



论 文

应用力学中的辛数学方法专题

轨道预报的一种乘法保辛摄动方法

吴志刚^{①②*}, 杨今朝^{①②}, 彭海军^{①③}, 张朔^{①②}

① 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024;

② 大连理工大学航空航天学院, 大连 116024;

③ 大连理工大学工程力学系, 大连 116024

* E-mail: wuzhg@dlut.edu.cn

收稿日期: 2016-05-30; 接受日期: 2016-08-31; 网络出版日期: 2016-11-24

国家自然科学基金(批准号: 11372056, 11432010)资助项目

摘要 为了准确预报人造卫星的轨道, 需要考虑复杂的动力学模型, 并使用数值方法进行求解。虽然 Runge-Kutta 法和 Adams-Cowell 法等数值积分方法在轨道预报中已经取得了预期的效果, 但是一般不考虑保辛, 忽视了系统的固有特性。本文提出适用于轨道预报的乘法保辛摄动方法, 将描述卫星运动的 Hamilton 正则方程分解为二体问题和摄动部分。二体问题采用解析解, 摄动部分用区段矩阵近似求解。由于二体问题的状态转移矩阵必然为辛矩阵, 故此过程保辛。本文考虑的摄动因素有地球非球形引力、日月引力、太阳光压和潮汐摄动, 选取 GPS 卫星做数值仿真, 以 GPS 卫星精密星历为参照得到轨道预报误差, 并与 Runge-Kutta 法和 Adams-Cowell 法进行对比。结果表明: 对 PRN01 号 GPS 卫星和 PRN02 号 GPS 卫星进行 3 d 的轨道预报, 本文算法的误差分别为 4.56 和 10.10 m, 精度与 Runge-Kutta 法和 Adams-Cowell 法一致, 而 Runge-Kutta 法与 Adams-Cowell 法的计算耗时分别是本文算法的 237.7% 与 71.3%, 因此本文算法效率明显高于 Runge-Kutta 法, 但比 Adams-Cowell 法稍低。

关键词 保辛, 乘法摄动, 轨道预报, 受摄二体问题, GPS 卫星

1 引言

准确预报卫星轨道对于完成预定飞行任务具有重要意义。卫星在运行过程中受到多种外力作用, 为了准确预报卫星轨道, 需要考虑复杂的动力学模型, 导致描述卫星运动的微分方程非常复杂, 必须使用数值方法求解。

目前, 轨道预报中较为常用的有 Runge-Kutta 法

和 Adams-Cowell 法等数值积分方法^[1~4]。这些数值方法是通用算法, 用于轨道预报较为简便, 并且在轨道预报中取得了预期的效果, 但是一般不考虑保辛, 忽视了系统的固有特性。耗散可忽略不计的物理过程都可表示成 Hamilton 系统的形式, Hamilton 系统具有保持辛结构不变的重要特性。由于保辛算法可以保持辛结构, 因此在计算力学问题的研究中取得了很好的效果。钟万勰院士利用保辛算法研究了 Duffing

引用格式: 吴志刚, 杨今朝, 彭海军, 等. 轨道预报的一种乘法保辛摄动方法. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 1232~1241
Wu Z G, Yang J Z, Peng H J, et al. A multiplicative perturbation method for satellite orbit prediction based on symplectic property (in Chinese). Sci Sin Tech, 2016, 46: 1232~1241, doi: 10.1360/N092016-00204

方程^[5]、两点边值问题^[6]、受约束系统^[7]等, 获得了高精度的数值解, 同时大幅提高了其中一些问题的计算效率. Van de Vyver^[8]推导了辛 RKN 方法, 并验证了其长期积分的稳定性; Bradley 等人^[9]利用保辛的 BLC-IRK 法计算了 Jacobi 常数, 发现长时间计算仍不会发散. Surovik 和 Scheeres^[10]在计算空间碎片的轨道时, 发现保辛算法在效率方面要比不保辛的 Bulirsch-Stoer 法有明显优势. Hubaux 等人^[11]利用保辛算法计算空间碎片的运动, 在大积分步长的情况下依然得到准确的结果. 目前, 将保辛算法应用于轨道计算时, 往往侧重于算法本身精度与效率的研究, 而所采用的动力学模型相对简单, 因此对于轨道的准确预报有待进一步研究.

本文提出适用于轨道预报的乘法保辛摄动方法, 将描述卫星运动的 Hamilton 正则方程分解为二体问题和摄动部分, 对于二体问题采用解析解, 再通过变换得到摄动部分, 因摄动部分已是相对小量, 故可应用区段矩阵对摄动部分近似求解, 最终得到原问题的解. 由于二体问题的状态转移矩阵必然为辛矩阵, 且摄动部分的求解过程也可看作是保辛的, 故此过程为保辛摄动过程. 本文考虑的摄动因素有地球非球形引力、日月引力、太阳光压和潮汐摄动, 选取 GPS 卫星中的 PRN01 号卫星和 PRN02 号卫星做数值仿真, 以 GPS 卫星精密星历数据为参照得到轨道预报误差, 通过与 Runge-Kutta 法和 Adams-Cowell 法作对比, 验证了本文算法的有效性.

2 轨道预报模型与方法

2.1 时间系统与坐标系统

卫星轨道预报中, 计算不同的物理量需要使用不同的时间系统, 常用的时间系统有地球动力学时、协调世界时等. 各个时间系统之间在时间起点或单位时间间隔上存在差异. 与此同时, 也要用到多种坐标系, 主要涉及到地心天球坐标系、地固坐标系等, 数值积分时可以选择地心天球坐标系, 而地球非球形引力加速度是在地固坐标系中表示的. 关于时间系统与坐标系统, 文献[12~14]有详细介绍.

2.2 动力学模型

卫星在围绕地球运行过程中会受到多种外力的作用, 总体而言, 其动力学模型可归结为受摄二体问

题, 相应的运动微分方程可写为

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_e, \quad (1)$$

其中, \mathbf{F}_0 为地球中心引力加速度, \mathbf{F}_e 为各种摄动加速度之和, 并且 \mathbf{F}_e 远小于 \mathbf{F}_0 . 结合文献[15]对 GPS 卫星所受各种摄动加速度量级的分析, 本文考虑的摄动因素为地球非球形引力、日月引力、太阳光压和潮汐摄动.

中心引力加速度 \mathbf{F}_0 为

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2)$$

式中, $\mu = GM_E$, G 是万有引力常数, M_E 是地球质量; $r = \|\mathbf{r}\|$, $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ 是卫星在惯性系中的位置矢量.

