mathcal{U}(N; q_1, \dots, q_m)$ 可被看成是 C^m 的一个子集. 从而对给定的均匀性度量, 如 $\mathcal{U}(N; q_1, \dots, q_m)$ 上的某个设计使得度量达到了最小, 则这个设计将被称为是 $\mathcal{U}(N; q_1, \dots, q_m)$ 上的均匀设计, 并记作 $U_N(q_1, \dots, q_m)$. 对于对称设计来说, 给定参数 N 、 m 和 q , 一个具有 N 试验行、 m 个因子的 q 水平对称部分因子设计对应于一个 $N \times m$ 的矩阵 \mathbf{X} . 如果我们把它的行看成 Q^m 中的点, 这里 $Q = \{1, 2, \dots, q\}$, 则均匀设计 $U_N(q^m)$ 的构造就等价于在 Q^m 中分布 N 个点, 使其尽可能均匀. 很自然地, 我们首先让这些点在每个 1 维子空间上分布均匀. 当 N 是 q 的一个倍数时, 这个要求就是使得设计成为一个 U 型设计. 在这种情形下, Q 中的任意元素在 \mathbf{X} 的每一列中出现相同的次数.

均匀性度量在均匀设计概念中起着举足轻重的作用, 有关均匀性度量的详细讨论, 可参见文献 [4, 19] 以及它们的参考文献. 历史上, 由公式

$$D_p(\mathcal{P}) = \left\{ \int_{C^m} \left| \frac{N(\mathcal{P}, [\mathbf{0}, \mathbf{x}])}{N} - \text{Vol}([\mathbf{0}, \mathbf{x}]) \right|^p d\mathbf{x} \right\}^{1/p} \quad (2.1)$$

给出的 L_p - 偏差被频繁地用于数论 (伪 Monte Carlo) 方法中, 其中 $[\mathbf{0}, \mathbf{x}]$ 表示超立方体 $[0, x_1] \times \dots \times [0, x_m]$, $N(\mathcal{P}, [\mathbf{0}, \mathbf{x}])$ 表示点集 \mathcal{P} 中落入 $[\mathbf{0}, \mathbf{x}]$ 的点数, 而 $\text{Vol}(A)$ 则表示 A 的容量 (体积). 对于 L_2 - 偏差 (平方), 文献 [20] 给出了下列解析表达式:

$$(D_2(\mathcal{P}))^2 = \frac{1}{3^m} - \frac{2^{1-m}}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{k=1}^m (1 - x_{ik}^2) + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \prod_{k=1}^m [1 - \max(x_{ik}, x_{jk})], \quad (2.2)$$

其中

$$\mathbf{x}_k = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \in \mathcal{P},$$

从而大大简化了计算. 然而, L_p - 偏差仅考虑 m 维空间上的均匀性, 而忽略了任意低维子空间投影所产生的差别. 同时, 在衡量 \mathbf{x} 点处偏差, 即 $|\frac{N(\mathcal{P}_u, [\mathbf{0}, \mathbf{x}])}{N} - \text{Vol}([\mathbf{0}, \mathbf{x}])|$ 时, 原点 $\mathbf{0}$ 均起着十分重要的作用. 这些缺点使得 L_p - 偏差的敏感度较低. 为了弥补这些不足, Hickernell [6,7] 提出了许多改进型 L_p - 偏差, 如可卷型 L_2 - 偏差 (wrap-around L_2 -discrepancy, WD) 和中心化 L_2 - 偏差 (centered L_2 -discrepancy, CD) 等.

可卷型 L_2 - 偏差 (平方) 的定义由下式给出:

$$\text{WD} = \sum_{u \neq \emptyset} \int_{C^u} \int_{C^u} \left[\frac{N(\mathcal{P}_u \cap J_w(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}_u))}{N} - \text{Vol}(J_w(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}_u)) \right]^2 d\mathbf{x}'_u d\mathbf{x}_u,$$

其中 u 是指坐标集 $\{1, 2, \dots, m\}$ 的任意非空子集, $|u|$ 表示 u 的阶, C^u 是指坐标限制在 u 上的 $|u|$ 维单位立方体, $N(\mathcal{P}_u \cap A)$ 表示点集 \mathcal{P} 投影到 C^u 上而落入集合 A 的点的个数, \mathbf{x}_u 是指 \mathcal{P} 中的点 \mathbf{x} 在子空间 C^u 上的投影, 而

$$J_w(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \bigotimes_{k=1}^m J_w(x'_k, x_k),$$

其中 \otimes 表示 Kronecker 乘积,

$$J_w(x'_k, x_k) = \begin{cases} [x'_k, x_k), & \text{若 } x'_k \leq x_k, \\ [0, x_k) \cup [x'_k, 1), & \text{若 } x'_k > x_k. \end{cases}$$

对于 WD, 文献 [7] 给出了一个解析表达式

$$\text{WD} = -\left(\frac{4}{3}\right)^m + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \prod_{k=1}^m \left[\frac{3}{2} - |x_{ik} - x_{jk}|(1 - |x_{ik} - x_{jk}|) \right]. \quad (2.3)$$

中心化 L_2 - 偏差 (平方) 的定义由下式给出:

$$\text{CD} = \sum_{u \neq \emptyset} \int_{C^u} \left[\frac{N(\mathcal{P}_u \cap J_w(\mathbf{x}_u))}{N} - \text{Vol}(J_w(\mathbf{x}_u)) \right]^2 d\mathbf{x}_u, \quad (2.4)$$

其中 u 是指坐标集 $\{1, 2, \dots, m\}$ 的任意非空子集, $|u|$ 表示 u 的阶, C^u 是指坐标限制在 u 上的 $|u|$ 维单位立方体, $N(\mathcal{P}_u \cap A)$ 表示点集 \mathcal{P} 投影到 C^u 上而落入集合 A 的点的个数, \mathbf{x}_u 是指 \mathcal{P} 中的点 \mathbf{x} 在子空间 C^u 上的投影, 而 $J_w(\mathbf{x}_u)$ 则是 C^u 中包含介于 \mathbf{x}_u 与 C^u 的最近顶点之间的点的超立方体.

