

某些数在所有度量下的联立逼近

王 连 祥

(中国科学院数学研究所, 北京)

摘 要

文中定量地证明了: Галочкин 条件下的 G 函数的多项式的非平凡零点 (复的或 p -adic 的), 在相应的度量下都不能用某固定代数数域的代数数“很好地”逼近. 并且得到了, 包含一组代数无关的 G 函数的多项式, 在某些特殊的代数点 ξ 上的所有度量下的较好的下界估计, 即把通常的阶 (相对于多项式的高的指数)

$$-(\log H(\xi)/\log \log H(\xi))^{1/2}$$

改进为 $-(\log \log H(\xi))^{\varepsilon}$, 这里 $H(\xi)$ 是 ξ 的高, ε 是任意小的正数.

一、引 言

Väänänen^[1] 得到了比 Галочкин^[2] 更为广泛的结果, 他给出数

$$\alpha - \theta, \beta - \gamma, P(\alpha, f_1(\beta), \dots, f_m(\beta))$$

的普通绝对值的联立下界估计, 其中 α, β 是某二已知复数, θ, γ 是某二个代数数, $f_1(z), \dots, f_m(z)$ 是 Siegel E 函数^[3], $P(x, x_1, \dots, x_m)$ 是系数属于某代数数域的多项式. 这种类似的研究是由 Schneider^[4, p137] 提出来的.

本文目的是对于 Галочкин 条件下的 G 函数, 进行类似于文献[1]的研究, 得到相应的某些数的联立逼近定理, 包括了复情形和 p -adic 情形. 作为主要定理的推论之一, 我们改进了 Väänänen^[5] 关于包含一组代数无关的 G 函数, 在某些特殊代数点上的值的多项式绝对值的下界估计的阶.

二、符号、定义和结果

设 $\mathbf{Z}$ 是整数环, $\mathbf{Q}$ 是有理数域, $\mathbf{C}$ 是复数域, K 是 $\mathbf{C}$ 中某个固定代数数域, $[K:\mathbf{Q}] = d$, O_K 是 K 中全体代数整数环. 如果 p 是一素数, 则 $\mathbf{Q}_p$ 表示 p -adic 数域, $\mathbf{C}_p$ 表示 $\mathbf{Q}_p$ 的完备代数闭包. 为简便起见, $|\alpha_v|_v$ 表示数 α_v 的 v -赋值, 也就是说, 如果 $v|\infty$, 则表示 $\alpha_v = \alpha \in \mathbf{C}_v = \mathbf{C}$, $|\alpha_v|_v = |\alpha|$, 即取 α 在 $\mathbf{C}$ 中的 Euclid 绝对值 (Archimedes 赋值); 如果 $v|p$, 则表示 $\alpha_v = \alpha_p \in \mathbf{C}_v = \mathbf{C}_p$, $|\alpha_v|_v = |\alpha_p|_p$, 即取 α_p 在 $\mathbf{C}_p$ 中的 p -adic 赋值 (规范化了的非 Archimedes 赋值, 满足 $|p|_p = p^{-1}$).

如果 $\xi \neq 0$ 是 K 中 r 次代数数, 它在 $\mathbf{Z}$ 上的极小多项式为

$$P(x) = a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \dots + a_r, a_i \in \mathbf{Z}, a_0 \neq 0,$$

则

$$H(P) = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_r|)$$

称为多项式 $P(x)$ 的高, 又称 $H(\xi) = H(P)$ 为代数数 ξ 的高, 如果 $\xi = 0$, 则定义 $H(0) = 1$. 根据 Perron 定理(见文献[6, 第一章, § 6, 定理 18]), 我们有

$$|\xi| \leq \|\xi\| \leq H(\xi) + 1 \leq 2H(\xi), \quad (1)$$

式中 $\|\xi\|$ 表示代数数 ξ 的尺度 (即这个代数数及其所有域共轭的绝对值的最大值). 显然, $a_0 \xi \in O_K$, 因此

$$\|a_0 \xi\| \leq 2H(\xi), \text{ 且 } |\xi|_p \leq |a_0|_p^{-1} \leq |a_0| \leq H(\xi). \quad (2)$$

对任意 $\eta \neq 0 \in O_K$, 有

$$1 \leq |N_{K/Q}(\eta)| \leq |\eta| \|\eta\|^{d-1}, \quad (3)$$

和

$$1 \leq |\eta|_p |N_{K/Q}(\eta)| \leq |\eta|_p \|\eta\|^d, \quad (4)$$

式中 $N_{K/Q}(\cdot)$ 是域 K 中的范数.