地球非球形引力加速度 $\mathbf{F}_{\text{non-sph}}$: 由于地球不是标准的球体, 并且密度也不均匀, 因此不能简单地将地球作为质点来考虑其对卫星的引力. 卫星会受到地球非球形部分产生的摄动力. 地球非球形引力加速度公式^[13]是在地固坐标系中给出的, 形式较为复杂, 需要用到地球引力场模型, 且还会涉及到地固坐标系和空固坐标系之间的相互转换.

日月引力加速度 $\mathbf{F}_{s,m}$: 除地球外, 太阳、月球和太阳系内其他行星也会影响卫星的运动. 但与太阳和月球相比, 其他行星的影响可忽略不计. 卫星的日月引力加速度为

$$\mathbf{F}_{s,m} = -\sum_{j=s,m} GM_j \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_j^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right), \quad (3)$$

式中, M_s 和 M_m 分别为太阳质量和月球质量; $r_j = \|\mathbf{r}_j\|$; $\Delta_j = \mathbf{r} - \mathbf{r}_j$; \mathbf{r}_s 和 \mathbf{r}_m 分别为日心和月心相对地心在惯性系中的位置矢量. 对于日月位置的高精度计算, 可采用加州理工学院喷气推进实验室(JPL)公布的 DE405 星历.

太阳光压加速度 \mathbf{F}_{srp} : 由太阳辐射与卫星表面相互作用而产生, 与有效面质比、表面材料等有关:

$$\mathbf{F}_{\text{srp}} = P_s (\text{AU}/\Delta_s)^2 C_R \frac{A}{m} \frac{\Delta_s}{\Delta_s^3}, \quad (4)$$

式中, P_s 为地球附近太阳光压强度常数, $P_s \approx 4.56 \times 10^{-6}$ N m⁻²; AU 为天文单位; $\Delta_s = \|\Delta_s\|$, $\Delta_s = \mathbf{r} - \mathbf{r}_s$; C_R 为光压系数; A/m 是卫星的有效面质比. 在计算太阳光压加速度时, 还需考虑地影的影响^[14].

潮汐摄动加速度 \mathbf{F}_{tide} : 地球受日月引力作用会产生弹性形变, 这种形变使得地球内部物质发生小的变化, 随之导致引力位函数产生小的形变位差, 也就是潮汐位. 卫星运动的地球固体潮摄动就是潮汐位

效应的结果, 其加速度为

$$\mathbf{F}_{\text{tide}} = \frac{k_2}{2} \sum_{j=s,m} \frac{GM_j}{r_j^3} \frac{R_E^5}{r^4} \left\{ 3 - 15 \left(\frac{\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}}{r_j \cdot r} \right)^2 \right\} \frac{\mathbf{r}}{r} + 6 \left(\frac{\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}}{r_j \cdot r} \right) \frac{\mathbf{r}_j}{r_j}, \quad (5)$$

式中, $k_2=0.3$ 为二阶 Love 数; R_E 为地球赤道半径.

上述各个摄动力均有其对应的势函数^[11~14]. 其中, 太阳光压较为特殊, 因为对其计算时需要考虑地影, 文献[11]在使用保辛算法计算空间碎片的轨道时, 也考虑了太阳光压, 并且取得了比较好的结果. 因此, 本文也将太阳光压考虑在内.

2.3 精密定轨

为了准确预报卫星轨道, 首先要有比较准确的初始值, 故需要对卫星进行精密定轨^[12~14]. 精密定轨的实质是利用观测数据, 结合动力学模型获得卫星状态量的最佳估计值. 状态量在包括卫星位置矢量 \mathbf{r} 和速度矢量 \mathbf{v} 的同时, 还可以包含动力学模型中的一些参数, 例如面质比、太阳光压系数等.

在精密定轨中, 由于计算状态转移矩阵时会涉及到求加速度的偏导数, 因此需要考虑动力学模型. 但状态转移矩阵的作用仅是提供迭代过程中获取改正量的系数, 且此系数只影响迭代收敛速度, 一般不影响收敛结果的精度^[14], 故计算状态转移矩阵时可对动力学模型进行适当简化, 这样可以提高定轨过程的计算效率.

2.4 引力加速度估计函数

引力加速度估计函数^[16,17]的原理是找到一点, 使卫星受到的瞬时中心引力和非球形引力之和等于以该点为中心的瞬时中心引力, 这一点称为伪中心. 使用此方法时, 需要将地球表面按照固定的经纬度间隔划分成网格, 在网格点上方一定的轨道高度范围内, 用多项式函数拟合某些高度所对应的伪中心位置, 并将得到的拟合系数保存, 供轨道预报时使用. 此方法可极大地减少轨道预报时的计算量, 提高计算效率, 但需要提前计算相关节点的伪中心以及拟合系数.

3 乘法保辛摄动方法

轨道预报时, 本文采用乘法摄动^[18,19], 其主要思想是将复杂的非线性问题分解为主要部分和摄动部

分, 先处理主要部分, 然后再处理摄动部分. 之所以选择乘法摄动, 是因为卫星的运动为受摄二体问题, 因而可按乘法摄动的思想分解, 主要部分即为二体问题, 而二体问题又存在解析解, 所以对主要部分处理时会非常方便, 这也可体现出轨道预报时采用乘法摄动的优越性.

3.1 二体问题和摄动部分的分解

乘法摄动需要在 Hamilton 体系下表述, Hamilton 正则方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

卫星的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} + V_\varepsilon(\mathbf{r}), \quad (7)$$

式中, $v=\|\mathbf{v}\|$, $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)^T$ 是卫星在惯性系中的速度矢量. 等式右端前两项为二体问题对应的 Hamilton 函数, $V_\varepsilon(\mathbf{r})$ 为摄动部分的势能.