对于 CD, 文献 [6] 给出了一个解析表达式

$$\begin{aligned} \text{CD} = & \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{1}{2} \left| x_{ik} - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2} \left| x_{jk} - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} |x_{ik} - x_{jk}| \right) \\ & - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{2} \left| x_{ik} - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \left| x_{ik} - \frac{1}{2} \right|^2 \right) + \left(\frac{13}{12} \right)^m. \end{aligned} \quad (2.5)$$

3 不同水平设计的均匀性比较

本节将以可卷型 L_2 - 偏差为准则, 对具有不同水平的 U 型设计的均匀性进行比较. 首先给出降水平的定义, 设 D 为 U 型设计 $U(N; q_1, \dots, q_m)$, X_j 为 D 的某个因子, 对应水平为 q_j (q_j 为合数). 定义映射 $f: Z_{q_j} \rightarrow Z_s$ (其中 s 整除 q_j , 即存在整数 $1 < r < q_j$, 使得 $q_j = sr$), 且对任意 $x \in [kr - r + 1, kr]$, $f(x) = k$, 则称 f 为降水平映射, 首先给出如下简单结论.

引理 3.1 若 D 为单因子 U 型设计 $U(N; q)$, 其中 $N = qr$, 则

$$WD(D) = \frac{1}{6q^2}.$$

证明 由于 $N = qr$, 故单因子的每个水平均出现 r 次, 因此, 任意两个不同的水平组合均出现 r^2 次, 相同的水平组合出现 $r(r - 1)$ 次, 代入 (2.3) 并经化简得

$$WD(D) = -\frac{4}{3} + \frac{1}{N^2} \frac{3N}{2} + \frac{1}{N^2} \left(\frac{4N^2}{3} - \frac{3N}{2} + \frac{r^2}{6} \right) = \frac{1}{6q^2}.$$

证毕. □

由引理 3.1 可知, 对于单因子 U 型设计 $U(N; q)$, 设计的水平 q 取值越高, 其可卷型 L_2 - 偏差越小.

下面考虑多因子的情形. 例如, 图 2 中 D 为二因子 U 型设计 $U(4; 4^2)$. 将因子 X_1 降至 2 水平, 本质上构造了一个满足如下性质的映射 $f: f(\{1, 2\}) = 1, f(\{3, 4\}) = 2$, 由此得到 U 型设计 D' . 经简单计算可知, 由于表达式 (2.3) 中的连积形式, 直接建立 D 和 D' 这两个设计的可卷型 L_2 - 偏差的定量关系相当困难. 本节将采用类似于 Tang 等^[21] 的方法, 从平均均匀性的角度对高水平设计与低水平设计进行比较. 但在文献 [21] 中, 由于需要保持设计的正交性, 仅对同一列的不同水平进行水平置换, 而这里仅需保持设计的 U 型性质, 故考虑对同一列的所有元素进行位置置换. 记 D 为 U 型设计 $U(N; q_1, \dots, q_m)$, 对所有列作用位置置换, 总共可以得到 $(N!)^m$ 个设计, 所有这样的设计构成的集合记作 $\mathcal{S}(D)$, 定义 $\mathcal{S}(D)$ 的平均可卷型 L_2 - 偏差 (average wrap-around L_2 -discrepancy, AWD)

$$AWD(D) = \frac{1}{(N!)^m} \sum_{D' \in \mathcal{S}(D)} WD(D'). \tag{3.1}$$

引理 3.2 设 D 为 U 型设计 $U(N; q_1, \dots, q_m)$, 则 $\mathcal{S}(D)$ 的平均可卷型 L_2 - 偏差为

$$AWD(D) = -\left(\frac{4}{3}\right)^m + \frac{1}{(N!)^{m-1}} \left(\frac{3\alpha}{2N} + \frac{\beta}{N^2} \right), \tag{3.2}$$

D			D'	
X_1	X_2		X'_1	X'_2
2	1	\Rightarrow	1	1
3	4		2	4
4	2		2	2
1	3		1	3

图 2 降水平操作

其中

$$\alpha = ((N-1)!)^{m-1} \left(\frac{3N}{2}\right)^{m-1},$$

$$\beta = ((N-2)!)^{m-1} \prod_{k=1}^m \left(\frac{4N^2}{3} - \frac{3N}{2} + \frac{r_k^2}{6}\right),$$

这里 $r_k = N/q_k$.