对于多项式 $P(x_1, \dots, x_m) \in K[x_1, \dots, x_m]$, 它的系数的尺度的最大值称为该多项式的高, 记作 $H(P)$.

我们用幂级数

$$g(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h z^h$$

来定义 G 函数, 其中 a_h 具有性质:

i) 系数 $a_h \in K$, $h \geq 0$, 并存在大于 1 的常数 C , 使得 $\|a_h\| \leq C^{h+1}$, $h \geq 0$.

ii) 存在自然数序列 $q_0, q_1, \dots$, 使得 $q_h a_j \in O_K$, $0 \leq j \leq h$, 这里 $q_h \leq C^{h+1}$, $h \geq 0$.

我们注意到 $|a_h|_p \leq |q_h|_p^{-1} \leq q_h \leq C^{h+1}$, $h \geq 0$, 因此 $g(z)$ 在 $\mathbf{C}_p$ 中的子圆: $|z|_p < C^{-1}$ 内收敛. 现在我们假定有一组线性微分方程组

$$y'_i = Q_{i0}(z) + \sum_{h=1}^m Q_{ih}(z) y_h, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (5)$$

其中 $Q_{ih}(z) \in K(z)$. 不失一般性, 我们可以假定 $Q_{ih}(z) \in O_K(z)$ (见文献[7]). 进一步, 我们记

$$y_i^{(j)} = Q_{i0j}(z) + \sum_{h=1}^m Q_{ihj}(z) y_h, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

其中所有 $Q_{ihj}(z) \in O_K(z)$, 这里 $y_i^{(j)}$ 表示 y 的第 j 阶导数. 我们用 $T(z)$ 表示所有有理函数 $Q_{ih}(z)$ 的最小公分母, 于是 $T(z)$ 是 $O_K[z]$ 中的一个多项式, 使得所有 $T(z)Q_{ih}(z) \in O_K[z]$. 令

$$\begin{aligned} g &= \max_{i,h} (\deg T(z), \deg (T(z)Q_{ih}(z))), \\ T &= \max_{i,h} (H(T(z)), H(T(z)Q_{ih}(z))). \end{aligned} \quad (6)$$

我们现在考虑一组 G 函数 $g_1(z), \dots, g_m(z)$, 不仅满足 (5) 和 (6) 式, 还满足下列所谓 Галочкин 条件: 存在一列自然数 $b_1, b_2, \dots$, 其中 $b_k \leq B^{k+1}$, (对于某 $B > 1$), 使得

$$\begin{aligned} (b_k/j!) T(z)^j Q_{ihj}(z) &\in O_K[z], \\ 1 \leq i \leq k, \quad k &\geq 1, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned} \quad (7)$$

这组 G 函数称为属于函数类 $G(K, C, g, T, B)$.

我们得到下列结果.

定理. 假定 G 函数 $g_1(z), \dots, g_m(z)$ 属于 $G(K, C, g, T, B)$, 并在 $K(z)$ 上代数无关. 设 $P(x, x_1, \dots, x_m)$ 是 $O_K[x, x_1, \dots, x_m]$ 中任意非零多项式, $\deg_x P \leq r$, $\deg_{x_1 \dots x_m} P \leq s$. 假定 $\alpha_v, \beta_v \in \mathbf{C}_v$ (这里 $v | \infty$ 或 $v | p$), $\theta, \gamma \in K$, 并且 $\beta_v \gamma T(\beta_v) T(\gamma) \neq 0$, $P(\theta, x_1, \dots, x_m) \neq 0$. 又设 ε 是已知常数, 满足 $0 < \varepsilon < 1$. 那么存在只依赖于 $\varepsilon, d, r, s, \beta_v$ 和这些函数 $g_1(z), \dots, g_m(z)$ 的正常数 C_0, C_1 , 使得对于所有满足

$$\begin{aligned} |\gamma|_v &< \exp\{-C_0 \log H(\gamma)(\log \log H(\gamma))^{-\varepsilon/(3r)}\}, \\ H(\gamma) &\geq C_1, \text{ 其中 } \tau = (m+1)^{m+1} + m + 1 \end{aligned} \quad (8)$$