参照式(6), 卫星的运动微分方程可写为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\partial V_\varepsilon(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

初始条件为

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (9)$$

由于本文考虑的均为有势力, 因此:

$$\mathbf{F}_\varepsilon(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V_\varepsilon(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (10)$$

于是, 式(8)可分解为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_\varepsilon \end{bmatrix}. \quad (11)$$

式(11)可写为如下形式:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{h}_a(\mathbf{u}) + \mathbf{h}_l(\mathbf{u}), \quad (12)$$

式中,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_a(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{h}_l(\mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_\varepsilon(\mathbf{u}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

式中, \mathbf{u} 为卫星的状态量, $\mathbf{h}_a(\mathbf{u})$ 对应于二体问题, $\mathbf{h}_1(\mathbf{u})$ 对于摄动部分, 相应的初始条件可写为

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (14)$$

3.2 乘法摄动

对于作为主要部分的二体问题:

$$\dot{\mathbf{u}}_a = \mathbf{h}_a(\mathbf{u}_a), \mathbf{u}_a(0) = \mathbf{u}_0. \quad (15)$$

其解析解^[12]可记为

$$\mathbf{u}_a(t) = \mathbf{s}(\mathbf{u}_0, t). \quad (16a)$$

或者,

$$\mathbf{u}_a(t) = \mathbf{T}(\mathbf{u}_0, t)\mathbf{u}_0, \quad (16b)$$

式中,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} F\mathbf{I} & G\mathbf{I} \\ F'\mathbf{I} & G'\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$F = 1 - \frac{a}{r_0}(1 - \cos \Delta E), \quad (18)$$

$$G = \frac{1}{n}[(n\Delta t - \Delta E) + \sin \Delta E],$$

式中, \mathbf{I} 是单位矩阵, $\Delta t = t - t_0$, a 为轨道半长轴, ΔE 为 Δt 间隔内的偏近点角改变量, n 为平均角速度.

$$a = \frac{r_0 \mu}{2\mu - r_0 v_0^2}, \quad (19)$$

$$\Delta E = n\Delta t + \left(1 - \frac{r_0}{a}\right) \sin \Delta E - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{\sqrt{\mu a}} (1 - \cos \Delta E), \quad (20)$$

$$n = \sqrt{\mu a^{-3}}, \quad (21)$$

式中, $r_0 = \|\mathbf{r}_0\|$, $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$. 对 ΔE 可采用牛顿迭代求解.

当得到 F, G 后, 由

$$\mathbf{r} = Fr_0 + G\mathbf{v}_0, \quad (22)$$

可得到 \mathbf{r} . 进而:

$$F' = -\frac{1}{r} \left(\frac{\sqrt{\mu a}}{r_0} \sin \Delta E \right), \quad (23)$$

$$G' = 1 - \frac{a}{r}(1 - \cos \Delta E).$$

当得到 $\mathbf{T}(\mathbf{u}_0, t)$ 后, $\mathbf{s}(\mathbf{u}_0, t)$ 也可得到:

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_0, t) = \mathbf{T}(\mathbf{u}_0, t)\mathbf{u}_0. \quad (24)$$

将式(16a)代入式(15)可得:

$$\mathbf{s}_t(\mathbf{u}_0, t) = \mathbf{h}_a(\mathbf{s}(\mathbf{u}_0, t)). \quad (25)$$

由于摄动部分 $\mathbf{h}_1(\mathbf{u})$ 非常小, 因此, 可以采用乘法变换将式(16a)写为

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{s}(\mathbf{u}_e, t). \quad (26a)$$

同时, 式(16b)可写为

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}(\mathbf{u}_e, t)\mathbf{u}_e. \quad (26b)$$

将式(26a)对时间 t 求导, 可得:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{S}_a \dot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{s}_t(\mathbf{u}_e, t), \quad (27)$$

式中, $\mathbf{S}_a = \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{u}_e$, 是二体问题的状态转移矩阵^[20], 并且是辛矩阵^[13], 满足:

$$\mathbf{S}_a^T \mathbf{J} \mathbf{S}_a = \mathbf{J}, \quad (28)$$

式中, \mathbf{J} 是反对称矩阵.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

由式(25)可知:

$$\mathbf{s}_t(\mathbf{u}_e, t) = \mathbf{h}_a(\mathbf{s}(\mathbf{u}_e, t)). \quad (30)$$

将式(26a), (27), (28)和(30)代入式(12), 可得:

$$\dot{\mathbf{u}}_e = -\mathbf{J} \mathbf{S}_a^T \mathbf{J} \mathbf{h}_1(\mathbf{s}(\mathbf{u}_e, t)). \quad (31)$$

由式(14), (15), (16a)和(26a)可知式(31)的初始条件为

$$\mathbf{u}_e(0) = \mathbf{u}_0. \quad (32)$$

根据式(26b), 式(31)又可写为

$$\dot{\mathbf{u}}_e = \mathbf{H}_e \mathbf{u}_e, \mathbf{H}_e = -\mathbf{J} \mathbf{S}_a^T \mathbf{J} \mathbf{H}_1(\mathbf{u}) \mathbf{T}(\mathbf{u}_e, t), \quad (33)$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{\varepsilon,x}/x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{\varepsilon,y}/y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{\varepsilon,z}/z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

式中, $F_{\varepsilon,x}, F_{\varepsilon,y}, F_{\varepsilon,z}$ 分别为摄动加速度 \mathbf{F}_{ε} 在 X, Y, Z 轴方向上的分量, x, y, z 分别为卫星的坐标.

3.3 摆动部分的近似求解

揆动部分量级很小, 式(33)中的 \mathbf{H}_e 近似为 Hamilton 矩阵, 但为了计算更加精确, 将其记作更一般的分块矩阵的形式:

$$\mathbf{H}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

此时, 待求状态量由原先的 \mathbf{u} , 通过式(26a)的关系, 转换到了状态量 \mathbf{u}_e , 但式(33)仍是非线性微分方程. 由于揆动部分已是相对小量, 因此可以近似求解.

将时间按积分步长 h 进行离散, 考虑积分区段 (t_k, t_{k+1}) , 首先取 t_{k+1} 之前 $n+1$ 个时刻所对应的状态量 $\mathbf{u}(t_{k-n}), \mathbf{u}(t_{k-n+1})$ 直到 $\mathbf{u}(t_k)$, 由 Lagrange 插值计算得到 $\mathbf{u}(t_{k+1/2})$ 的近似值 $\mathbf{u}'(t_{k+1/2})$, 以及 $\mathbf{u}(t_{k+1})$ 的近似值 $\mathbf{u}'(t_{k+1})$. 本文插值计算时, 取 $n=8$. 因含有摄动项 \mathbf{h}_1 , 故 $\dot{\mathbf{u}}_e$ 很小, 在一个积分区段内, $\mathbf{u}_e(t)$ 接近常数向量 $\mathbf{u}(t_k)$, 因此 $\mathbf{u}_e(t_{k+1/2})$ 和 $\mathbf{u}_e(t_{k+1})$ 的近似值可取为 $\mathbf{u}(t_k)$. 将