证明 考虑保持第一列 X_1 不动, 对剩余列作用位置置换, 则 X_1 的任意一行与剩余列的每个行组合均出现 $((N-1)!)^{m-1}$ 次. 因此对 X_1 作用位置置换后, X_1 的任意一行与剩余列的每个行组合均出现 $N!((N-1)!)^{m-1}$ 次. 同理, X_1 的任意两行与剩余列的任意两行的行组合均配对出现 $N!((N-2)!)^{m-1}$ 次, 代入公式 (3.1), 并经整理可得到 AWD 值的解析式, 即 (3.2). \square

推论 3.1 设 D 为 U 型设计 $U(N; N^m)$, 若对 D 作降水平变换得到 D' , 则

$$\text{AWD}(D) < \text{AWD}(D'). \tag{3.3}$$

证明 采用引理 3.2 中的记号, 当所有的 q_k 都取 N 时, 相应的 r_k 均取 1, 于是 β 取到最小, 故最终 $\text{AWD}(D)$ 最小. \square

由上述讨论可以发现, 在平均均匀性的意义下, 高水平的设计要比低水平的设计更好.

4 好格子点法设计的性质及改进

本节将回顾好格子点法设计的构造方法, 同时针对可卷型 L_2 - 偏差的特点, 考虑对好格子点法设计进行改进, 并分析改进后设计的性质. 作为衡量可卷型 L_2 - 偏差下设计均匀性的标准, 我们先列出文献 [22] 中的一个结论.

引理 4.1 对于水平数 q 为偶数和奇数的两种情形, 可卷型 L_2 - 偏差在 U 型设计集 $\mathcal{U}(N; q^m)$ 上的下界分别由下面两式给出:

$$\text{LB}_{\text{even}} = \Delta + \frac{N-1}{N} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m(N-q)}{q(N-1)}} \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{mN}{q(N-1)}} \left(\frac{3}{2} - \frac{2(2q-2)}{4q^2}\right)^{\frac{2mN}{q(N-1)}} \cdots \left(\frac{3}{2} - \frac{(q-2)(q+2)}{4q^2}\right)^{\frac{2mN}{q(N-1)}},$$

$$\text{LB}_{\text{odd}} = \Delta + \frac{N-1}{N} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m(N-q)}{q(N-1)}} \left(\frac{3}{2} - \frac{2(2q-2)}{4q^2}\right)^{\frac{2mN}{q(N-1)}} \cdots \left(\frac{3}{2} - \frac{(q-1)(q+1)}{4q^2}\right)^{\frac{2mN}{q(N-1)}},$$

其中

$$\Delta = -\left(\frac{4}{3}\right)^m + \frac{1}{N} \left(\frac{3}{2}\right)^m.$$

对 $i, j = 1, \dots, N$ 和 $k = 1, \dots, m$, 定义 α 值, $\alpha_{ij}^k \equiv |x_{ik} - x_{jk}|(1 - |x_{ik} - x_{jk}|)$. 我们用记号 F_{ij}^α 来表示 $\{\alpha_{ij}^k, k = 1, \dots, m\}$ 的分布. 如果对于所有的 $i \neq j$, F_{ij}^α 分布都一样, 则这样的一个 U 型设计 $U(N; q^m)$ 是均匀设计. 在这种情形下, 可卷型 L_2 - 偏差达到以上下界.

好格子点法设计的构造过程十分简洁. 设 N 为任意正整数, 记 Z_N 为模 N 的剩余类环, Ω_N 为 Z_N 中所有与 N 互素的元素所形成的集合. Ω_N 中的元素个数由 Euler 函数 $\phi(N)$ 给出. 对任意的正整数 N , 有

$$\phi(N) = N \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

其中 p_1, p_2, \dots, p_s 为 N 的所有素因数. 显然, 当 p 为素数时, $\phi(p) = p - 1$. 对任意 $i \in Z_N$ 和 $j \in \Omega_N$, 令 $a_{ij} = i \cdot j \pmod{N}$, 我们就得到一个 $N \times \phi(N)$ 的好格子点设计 $A = (a_{ij})$.

例 4.1 取 $N = 5$, 则 $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 及 $\Omega_5 = \{1, 2, 3, 4\}$, 于是 $\phi(5) = 4$. 下面的图 3 列出了 $N = 5$ 时的好格子点法设计 (为了方便, 我们把全零行列在最后, 并修改其行号为 N , 下同).

定理 4.1 设 N 为奇素数, 则由好格子点法构造的 U 型设计 $U(N; N^{N-1})$ 是可卷型 L_2 - 偏差下的均匀设计.

证明 由于 N 为奇素数, $\phi(N) = N - 1$, 故可由好格子点法得到 U 型设计 $U(N; N^{N-1})$. 而由好格子点法构造知, 对于该 U 型设计的任意相异的两行, 其对应位置的差作为 Z_N 中的元素必遍历 $Z_N \setminus \{0\}$. 于是, 对于所有的 $i \neq j$, α 值分别为 $\frac{2(2N-2)}{4N^2}, \frac{4(2N-4)}{4N^2}, \dots, \frac{(N-3)(N+3)}{4N^2}, \frac{(N-1)(N+1)}{4N^2}$, 且均出现 2 次. 由引理 4.1 及之后的说明知, 该 U 型设计是可卷型 L_2 - 偏差下的均匀设计. \square

定理 4.1 说明, 当 N 为奇素数时, 由好格子点法构造的 U 型设计 $U(N; N^{N-1})$, 在可卷型 L_2 - 偏差意义上将是最好的设计. 一般地, 当 N 不是奇素数时, 这个结论不一定成立. 特别地, 可以考虑一种相对比较简单的情形: $N = p_1 p_2$, 其中 p_1 和 p_2 为素数, $p_1 < p_2$. 我们有下面的引理.