的 γ 和任意 θ, P , 下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \max\{|\alpha_v - \theta|_v, |\beta_v - \gamma|_v, |P(\alpha_v, g_1(\beta_v), \dots, g_m(\beta_v))|_v\} \\ > \exp\{-\log(H(\theta)H(\gamma)H(P))(\log \log H(\gamma))^\varepsilon\}. \end{aligned}$$

由这个定理可以得到几个直接推论.

首先取 $\alpha_v = \beta_v$, $\theta = \gamma$. 并用 $\varepsilon/2$ 代替定理中的 ε , 便得下面推论.

推论 1. 在定理的假定下, 设 β_v 是方程

$$P(z, g_1(z), \dots, g_m(z)) = 0$$

的非平凡零点, 则存在只依赖于 ε, P, β_v 和这些函数 $g_1(z), \dots, g_m(z)$ 的常数 C_2 , 使得对于满足 (8) 式和 $H(\gamma) \geq C_2$ 的 γ , 有不等式

$$|\beta_v - \gamma|_v > \exp\{-\log H(\gamma)(\log \log H(\gamma))^\varepsilon\}.$$

推论 1'. 在定理的假定下, 如果 K 中存在无限多个代数数 γ 满足 (8) 式和 $H(\gamma) \geq C_2$, 以及

$$|\beta_v - \gamma|_v < \exp\{-\log H(\gamma)(\log \log H(\gamma))^\varepsilon\},$$

那么 $\beta_v, g_1(\beta_v), \dots, g_m(\beta_v)$ 在 K 上代数无关.

推论 2. 在定理的假定下, 设 α_v 是方程

$$P(z, g_1(\gamma), \dots, g_m(\gamma)) = 0$$

的零点, 其中 γ 满足 (8) 式, 那么存在只依赖于 d, γ, P 和这些函数 $g_1(z), \dots, g_m(z)$ 的正常数 C_3 , 使得对任意 θ , 有

$$|\alpha_v - \theta|_v > H(\theta)^{-C_3}.$$

最后, 我们取 $\alpha_v = \theta = 0$, $\beta_v = \gamma = \xi \in K$, 于是得到下面有趣的结果.

推论 3. 假定 $g_1(z), \dots, g_m(z) \in G(K, C, g, T, B)$, 并在 $K(z)$ 上代数无关, 设 $P(x_1, \dots, x_m)$ 是 $O_K[x_1, \dots, x_m]$ 中任意非零多项式, $\deg P \leq S$. 又设 ε 为任意已知常数 $0 < \varepsilon < 1$. 那么对于满足 (8) 式的代数数 ξ 有

$$|P(g_1(\xi), \dots, g_m(\xi))|_v > H(\xi)^{-(\log \log H(\xi))^\varepsilon} H(P)^{-(\log \log H(\xi))^\varepsilon}.$$

对于某些特殊的代数数 ξ (即满足 (8) 式), 该不等式中的 $H(P)$ 的指数 $-(\log \log H(\xi))^\varepsilon$ 比 Väinänen^[5] 的相应指数 $-(\log H(\xi)/\log \log H(\xi))^{1/2}$ 要好. 从下面的证明过程中可以看出, 函数 $\log \log H(\xi)$ 可以用其阶更小的函数, 比如 $\log \log \dots \log H(\xi)$ 来替换, 这时不等式 (8) 要作相应的改变. 如果用 $h(\xi)$ 表示代数数 ξ 的绝对高 (定义见文献 [8, 9]), 则根据高与绝对高之间的关系有

$$B_1(\gamma)H(\xi)^{1/r} \leq h(\xi) \leq B_2(r)H(\xi)^{1/r},$$

其中 $\deg \xi = r$, $B_1(r)$, $B_2(r)$ 是只与 r 有关的常数, (见文献[9, p261]), 我们的这些结果可以改换成绝对高的形式.