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t_{k+1/2}) &\approx \mathbf{u}'(t_{k+1/2}), \mathbf{u}(t_{k+1}) \approx \mathbf{u}'(t_{k+1}), \\ \mathbf{u}_e(t_{k+1/2}) &\approx \mathbf{u}(t_k), \mathbf{u}_e(t_{k+1}) \approx \mathbf{u}(t_k),\end{aligned}\quad (36)$$

代入式(33), 可求出 $\mathbf{H}_e(t_{k+1/2})$ 的近似值 $\mathbf{H}'_e(t_{k+1/2})$, 以及 $\mathbf{H}_e(t_{k+1})$ 的近似值 $\mathbf{H}'_e(t_{k+1})$. 对于 $\mathbf{H}_e(t_k)$ 的近似值 $\mathbf{H}'_e(t_k)$ 可取为前一个积分区段 (t_{k-1}, t_k) 中的 $\mathbf{H}'_e(t_k)$, 这样取可明显减少计算量, 同时又由于两者十分接近, 因此引入的误差几乎可忽略. 而对于第一个积分区段 (t_0, t_1) , 需要将 $\mathbf{u}(t_0)$ 代入式(33)计算得到 $\mathbf{H}_e(t_0)$.

在积分区段 (t_k, t_{k+1}) 上, 令 $0 \leq \tau \leq h$, 利用 $\mathbf{H}'_e(t_k)$, $\mathbf{H}'_e(t_{k+1/2})$, $\mathbf{H}'_e(t_{k+1})$, 对矩阵 \mathbf{H}_e 中的 $\mathbf{A}(\tau)$, $\mathbf{B}(\tau)$, $\mathbf{C}(\tau)$, $\mathbf{D}(\tau)$ 进行二次插值:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_1 &= -\mathbf{D}_0, \\ \boldsymbol{\gamma}_2 &= (-\mathbf{D}_1 + \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{C}_0)/2, \\ \boldsymbol{\gamma}_3 &= (-\mathbf{D}_2 + \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\gamma}_2 + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2 \mathbf{C}_0 - \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{C}_1 + \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\gamma}_1)/3, \\ \boldsymbol{\gamma}_4 &= (\mathbf{A}_0 \boldsymbol{\gamma}_3 + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\gamma}_2 + \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_3 \mathbf{C}_0 - \boldsymbol{\gamma}_2 \mathbf{C}_1 - \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{C}_2 + \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\gamma}_2 + \boldsymbol{\gamma}_2 \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\gamma}_1)/4,\end{aligned}\quad (41)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}_1 &= \mathbf{A}_0, \\ \boldsymbol{\phi}_2 &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\phi}_1 + \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{B}_0)/2, \\ \boldsymbol{\phi}_3 &= (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\phi}_2 + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\phi}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2 \mathbf{B}_0 + \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\phi}_1)/3, \\ \boldsymbol{\phi}_4 &= (\mathbf{A}_0 \boldsymbol{\phi}_3 + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\phi}_2 + \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\phi}_1 + \boldsymbol{\gamma}_3 \mathbf{B}_0 + \boldsymbol{\gamma}_2 \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{B}_2 + \boldsymbol{\gamma}_2 \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\phi}_1 + \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\phi}_1 + \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\phi}_2)/4,\end{aligned}\quad (42)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1 &= -\mathbf{C}_0, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 &= (-\mathbf{C}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{C}_0 + \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\gamma}_1)/2, \\ \boldsymbol{\alpha}_3 &= (-\mathbf{C}_2 + \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\gamma}_2 + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{C}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{C}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\gamma}_1)/3, \\ \boldsymbol{\alpha}_4 &= (\mathbf{B}_0 \boldsymbol{\gamma}_3 + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\gamma}_2 + \mathbf{B}_2 \boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{C}_2 - \boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{C}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3 \mathbf{C}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\gamma}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\gamma}_1)/4,\end{aligned}\quad (43)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_1 &= -\mathbf{B}_0, \\ \boldsymbol{\theta}_2 &= -(\mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\phi}_1)/2, \\ \boldsymbol{\theta}_3 &= -(\mathbf{B}_2 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{B}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\phi}_2 + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\phi}_1 + \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\phi}_1)/3, \\ \boldsymbol{\theta}_4 &= -(\boldsymbol{\alpha}_3 \mathbf{B}_0 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\phi}_3 + \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\phi}_2 + \mathbf{B}_2 \boldsymbol{\phi}_1 + \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\phi}_2 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\phi}_1 + \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\phi}_1)/4.\end{aligned}\quad (44)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\tau) &\approx \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \tau + \mathbf{A}_2 \tau^2, \quad \mathbf{B}(\tau) \approx \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \tau + \mathbf{B}_2 \tau^2, \\ \mathbf{C}(\tau) &\approx \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \tau + \mathbf{C}_2 \tau^2, \quad \mathbf{D}(\tau) \approx \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1 \tau + \mathbf{D}_2 \tau^2.\end{aligned}\quad (37)$$

区段矩阵 $\mathbf{G}, \mathbf{F}, \mathbf{E}, \mathbf{Q}$ 在 $\tau=h$ 时满足微分方程^[18]:

$$\begin{aligned}\partial \mathbf{G} / \partial \tau &= \mathbf{AG} + \mathbf{GBG} - \mathbf{D} - \mathbf{GC}, \\ \partial \mathbf{F} / \partial \tau &= (\mathbf{GB} + \mathbf{A})\mathbf{F}, \\ \partial \mathbf{E} / \partial \tau &= \mathbf{E}(\mathbf{BG} - \mathbf{C}), \\ \partial \mathbf{Q} / \partial \tau &= -\mathbf{EBF}.\end{aligned}\quad (38)$$

初始条件为

$$\mathbf{G}(0)=\mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}(0)=\mathbf{0}, \quad \mathbf{E}(0)=\mathbf{I}, \quad \mathbf{F}(0)=\mathbf{I}. \quad (39)$$

式(38)是变系数联立微分方程组, 可用泰勒级数展开求解. 将区段矩阵泰勒展开, 并忽略高阶项:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\tau) &\approx \boldsymbol{\gamma}_1 \tau + \boldsymbol{\gamma}_2 \tau^2 + \boldsymbol{\gamma}_3 \tau^3 + \boldsymbol{\gamma}_4 \tau^4, \\ \mathbf{F}(\tau) &\approx \mathbf{I} + \boldsymbol{\phi}_1 \tau + \boldsymbol{\phi}_2 \tau^2 + \boldsymbol{\phi}_3 \tau^3 + \boldsymbol{\phi}_4 \tau^4, \\ \mathbf{E}(\tau) &\approx \mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha}_1 \tau + \boldsymbol{\alpha}_2 \tau^2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \tau^3 + \boldsymbol{\alpha}_4 \tau^4, \\ \mathbf{Q}(\tau) &\approx \boldsymbol{\theta}_1 \tau + \boldsymbol{\theta}_2 \tau^2 + \boldsymbol{\theta}_3 \tau^3 + \boldsymbol{\theta}_4 \tau^4,\end{aligned}\quad (40)$$