定理 4.2 设 $N = p_1 p_2$, 其中 p_1 和 p_2 是素数, $p_1 < p_2$, 则由好格子点法给出的 U 型设计的可卷型 L_2 - 偏差由下式给出:

$$WD = -\left(\frac{4}{3}\right)^{(p_1-1)(p_2-1)} + \frac{1}{p_1 p_2} \left(\frac{3}{2}\right)^{(p_1-1)(p_2-1)} + \frac{1}{p_1^2 p_2^2} (n_1 B_1 + n_2 B_2 + n_3 B_3),$$

其中

$$B_1 = \prod_{t=1}^{p_2-1} \left(\frac{3}{2} - \frac{t}{p_2} \left(1 - \frac{t}{p_2}\right)\right)^{p_1-1}, \quad n_1 = p_1 p_2 (p_2 - 1),$$

$$B_2 = \prod_{t=1}^{p_1-1} \left(\frac{3}{2} - \frac{t}{p_1} \left(1 - \frac{t}{p_1}\right)\right)^{p_2-1}, \quad n_2 = p_1 p_2 (p_1 - 1),$$

$$B_3 = \prod_{s=1, (s, p_1 p_2)=1}^{p_1 p_2} \left(\frac{3}{2} - \frac{s}{p_1 p_2} \left(1 - \frac{s}{p_1 p_2}\right)\right), \quad n_3 = p_1 p_2 (p_1 - 1)(p_2 - 1).$$

证明 定义第 i 与 j 行的距离

$$d(i, j) = \prod_{k=1}^m \left[\frac{3}{2} - |x_{ik} - x_{jk}| (1 - |x_{ik} - x_{jk}|) \right],$$

N	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1
5	0	0	0	0

图 3 例 4.1: $N = 5$ 时的好格子点法设计

其中 m 为设计阵的列数. 由于 $N = p_1 p_2$, 而 p_1 和 p_2 为素数, $\phi(N) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)$, 故可由好格子点法得到 U 型设计 $U(N; N^{(p_1-1)(p_2-1)})$. 而由好格子点法构造知, 对于该 U 型设计的任意相异的两行, 其对应的距离只可能出现三种情形: 第一种情形是当 p_1 整除 $|i - j|$ 时, $d(i, j) = B_1$; 第二种情形是当 p_2 整除 $|i - j|$ 时, $d(i, j) = B_2$; 第三种情形是当 p_1 和 p_2 均不能整除 $|i - j|$ 时, $d(i, j) = B_3$. 而显然当 $i = j$ 时, 对应的距离为 $(3/2)^{(p_1-1)(p_2-1)}$. 从而代入 (2.3), 即得证. \square

显然, 当 p_1 取 2 时, 直接有下面的推论.

推论 4.1 设 $N = 2p$, 其中 p 为奇素数, 则由好格子点法构造的 U 型设计 $U(N; N^{p-1})$ 的可卷型 L_2 - 偏差为

$$\Delta + \frac{N-2}{2N} \left[\prod_{k=1}^{(p-1)/2} \left(\frac{3}{2} - \frac{(2k-1)(N-2k+1)}{N^2} \right)^2 + \prod_{k=1}^{(p-1)/2} \left(\frac{3}{2} - \frac{(2k)(N-2k)}{N^2} \right)^2 \right],$$

其中

$$\Delta = -\left(\frac{4}{3}\right)^{p-1} + \frac{1}{N} \left(\frac{3}{2}\right)^{p-1} + \frac{1}{N} \left(\frac{5}{4}\right)^{p-1}.$$

下面考虑对定理 4.2 中的好格子点设计进行改进, 使其具有更低的可卷型 L_2 - 偏差.

定理 4.3 设 $N = p_1 p_2$, 其中 p_1 和 p_2 是奇素数, $p_1 < p_2$, 对由好格子点法构造的 U 型设计 D 作变换, 即定义 D' ,

$$D'(i, j) = \begin{cases} D(i + p_2, j), & 1 \leq i \leq p_2, & \frac{m}{2} < j \leq m, \\ D(i - p_2, j), & p_2 + 1 \leq i \leq 2p_2, & \frac{m}{2} < j \leq m, \\ D(i, j), & & \text{其他,} \end{cases}$$

其中

$$m = (p_1 - 1)(p_2 - 1),$$

则变换后设计 D' 的可卷型 L_2 - 偏差为

$$\text{WD}(D') = -\left(\frac{4}{3}\right)^m + \frac{1}{p_1 p_2} \left(\frac{3}{2}\right)^m + \frac{1}{p_1^2 p_2^2} \left(\frac{n_1 - n_4}{2}\right) B_1 + n_2 B_2 + \left(\frac{n_3 - n_4}{2}\right) B_3 + n_4 B_4,$$

其中

$$B_4 = \prod_{t=1}^{p_2-1} \left(\frac{3}{2} - \frac{t}{p_2} \left(1 - \frac{t}{p_2} \right) \right)^{\frac{p_1-1}{2}} \prod_{s=1, (s, p_1 p_2)=1}^{p_1 p_2} \left(\frac{3}{2} - \frac{s}{p_1 p_2} \left(1 - \frac{s}{p_1 p_2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{B_1 B_3},$$

而

$$n_4 = \begin{cases} 3p_1 \lambda^2 - 4(p_1 + 3p_2)\lambda + 8p_2^2 + 8p_2, & \lambda \text{ 为偶数,} \\ 3p_1 \lambda^2 - 4(2p_1 + 3p_2)\lambda + 8p_2^2 + 4p_2 - p_1, & \lambda \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

其中

$$\lambda = \left\lceil \frac{2p_2}{p_1} \right\rceil,$$

这里 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数.