三、定理的证明

设 $\alpha_v = \vartheta + \delta_{1v}$, $\beta_v = \gamma + \delta_{2v}$, 记

$$H = \log(H(\vartheta)H(\gamma)H(P))(\log \log H(\gamma))^s. \quad (9)$$

假定 γ 满足(8)式, 并且

$$\max\{|\delta_{1v}|_v, |\delta_{2v}|_v\} < \exp\{-H\}. \quad (10)$$

如果我们能够证明

$$|P(\alpha_v, g_1(\beta_v), \dots, g_m(\beta_v))|_v > \exp\{-H\}, \quad (11)$$

那么便可得到我们的定理, 现在叙述如下:

1. 设

$$u = \binom{m+q}{m}, w = \binom{m+q-s}{m}, v = u - w, q \geq \max(s, 3).$$

容易验证

$$(m!)^{-1}q^m \leq u \leq (m+1)q^m, w \leq u, v \leq sm(m+1)q^{m-1}. \quad (12)$$

我们考虑 u 个非负幂积

$$g_1(z)^{h_1} \cdots g_m(z)^{h_m}, 0 \leq h_1 + \cdots + h_m \leq q, h_i \geq 0,$$

称它们为 $G_1(z) \equiv 1, G_2(z), \dots, G_u(z)$. 它们满足齐次线性微分方程组

$$y'_i = \sum_{h=1}^n Q_{ih}^*(z)y_h, 1 \leq i \leq u.$$

于是得到

$$y_i^{(j)} = \sum_{h=1}^n Q_{ih_j}^*(z)y_h, \quad (13)$$

其中 $Q_{ih_j}^*(z) \in O_K(z)$. 设 $T^*(z)$ 是 $Q_{ih_j}^*(z)$ 的最小公分母, 则由文献[10]中引理 7 和文献[11]中的引理 7 可知, $G_1(z), \dots, G_u(z)$ 属于 $G(K, (2C)^q, g, qT, B^q)$.

根据 Siegel 引理(例如参看文献[12]中的引理 1, 取 $N = un$, $M = un - [\omega n] - 1$, 这里 n 是充分大的自然数, ω 是常数, 满足 $0 < \omega \leq 1/2$), 我们可以在 $O_K[z]$ 中构造 u 个不全恒等于零的多项式

$$P_i(z) = \sum_{h=0}^{n-1} p_{ih} z^h, 1 \leq i \leq u,$$

具有性质:

i) 对于 $q \geq \log(2C)/(2d \log 2)$, 有

$$H(\mathbf{P}) \leq (2C)^{1/d \omega^{-1} n u^2 q}, \quad (14)$$

这里 $\mathbf{P} = (P_1(z), \dots, P_u(z))$.

ii) $R(z) = \sum_{i=1}^u P_i(z)G_i(z)$ 满足 $\text{ord } R(z) \geq M$, 这里 $\text{ord } R(z)$ 表示 $R(z)$ 在 $z=0$

处的零点阶数.

2. 令

$$R_{i+1}(z) = \frac{b_i^*}{i!} T^*(z)' R^{(i)}(z), \quad i \geq 0, \quad (15)$$

式中 $b_i^* \leq B^{(i)}$. 由于

$$(i!)^{-1} R^{(i)}(z) = \sum_{h \geq M} A_h \binom{h}{i} z^{h-i}, \quad (16)$$

对任意 v , 上式的 A_h 满足

$$|A_h|_v \leq 2^u (2C)^{2d\omega^{-1}nu^2q} (2C)^{2u(h+1)}, \quad h \geq M. \quad (17)$$

由(15)–(17)式容易验证, 对任意 v , 当 $|z|_v < (2C)^{-q}$ 时, 有

$$|R_i(z)|_v < 4^{u+1} (B^q(g+1)qT)^{i-1} (2C)^{2d\omega^{-1}nu^2q+2qi} \cdot ((2C)^q |z|_v)^{u-i+1}. \quad (18)$$

进一步, 由(15)式得到

$$R_i(z) = \sum_{j=1}^u P_{ij}(z) G_j(z), \quad i \geq 1,$$

其中

$$P_{i+1,j}(z) = \frac{b_i^*}{i!} \sum_{h=1}^u \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} P_h^{(i-j)}(z) T^*(z)' Q_{hi,j}^*(z), \quad i \geq 0. \quad (19)$$