式中, 矩阵 $\boldsymbol{\gamma}_i, \boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\theta}_i, i=1 \sim 4$, 为泰勒展开系数矩阵. 将式(37)和(40)代入式(38), 依次对区段矩阵 $\mathbf{G}, \mathbf{F}, \mathbf{E}, \mathbf{Q}$ 进行计算, 通过比较 τ 的各阶幂次, 可以得到以下各式:

得到 (t_k, t_{k+1}) 上的区段矩阵后, 已知 $\mathbf{u}_e(t_k) = \mathbf{u}(t_k)$, 要求 $\mathbf{u}_e(t_{k+1})$, 由关系式^[18]:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{k+1} &= \mathbf{F}\mathbf{q}_k - \mathbf{G}\mathbf{p}_{k+1}, \\ \mathbf{p}_k &= \mathbf{Q}\mathbf{q}_k + \mathbf{E}\mathbf{p}_{k+1}.\end{aligned}\quad (45)$$

可求解出:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{k+1} &= (\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Q})\mathbf{q}_k - \mathbf{G}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{p}_k, \\ \mathbf{p}_{k+1} &= -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{q}_k + \mathbf{E}^{-1}\mathbf{p}_k,\end{aligned}\quad (46)$$

式中, \mathbf{q}_k 和 \mathbf{p}_k 分别表示 t_k 时刻的位移和动量, \mathbf{q}_{k+1} 和 \mathbf{p}_{k+1} 分别表示 t_{k+1} 时刻的位移和动量. 因此:

$$\mathbf{u}_e(t_{k+1}) = \mathbf{S}_e \mathbf{u}_e(t_k), \quad (47)$$

式中,

$$\mathbf{S}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Q} & -\mathbf{G}\mathbf{E}^{-1} \\ -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Q} & \mathbf{E}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

3.4 原问题的求解

当求出 $\mathbf{u}_e(t_{k+1})$ 后, 根据式(26a), 有:

$$\mathbf{u}(t_{k+1}) = \mathbf{s}(\mathbf{u}_e(t_{k+1}), t_{k+1}). \quad (49)$$

此时, 完成了积分区段 (t_k, t_{k+1}) 上的积分, 得到了 $\mathbf{u}(t_{k+1})$. 重复此过程, 即可得到所求时间段内各个时间节点上卫星的状态量 \mathbf{u} .

需要说明的是, 采用 Lagrange 插值计算得到近似值 $\mathbf{u}'(t_{k+1/2})$ 和 $\mathbf{u}'(t_{k+1})$, 这相当于是对 $\mathbf{u}(t_{k+1/2})$ 和 $\mathbf{u}(t_{k+1})$ 的预估. 但是, 前 n 个积分区段无法采用 Lagrange 插值计算预估值. 因含有摄动项 \mathbf{h}_1 , 故 $\dot{\mathbf{u}}_e$ 很小, 当 $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ 时:

$$\mathbf{u}_e(t) \approx \mathbf{u}(t_k), \quad (50)$$

因此, 当 $k=0, 1, \dots, n-1$ 时, 由式(26a)和(50)可知, 对近似值 $\mathbf{u}'(t_{k+1/2})$ 和 $\mathbf{u}'(t_{k+1})$ 的计算可以采用:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'(t_{k+1/2}) &= \mathbf{s}(\mathbf{u}(t_k), t_{k+1/2}), \\ \mathbf{u}'(t_{k+1}) &= \mathbf{s}(\mathbf{u}(t_k), t_{k+1}).\end{aligned}\quad (51)$$

除此之外, 对其他量的计算不需改变. 由于二体问题的状态转移矩阵 \mathbf{S}_a 为辛矩阵, 且摄动部分的求解过程也可看作是保辛的, 故此计算过程为保辛摄动过程.

4 仿真算例与结果分析

本文选取 GPS 卫星中的 PRN01 号和 PRN02 号

卫星作为仿真实验对象, 以 GPS 卫星精密星历为参照数据, 初始时刻为 2014 年 4 月 5 日 0 时 0 分 0 秒 (GPST), 数值积分坐标系采用地心天球坐标系 GCRS. 精密定轨时, 待估状态量为卫星的位置矢量 \mathbf{r} 、速度矢量 \mathbf{v} 和面质比 A/m , 利用从初始时刻起 0.5 d 的 GPS 卫星精密星历进行精密定轨, 由最小二乘法得到初始时刻的待估状态量最优估计值. 轨道预报时, 用得到的最优估计值从初始时刻起外推卫星轨道 3.5 d, 并与 GPS 精密星历对比得到计算残差. 其中, 前 0.5 d 的计算残差为轨道拟合误差, 后 3 d 的计算残差为轨道预报误差.

本文精密定轨时, 考虑的摄动因素为地球非球形引力、日月引力和太阳光压, 引力模型取 4×4 阶 EGM96, 使用 12 阶 Adams-Cowell 法, 步长 300 s, 以 8 阶 Runge-Kutta 法起步. 轨道预报时, 考虑的摄动因素有地球非球形引力、日月引力、太阳光压和潮汐摄动, 由于预报时使用了引力加速度估计函数法, 引力场阶次不影响轨道预报的计算时间, 故引力场模型取 70×70 阶 EGM96, 使用本文的乘法保辛摄动方法, 步长 450 s. 在精密定轨与轨道预报中, 日月位置由 JPL 给出的星历表 DE405 计算得到, 地球阴影模型采用柱形模型. 轨道预报中, 使用的引力加速度估计函数法的相关参数见表 1.

与此同时, 利用 8 阶 Runge-Kutta 法和 12 阶 Adams-Cowell 法进行轨道预报, 将本文算法与这两种数值积分方法的结果进行对比. 数值仿真是在 CPU 主频为 3.60 GHz 的个人计算机上完成.