证明 记行号集合 $S = \{1, 2, \dots, N\}$, 上述对设计阵 D 的变换对应 S 上的一个置换 ψ :

$$\psi(i) = \begin{cases} i + p_2, & 1 \leq i \leq p_2, \\ i - p_2, & p_2 + 1 \leq i \leq 2p_2, \\ i, & \text{其他.} \end{cases}$$

例如, $\psi(1) = p_2 + 1$ 表示将设计阵第 1 行的 $m/2 + 1$ 列至 m 列变成第 $p_2 + 1$ 行的 $m/2 + 1$ 列至 m 列. 与定理 4.2 中的证明类似, 记 $|i - j|$ 为行标号 i 与 j 的绝对值差, 由 ψ 的定义知, 若 p_2 整除 $|i - j|$, 则 p_2 整除 $|\psi(i) - \psi(j)|$. 另一方面, 对 $i \in [1, p_2], j \in [p_2 + 1, 2p_2]$ 或者 $i \in [1, 2p_2], j \in [2p_2 + 1, p_1 p_2]$, 若 p_1 整除 $|i - j|$, 则 p_1 不整除 $|\psi(i) - \psi(j)|$. 以 $i \in [1, p_2]$ 和 $j \in [p_2 + 1, 2p_2]$ 为例, 此时 $\psi(i) = i + p_2, \psi(j) = j - p_2, |\psi(i) - \psi(j)| = |i - j + 2p_2|$, 因为 p_1 是奇素数, 故 p_1 不整除 $2p_2$. 在此情形下, 行距 $d(i, j) = B_4$. 同理可证当 $i \in [1, 2p_2]$ 和 $j \in [2p_2 + 1, p_1 p_2]$ 时, 行距 $d(i, j) = B_4$. 不妨记行对集合

$$S_1 = \{(i, j) : p_1 \mid (j - i), 1 \leq i \leq p_2, p_2 + 1 \leq j \leq 2p_2\},$$

$$S_2 = \{(i, j) : p_1 \mid (j - i), 1 \leq i \leq 2p_2, 2p_2 + 1 \leq j \leq p_1 p_2\},$$

而集合中元素的个数分别记为 $s_1 = |S_1|$ 和 $s_2 = |S_2|$. 经计算化简得 $s_1 = p_1 \lambda^2 - (p_1 + 4p_2)\lambda + 2p_2^2 + 2p_2$,

$$s_2 = \begin{cases} -\frac{p_1 \lambda^2}{4} + p_2 \lambda, & \lambda \text{ 为偶数,} \\ \frac{(\lambda - 1)(p_1 + 4p_2 - \lambda p_1)}{4}, & \lambda \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

其中

$$\lambda = \left\lceil \frac{2p_2}{p_1} \right\rceil.$$

根据对称性知, 有同样项数的 B_3 变成 B_4 , 故 $n_4 = 4(s_1 + s_2)$. 因此,

$$n_4 = \begin{cases} 3p_1 \lambda^2 - 4(p_1 + 3p_2)\lambda + 8p_2^2 + 8p_2, & \lambda \text{ 为偶数,} \\ 3p_1 \lambda^2 - 4(2p_1 + 3p_2)\lambda + 8p_2^2 + 4p_2 - p_1, & \lambda \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

根据定理 4.2 即可得到 WD 解析式. □

例 4.2 取 $N = 15$, 则 $\Omega_{15} = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$, 于是 $\phi(15) = 8$. 图 4 列出了 $N = 15$ 时的好格子点法设计及由定理 4.3 所给出的改进设计.

定理 4.4 设 $N = p_1 p_2$, p_1 和 p_2 为奇素数, $p_1 < p_2$, 将定理 4.3 中的变换作用于由好格子点法给出的 U 型设计 D 后得到 D' , 则 $\text{WD}(D') < \text{WD}(D)$.

证明 $\text{WD}(D) - \text{WD}(D') = \frac{n_4}{2p_1^2 p_2^2} (B_1 + B_3 - 2B_4)$, 根据 Cauchy-Schwartz 不等式,

$$\frac{B_1 + B_3}{2} > \sqrt{B_1 B_3} = B_4,$$

因此得证. □

定理 4.5 当 $N = 2p$ 时, 定理 4.3 给出的变换不改变设计的可卷型 L_2 - 偏差.