对于 PRN01 号卫星, 本文算法与 8 阶 Runge-Kutta 法的位置误差曲线如图 1 所示. 对于 PRN02 号卫星, 本文算法与 8 阶 Runge-Kutta 法的位置误差曲线如图 2 所示. 对于 PRN01 号卫星, 本文算法与 12 阶 Adams-Cowell 法的位置误差曲线如图 3 所示. 对于 PRN02 号卫星, 本文算法与 12 阶 Adams-Cowell 法的位置误差曲线如图 4 所示. 其中, 位置误差由计算结果与精密星历作差得到, 总的位置误差即位置误差矢量的模.

表 1 本文使用引力加速度估计函数的参数

	范围	间隔
经度	180°W~180°E	1.5°
纬度	60°N~60°S	0.75°
半径	$2.6 \times 10^4 \sim 2.7 \times 10^4$ km	100 km

通过多次计算发现: 对于 8 阶 Runge-Kutta 法, 当积分步长小于 900 s 时, 即使再减小步长, 也不会提高预报精度, 但会增加计算时间, 因此步长选为 900 s; 而对于本文算法和 12 阶 Adams-Cowell 法, 在兼顾计算效率与预报精度的情况下, 步长分别选为 450 和 300 s. 由于 GPS 卫星精密星历数据的时间间隔

隔为 900 s, 因此将步长选为这些值也便于将数值计算结果与精密星历数据对比.

在轨道外推 3.5 d 时, 对于 PRN01 号和 PRN02 号卫星, 由图 1 和 2 中的各图可知, 本文算法与 8 阶 Runge-Kutta 法的位置误差曲线吻合得比较好; 由图 3 和 4 中的各图可知, 本文算法与 12 阶 Adams-Cowell