N	1	2	4	7	8	11	13	14
1	1	2	4	7	8	11	13	14
2	2	4	8	14	1	7	11	13
3	3	6	12	6	9	3	9	12
4	4	8	1	13	2	14	7	11
5	5	10	5	5	10	10	5	10
6	6	12	9	12	3	6	3	9
7	7	14	13	4	11	2	1	8
8	8	1	2	11	4	13	14	7
9	9	3	6	3	12	9	12	6
10	10	5	10	10	5	5	10	5
11	11	7	14	2	13	1	8	4
12	12	9	3	9	6	12	6	3
13	13	11	7	1	14	8	4	2
14	14	13	11	8	7	4	2	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0

 \Rightarrow

N	1	2	4	7	3	6	3	9
1	1	2	4	7	3	6	3	9
2	2	4	8	14	11	2	1	8
3	3	6	12	6	4	13	14	7
4	4	8	1	13	12	9	12	6
5	5	10	5	5	5	5	10	5
6	6	12	9	12	8	11	13	14
7	7	14	13	4	1	7	11	13
8	8	1	2	11	9	3	9	12
9	9	3	6	3	2	14	7	11
10	10	5	10	10	10	10	5	10
11	11	7	14	2	13	1	8	4
12	12	9	3	9	6	12	6	3
13	13	11	7	1	14	8	4	2
14	14	13	11	8	7	4	2	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0

图 4 $N = 15$ 时的好格子点法设计及其改进

证明 利用定理 4.3 的证明中定义的置换 ψ , 可知其定义域和值域均为 S . 下面首先分情形证明: 对任意 $i, j \in S$, 若 2 整除 $|i - j|$, 则 2 整除 $|\psi(i) - \psi(j)|$.

情形 1 $i \in [1, p], j \in [p + 1, 2p]$, 则 $\psi(i) = i + p, \psi(j) = j - p$, 所以, $|\psi(i) - \psi(j)| = |i - j + 2p|$. 若 2 整除 $|i - j|$, 又因为 2 整除 $2p$, 所以, 2 整除 $|\psi(i) - \psi(j)|$.

情形 2 $i \in [1, p], j \in [1, p]$, 则 $\psi(i) = i + p, \psi(j) = j + p, |\psi(i) - \psi(j)| = |i - j|$, 得证.

情形 3 $i \in [p + 1, 2p], j \in [p + 1, 2p]$, 则 $\psi(i) = i - p, \psi(j) = j - p, |\psi(i) - \psi(j)| = |i - j|$, 得证.

记对 D 作用变换前 B_1 的项数为 n_1 , 对 D 作用变换后得到 D' , 对应 B_1 的项数为 n'_1 , 由上述讨论知 $n_1 \leq n'_1$. 又因为对 D' 作用相同变换后得到 D , 因此 $n'_1 \leq n_1$, 所以 $n'_1 = n_1$. 同理可得 B_2 和 B_3 的项数也不变, 由此可知, 变换前后的可卷型 L_2 - 偏差值不变. \square

由定理 4.5 知, 当 $N = 2p$ (p 为奇素数) 时, 定理 4.3 给出的变换无法降低可卷型 L_2 - 偏差值, 故对这种特殊情形, 需要考虑新的变换.

定理 4.6 设 $N = 2p$, 其中 p 是奇素数, 对由好格子点法给出的 U 型设计 D 作变换,

$$D^*(i, j) = \begin{cases} D(i - 1, j), & p + 1 \leq i \leq 2p - 1, \quad \frac{p-1}{2} \leq j \leq p - 1, \\ D(2p - 1, j), & i = p + 1, \quad \frac{p-1}{2} \leq j \leq p - 1, \\ D(i, j), & \text{其他,} \end{cases}$$

则变换后设计 D^* 的可卷型 L_2 - 偏差为

$$\text{WD}(D^*) = -\left(\frac{4}{3}\right)^{p-1} + \frac{1}{2p}\left(\frac{3}{2}\right)^{p-1} + \frac{1}{4p^2}(m_1B_1 + m_2B_2 + m_3B_3 + m_4\sqrt{B_1B_3} + m_5\sqrt{B_1B_2}),$$

其中

$$m_1 = (p - 1)^2, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = p^2 - 1, \quad m_4 = 2(p - 1)^2, \quad m_5 = 4(p - 1),$$

B_1, B_2 和 B_3 由定理 4.2 给出.

证明 根据之前的讨论, 当 $N = 2p$ 时, 好格子点设计的不同行之间的距离仅有 3 种可能, 现在变换之后, 行距仅有 5 种可能的取值, 分别为 B_1 、 B_2 、 B_3 、 $\sqrt{B_1B_3}$ 和 $\sqrt{B_1B_2}$. 记 $I\{\cdot\}$ 为示性函数, 则 B_1 出现

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1, j \neq i}^p I\{2 \mid (i-j)\} + \sum_{i=p+1}^{2p-1} \sum_{j=p+1, j \neq i}^{2p-1} I\{2 \mid (i-j)\} + 2 \sum_{i=1}^{p-1} I\{2 \mid i, j = 2p\},$$

共 $(p-1)^2$ 项. B_2 出现在 $i = p, j = 2p$ 或者 $i = 2p, j = p$ 时, 共 2 项. B_3 出现

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p I\{2 \mid (i-j+1)\} + \sum_{i=p+1}^{2p-1} \sum_{j=p+1}^{2p-1} I\{2 \mid (i-j+1)\} + 2 \sum_{i=1}^{p-1} I\{2 \mid (i+1), j = 2p\},$$

共 $p^2 - 1$ 项. $\sqrt{B_1B_3}$ 出现

$$2 \left(2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^{2p-1} I\{|j-i| \neq p\} + \sum_{i=p+1}^{2p-1} I\{j = 2p\} \right),$$

共 $2(p^2 - 2p + 1)$ 项. $\sqrt{B_1B_2}$ 出现 $2(2 \sum_{i=1}^{p-1} I\{j = p+i\})$, 共 $4(p-1)$ 项. □