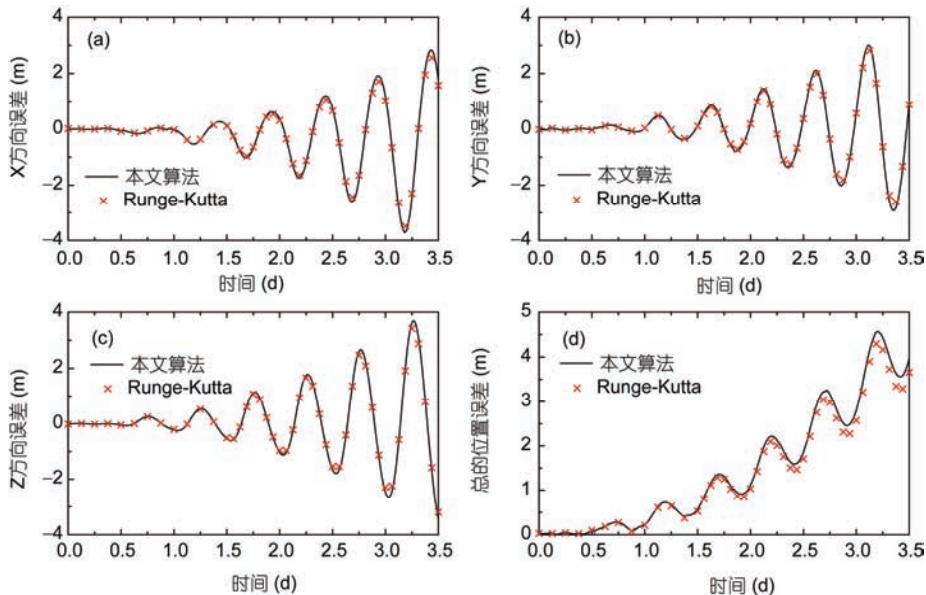


图 1 (网络版彩图)PRN01 号卫星本文算法和 8 阶 Runge-Kutta 法的位置误差曲线

(a) X 方向误差; (b) Y 方向误差; (c) Z 方向误差; (d) 总的位置误差

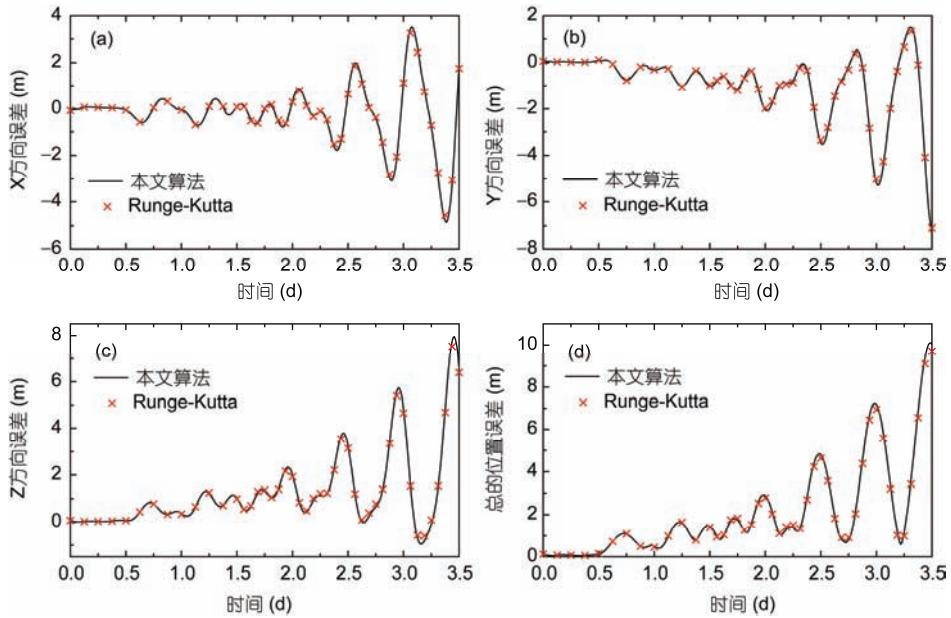


图 2 (网络版彩图)PRN02 号卫星本文算法和 8 阶 Runge-Kutta 法的位置误差曲线

(a) X 方向误差; (b) Y 方向误差; (c) Z 方向误差; (d) 总的位置误差

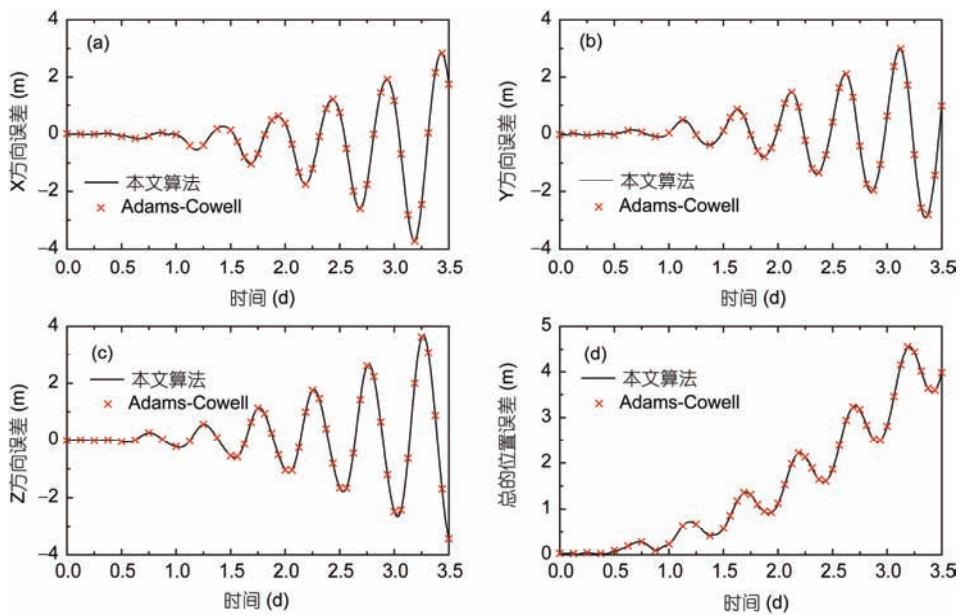


图 3 (网络版彩图)PRN01 号卫星本文算法和 12 阶 Adams-Cowell 法的位置误差曲线

(a) X 方向误差; (b) Y 方向误差; (c) Z 方向误差; (d) 总的位置误差

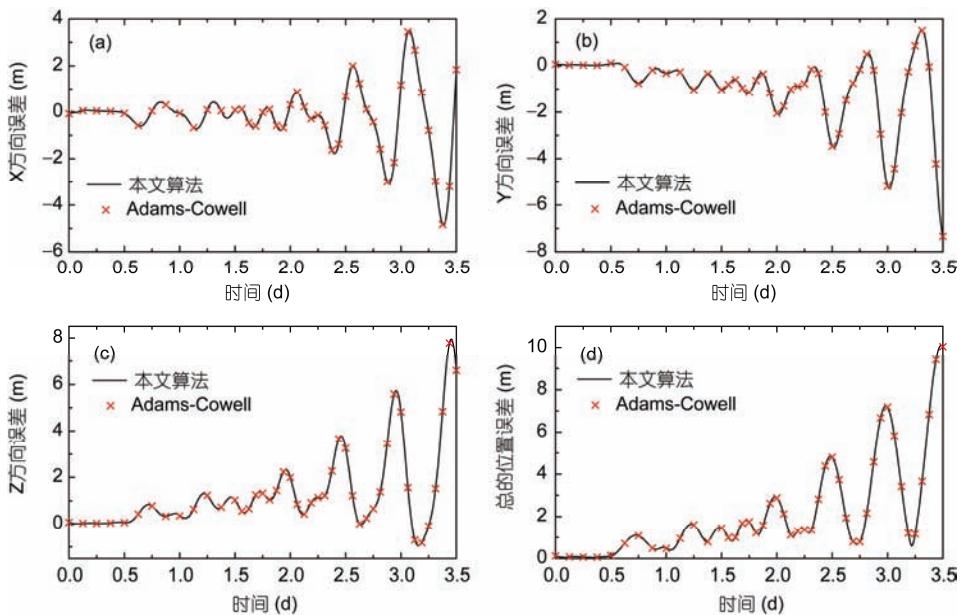


图 4 (网络版彩图)PRN02 号卫星本文算法和 12 阶 Adams-Cowell 法的位置误差曲线

(a) X 方向误差; (b) Y 方向误差; (c) Z 方向误差; (d) 总的位置误差

法的位置误差曲线吻合得也比较好。这验证了本文算法的有效性。

由图 1(d)和 3(d)可知: 对于 PRN01 号卫星, 预报 3 d, 本文算法的位置误差在 5 m 以内; 由图 2(d)和

4(d)可知: 对于 PRN02 号卫星, 预报 3 d, 本文算法的位置误差在 11 m 以内。这说明本文采用的动力学模型和算法可以比较准确地对卫星轨道进行短期预报。由图 1~4 可知: 前 0.5 d 的拟合误差非常小, 说明定轨

的精度很高。后 3 d 的轨道预报误差都是随时间不断增加, 这是由于本文的位置误差是由计算结果与精密星历对比得到, 精密星历的精度在厘米级, 可近似认为是卫星的真实位置, 因此误差中包含模型误差, 这是无法避免的, 除此之外还有算法本身存在的误差。由于 3 种算法所得到的位置误差曲线吻合得比较好, 因此本文认为所得误差中模型误差为主要部分, 算法误差为次要部分。

轨道外推 3.5 d 时, 本文使用的乘法保辛摄动方法, 8 阶 Runge-Kutta 法和 12 阶 Adams-Cowell 法的轨道预报最大误差见表 2, 计算效率见表 3。由表 2 可知: 轨道外推 3.5 d, 对于 PRN01 号和 PRN02 号卫星, 本文算法与 Runge-Kutta 法和 Adams-Cowell 法相差均在 0.32 m 以内, 考虑到这两颗卫星的轨道半长轴大约为 26560 km, 因此可认为本文算法与 Runge-Kutta 法和 Adams-Cowell 法的精度一致。

由表 3 可知: Runge-Kutta 法与 Adams-Cowell 法的计算耗时分别是本文算法的 237.7% 与 71.3%。在绝对值上, 本文算法平均比 Adams-Cowell 法慢 1.8 s,

表 2 轨道外推 3.5 d, 各算法轨道预报的最大误差

PRN 号	本文算法 (m)	Runge-Kutta (m)	Adams-Cowell (m)
1	4.56	4.31	4.57
2	10.10	9.78	10.11

表 3 轨道外推 3.5 d, 各算法轨道预报的计算效率

PRN 号	本文算法 (s)	Runge-Kutta (s)	Adams-Cowell (s)
1	6.2	14.7	4.2
2	6.0	14.3	4.5

比 Runge-Kutta 法快 8.4 s。本文算法的计算效率虽然低于 Adams-Cowell 法, 但明显高于 Runge-Kutta 法, 而且在绝对值上与 Adams-Cowell 法相差并不大。本文算法和 Runge-Kutta 法是单步法, Adams-Cowell 法是多步法。在每步的计算中, 由于多步法利用了之前的计算结果, 而单步法需要在两时间节点之间插值计算, 因此在计算效率方面, 多步法本身就比单步法有一定的优势。由于 Runge-Kutta 法为通用数值算法, 并没有考虑问题的物理意义, 只是求解微分方程, 而本文算法在设计过程中, 利用了二体问题的解析解, 将原问题化简为求解数量级很小的摄动部分, 因而比同为单步法的 Runge-Kutta 法有优势。

5 总结

本文提出适用于轨道预报的乘法保辛摄动方法, 由于利用了二体问题的解析解, 将求解受摄二体问题转化为求解数量级很小的摄动问题, 故可用区段矩阵近似求解。由于二体问题的状态转移矩阵为辛矩阵, 且摄动部分的求解过程也可看作是保辛的, 故此过程保辛。所求问题为受摄二体问题, 这是一个已知条件, 数值求解时应当充分利用。

本文在考虑地球中心引力、非球形引力、日月引力、太阳光压和潮汐摄动的情况下, 对 GPS 卫星的轨道作出了较为准确的预报, 预报 3 d 的轨道误差在 10 m 量级。本文算法的精度与 Runge-Kutta 法和 Adams-Cowell 法一致, 但效率明显高于同为单步法的 Runge-Kutta 法, 同时与多步法 Adams-Cowell 法相差较小。

参考文献

- Abdel-Aziz Y A. An analytical theory for avoidance collision between space debris and operating satellites in LEO. *Appl Math Model*, 2013, 37: 8283–8291
- Hsiao H T, Chang T H. Algorithm design for long-term GPS satellite orbit prediction. In: Proceedings of the 2011 Chinese Control and Decision Conference. Mianyang, 2011. 2761–2766
- 管洪杰, 姚志成, 刘岩. 轨道数值积分方法适用性研究. *科学技术与工程*, 2013, 36: 10883–10886
- Kosti A A, Anastassi Z A, Simos T E. An optimized explicit Runge-Kutta-Nyström method for the numerical solution of orbital and related periodical initial value problems. *Comput Phys Commun*, 2012, 183: 470–479
- 孙雁, 高强, 钟万勰. 保辛-保能的数值积分. *应用数学和力学*, 2014, 35: 831–837
- Peng H J, Gao Q, Wu Z G, et al. Symplectic approaches for solving two-point boundary-value problems. *J Guid Control Dyn*, 2012, 35: 653–658
- 徐小明, 钟万勰. 基于四元数表示的多体动力学系统及其保辛积分算法. *应用数学和力学*, 2014, 35: 1071–1080
- Van de Vyver H. A symplectic exponentially fitted modified Runge-Kutta-Nyström method for the numerical integration of orbital

- problems. *New Astron.*, 2005, 10: 261–269
- 9 Bradley B K, Jones B A, Beylkin G, et al. Bandlimited implicit Runge-Kutta integration for astrodynamics. *Celest Mech Dyn Astron.*, 2014, 119: 143–168
 - 10 Surovik D, Scheeres D. Computational efficiency of symplectic integrators for space debris orbit propagation. In: AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. Minneapolis, 2012
 - 11 Hubaux C, Lemaître A, Delsate N, et al. Symplectic integration of space debris motion considering several Earth's shadowing models. *Adv Space Res.*, 2012, 49: 1472–1486
 - 12 刘林. 航天器轨道理论. 北京: 国防工业出版社, 2000
 - 13 Montenbruck O, Gill E. Satellite Orbits: Models, Methods and Applications. 王家松, 祝开建, 胡小工, 译. 北京: 国防工业出版社, 2012
 - 14 刘林, 胡松杰, 曹建峰, 等. 航天器定轨理论与应用. 北京: 电子工业出版社, 2015
 - 15 Xu G. GPS: Theory, Algorithms and Applications. 2nd ed. Berlin: Springer, 2007
 - 16 王甫红, 徐其超, 龚学文, 等. GAAF 在星载 GPS 实时定轨中的应用研究. 武汉大学学报(信息科学版), 2014, 39: 47–51
 - 17 童科伟, 周建平, 何麟书. 引力加速度估计函数用于快速准确的引力计算. 载人航天, 2007, 3: 59–61
 - 18 钟万勰. 应用力学的辛数学方法. 北京: 高等教育出版社, 2006
 - 19 吴锋. 周期结构的时域积分方法及散射分析方法研究. 博士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2014
 - 20 刘林, 张强, 廖新浩. 人卫精密定轨中的算法问题. 中国科学 A 辑, 1998, 28: 848–856

A multiplicative perturbation method for satellite orbit prediction based on symplectic property

WU ZhiGang^{1,2}, YANG JinZhao^{1,2}, PENG HaiJun^{1,3} & ZHANG Shuo^{1,2}

¹ State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

² School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

³ Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

In order to predict artificial satellite orbit accurately, complex dynamic models need to be considered and numerical integration algorithms are used to solve the problem. Desired effect has been obtained for orbit prediction by various integration algorithms such as Runge-Kutta algorithm and Adams-Cowell algorithm. But the symplectic property of the dynamic problem is not taken into consideration, therefore the inherent characteristics of the system are neglected. In this paper, the multiplicative perturbation method based on symplectic property, which adapts to orbit prediction, is proposed. Hamiltonian canonical equation, which describes the motion of the satellite, is divided into two sections, including two-body problem and perturbation section. Analytical solution of two-body problem is used. Perturbation section is solved approximately by interval matrices algorithm. Because state transition matrix of the two-body problem is a symplectic matrix, it is a symplectic structure-preserving process. Perturbation factors, including non-spherical Earth, solar-lunar gravitational force, solar radiation pressure and tidal perturbation, are taken into account. GPS satellites are selected to make numerical simulations. The error of orbit prediction is obtained by reference to precise ephemeris of GPS satellites. The results of the proposed perturbation method are compared with that of Runge-Kutta algorithm and Adams-Cowell algorithm. Results show: 3 d prediction errors of proposed algorithm for PRN01 GPS satellite and PRN02 GPS satellite are 4.56 and 10.10 m, respectively. The accuracy of proposed algorithm coincides with that of Runge-Kutta algorithm and Adams-Cowell algorithm. The computational time of Runge-Kutta algorithm is 237.7% of that of proposed algorithm. The computational time of Adams-Cowell algorithm is 71.3% of that of proposed algorithm. So the efficiency of proposed algorithm is obviously higher than that of Runge-Kutta algorithm and is slightly lower than that of Adams-Cowell algorithm.

symplectic structure preserving, multiplicative perturbation, orbit prediction, perturbed two-body problem, GPS satellite

doi: 10.1360/N092016-00204