定理 4.7 若 $N = 2p$, p 为奇素数, 将定理 4.6 的变换作用于由好格子点法给出的 U 型设计 D 后得到 D^* , 则

$$\text{WD}(D^*) < \text{WD}(D).$$

证明 当 $N = 2p$, p 为奇素数时, 根据推论 4.1, 可得

$$\text{WD}(D) = -\left(\frac{4}{3}\right)^{p-1} + \frac{1}{2p} \left(\frac{3}{2}\right)^{p-1} + \frac{1}{4p^2} ((2p^2 - 2p)B_1 + 2pB_2 + (2p^2 - 2p)B_3).$$

从而,

$$\text{WD}(D) - \text{WD}(D^*) = \frac{1}{4p^2} (p-1)((p-1)(B_1 + B_3 - 2\sqrt{B_1B_3}) + 2(B_1 + B_2 - 2\sqrt{B_1B_2})).$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式知,

$$B_1 + B_3 - 2\sqrt{B_1B_3} > 0,$$

$$B_1 + B_2 - 2\sqrt{B_1B_2} > 0,$$

故

$$\text{WD}(D) - \text{WD}(D^*) > 0.$$

证毕. □

例 4.3 取 $N = 10$, 则 $\Omega_{10} = \{1, 3, 7, 9\}$, 于是 $\phi(10) = 4$. 下面的图 5 列出了 $N = 10$ 时的好格子点法设计及由定理 4.6 的证明所给出的改进设计.

为了比较本文提出的构造方法同文献 [9] 中的随机算法的表现, 下面列出一些数值结果作为参考. 取不同的素数 p_1 和 p_2 , $p_1 < p_2$, 当 p_1 为奇素数时, 采取定理 4.3 中的变换, 当 $p_1 = 2$ 时, 采取定理 4.6 中的变换. 表 1 列出不同方法下可卷型 L_2 - 偏差值及引理 4.1 中的理论下界, 其中 LHD (Latin hypercube design) 平均由文献 [9] 给出, 表示拉丁超立方体的平均可卷型 L_2 - 偏差. 水平置换优化指的是以好格子点作为初始设计, 运用随机优化算法得到的解. 经数值计算发现, 以好格子点作为初始设计, 经过定理 4.2 和 4.6 变换后的取值均优于 LHD 平均可卷型 L_2 - 偏差, 并且在 N 较大时, 均优于随机优化的解, 由此说明了变换的有效性. 另一方面, 由好格子点的构造过程知, 相比随机算法, 当 N 较大时, 本文提出的算法运算速度快得多.

N	1	3	7	9
1	1	3	7	9
2	2	6	4	8
3	3	9	1	7
4	4	2	8	6
5	5	5	5	5
6	6	8	2	4
7	7	1	9	3
8	8	4	6	2
9	9	7	3	1
10	0	0	0	0

 \Rightarrow

N	1	3	7	9
1	1	3	7	9
2	2	6	4	8
3	3	9	1	7
4	4	2	8	6
5	5	5	5	5
6	6	8	3	1
7	7	1	2	4
8	8	4	9	3
9	9	7	6	2
10	0	0	0	0

图 5 $N = 10$ 时的好格子点法设计及其改进

表 1 $N = p_1 p_2$ 时好格子点的 WD 值及其改进

p_1	p_2	LHD 平均	水平置换优化	好格子点	变换后	下界
2	7	0.1389	0.1218	0.1400	0.1287	0.1056
2	11	0.8751	0.7767	0.8369	0.7782	0.6725
2	13	2.0704	1.8513	1.9567	1.8356	1.6227
2	17	10.8422	9.8364	10.1575	9.6876	8.8720
2	19	24.2789	22.7457	22.7457	21.8481	20.2827
2	23	118.595	111.59	111.62	108.47	102.852
2	29	1233.59	1174.99	1174.99	1155.54	1119.03
2	31	2678.78	2562.56	2562.56	2527.29	2459.72
2	37	27257.9	26394.6	26394.6	26189.0	25769.0
2	41	127818.0	124631.8	124632.0	123975.0	122573.0
3	5	0.4390	0.3954	0.4627	0.4290	0.3588
3	7	2.5965	2.3727	2.6375	2.5153	2.1761
3	11	68.8594	65.3828	67.9327	66.5768	61.2623
3	13	334.0818	321.7401	328.3847	323.9983	304.6922
3	17	7527.32	7373.2	7406.35	7361.44	7126.79
3	19	35417.8	34923.4	34923.5	34780.7	33984.0
3	23	782967.0	775632.3	775632.0	774198.0	765317.0
3	29	8.26090×10^7	8.22546×10^7	8.22546×10^7	8.22093×10^7	8.18963×10^7
5	7	372.8365	360.5020	371.2959	365.7406	344.1342
5	11	190741	188714.5	189523.0	188916.0	185796
5	13	4258211.0	4232268.5	4239577.0	4233400.0	4198577.0
5	17	2.17992×10^9	2.17662×10^9	2.17662×10^9	2.17599×10^9	2.17195×10^9
5	19	5.01176×10^{10}	5.00769×10^{10}	5.00769×10^{10}	5.00707×10^{10}	5.00281×10^{10}
7	11	4.74231×10^8	4.73384×10^8	4.73384×10^8	4.73188×10^8	4.71882×10^8
7	13	5.23208×10^{10}	5.22833×10^{10}	5.22833×10^{10}	5.22771×10^{10}	5.22318×10^{10}
7	17	6.74758×10^{14}	6.74698×10^{14}	6.74698×10^{14}	6.74692×10^{14}	6.74641×10^{14}
7	19	7.83405×10^{16}	7.83383×10^{16}	7.83383×10^{16}	7.83381×10^{16}	7.83364×10^{16}

5 总结与讨论

本文以可卷型 L_2 - 偏差为准则, 证明了在平均均匀性意义下, 水平越高的设计将具有越好的均匀性, 这也说明了由好格子点法构造均匀设计的合理性; 进而, 针对特殊的参数, 证明了当设计的试验次数为奇素数时, 由好格子点法构造的设计是可卷型 L_2 - 偏差下的均匀设计. 而当试验次数是两个素数的乘积时, 由好格子点法构造的设计的均匀性可以改进. 特别地, 通过对原好格子点法构造的设计采用两种特定的变换后, 所得到的新设计将具有更小的可卷型 L_2 - 偏差. 如何针对更为一般的情形给出更为有效的变换, 是值得进一步研究的课题.

致谢 作者非常感谢审稿人提出的修改建议, 这对于本文总体水平的提高以及我们未来的研究工作都很有帮助.

参考文献

- 1 Fang K T. The uniform design: Application of number-theoretic methods in experimental design. *Acta Math Appl Sin*, 1980, 3: 363–372
- 2 Wang Y, Fang K T. A note on uniform distribution and experimental design. *Chinese Sci Bull*, 1981, 26: 485–489
- 3 Fang K T, Liu M Q, Qin H, et al. *Theory and Application of Uniform Experimental Designs*. Lecture Notes in Statistics, vol. 221. Beijing: Science Press; Singapore: Springer, 2018
- 4 Fang K T, Wang Y. *Number-Theoretic Methods in Statistics*. London: Chapman and Hall, 1994
- 5 Fang K T, Shiu C X, Pan J X. Uniform designs based on Latin squares. *Statist Sinica*, 1999, 9: 905–912
- 6 Hickernell F J. A generalized discrepancy and quadrature error bound. *Math Comp*, 1998, 67: 299–322
- 7 Hickernell F J. Lattice rules: How well do they measure up? In: *Random and Quasi-Random Point Sets*. Lecture Notes in Statistics, vol. 138. New York: Springer, 1998, 109–166
- 8 Winker P, Fang K T. Optimal U -type design. In: *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods*. New York: Springer, 1998, 436–448
- 9 Fang K T, Ma C X. Wrap-around L_2 -discrepancy of random sampling, Latin hypercube and uniform designs. *J Complexity*, 2001, 17: 608–624
- 10 Fang K T, Ma C X, Winker P. Centered L_2 -discrepancy of random sampling and Latin hypercube design, and construction of uniform designs. *Math Comp*, 2002, 71: 275–296
- 11 Fang K T, Lu X, Winker P. Lower bounds for centered and wrap-around L_2 -discrepancies and construction of uniform designs by threshold accepting. *J Complexity*, 2003, 19: 692–711
- 12 Fang K T, Ge G N, Liu M Q. Uniform supersaturated design and its construction. *Sci China Ser A*, 2002, 45: 1080–1088
- 13 Fang K T, Ge G N, Liu M Q, et al. Construction of uniform designs via super-simple resolvable t -designs. *Utilitas Math*, 2004, 66: 15–32
- 14 Fang K T, Lu X, Tang Y, et al. Constructions of uniform designs by using resolvable packings and coverings. *Discrete Math*, 2004, 274: 25–40
- 15 Fang K T, Tang Y, Yin J X. Lower bounds for wrap-around L_2 -discrepancy and constructions of symmetrical uniform designs. *J Complexity*, 2005, 21: 757–771
- 16 Fang K T, Maringer D, Tang Y, et al. Lower bounds and stochastic optimization algorithms for uniform designs with three or four levels. *Math Comp*, 2006, 75: 859–878
- 17 MaKay M D, Beckman R J, Conover W J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 1979, 21: 239–245
- 18 Fang K T, Hickernell F J. The uniform design and its applications. In: *Bulletin of the International Statistical Institute*, 50th Session. Beijing, 1995, 333–349
- 19 Fang K T. *Some Applications of Quasi-Monte Carlo Methods in Statistics*. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2000. Berlin: Springer-Verlag, 2000
- 20 Warnock T T. Computational investigations of low discrepancy point sets. In: *Applications of Number Theory to Numerical Analysis*. New York: Academic Press, 1972, 319–343
- 21 Tang Y, Xu H, Lin D K J. Uniform fractional factorial designs. *Ann Statist*, 2012, 40: 891–907
- 22 Tang Y. *Combinatorial properties of uniform designs and their applications in the constructions of low-discrepancy designs*. PhD Thesis. Hong Kong: Hong Kong Baptist University, 2005

Further research on the good lattice point design

E Chen & Yu Tang

Abstract As an effective number theoretic method, good lattice point designs were often used to construct the uniform design. However, for a long time, properties of uniformity for good lattice point designs have not been fully investigated. In this paper, we employ wrap-around L_2 -discrepancy as a criterion, reanalyze properties of good lattice point designs, modify the construction method, and finally obtain a series of low-discrepancy designs for specific parameters.

Keywords good lattice point, uniform design, Latin hypercube design, wrap-around L_2 -discrepancy

MSC(2010) 62K15, 62K10

doi: 10.1360/N012019-00091