显然, 由(7)式可知 $P_{ij}(z) \in O_K[z]$. 令

$$n_0 = Q(m)q^r, \quad t = [\omega n] + u(u-1)g/2, \quad (20)$$

式中 r 是常数如(8)式所示, $Q(m)$ 是依赖于函数 $g_1(z), \dots, g_m(z)$ 的常数. 根据文献[13]中的定理 3, 类似于文献[14]中引理 5 的证明可以得到, 当 $n > n_0$ 时,

$$\text{rank}(P_{ij}(z))_{\substack{0 \leq i \leq u \\ 1 \leq j \leq u}} = u,$$

并且存在 u 个不同的标号 $i_1, \dots, i_u$, 满足

$$0 \leq i_1 < \dots < i_u \leq t + u,$$

使得对任意 $r \in k$, $rT(r) \neq 0$, $|r|_v < (2C)^{-q}$, 有

$$\text{rank}(P_{i_k,j}(r))_{1 \leq k,j \leq u} = u. \quad (21)$$

由(13)式可知, $Q_{hi,j}^*(z)$ 中包含 $Q_{ih}^*(z)'$ 的项数不超过 $j!u^j$, 所以 $\deg(T^*(z)^i Q_{hi,j}^*(z)) \leq ig$, 并且

$$\|T^*(z)' Q_{hi,j}^*(z)\| \leq j!(u(g+1)qT)^j (1 + \|z\|)^{ig}.$$

由(14)式可知,

$$\|P_h^{(i-j)}(z)\| \leq \frac{(n-1)!(n-i+j)}{(n-i+j-1)!} (2C)^{2d\omega^{-1}nu^2q} (1 + \|z\|)^{n-i+j-1}.$$

根据(19)式, 可计算出

$$\begin{aligned} \|P_{i_k,j}(z)\| &\leq B^{qik} u \sum_{j=0}^{i_k} \binom{n-1}{j} n (2C)^{2d\omega^{-1}nu^2q} (1 + \|z\|)^{n-1} \\ &\quad \cdot u^k ((g+1)qT)^{ik} (1 + \|z\|)^{ikg} \\ &\leq u (B^q u (g+1)qT)^{ik} 4^n (2C)^{2d\omega^{-1}nu^2q} (1 + \|z\|)^{n+ikg}. \end{aligned} \quad (22)$$

3. 取 $\omega = 1/2$, 对任意小的常数 ε , $0 < \varepsilon < 1$, 我们令

$$q = [(\log \log H(\gamma))^{\varepsilon/(3\varepsilon)}], \quad (23)$$

$$n = \left\lceil \frac{\log(H(P)H(\theta)H(\gamma))}{\log H(\gamma)} (\log \log H(\gamma))^{\varepsilon/2} \right\rceil + 1. \quad (24)$$

显然, 当 $H(\gamma) \geq \exp \exp(Q(m)^{6/\varepsilon})$ 时, 由 (20), (23), (24) 式可推出 $n > n_0$. 通过简单的计算可以验证下列各式成立 (根据 (9), (12), (23), (24) 式):

$$nv \log H(\gamma) \leq 2sm(m+1)H(\log \log H(\gamma))^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{m-1}{3\varepsilon}\right)\varepsilon}, \quad (25)$$

$$u^2 v \log H(\gamma) \leq sm(m+1)^3 H(\log \log H(\gamma))^{-\left(1 - \frac{3m-1}{3\varepsilon}\right)\varepsilon}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} nu^3 v q &\leq 2sm(m+1)^4 H(\log H(\gamma))^{-1} (\log \log H(\gamma))^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{4m}{3\varepsilon}\right)\varepsilon} \\ &\leq 2sm(m+1)^4 H(\log \log H(\gamma))^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{m-1}{3\varepsilon}\right)\varepsilon}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$n(u-1) \geq (m! 2^{m+2})^{-1} H(\log H(\gamma))^{-1} (\log \log H(\gamma))^{\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{3\varepsilon}\right)\varepsilon}. \quad (28)$$

4. 用多项式 $P(x, g_1(z), \dots, g_m(z))$ 去乘每个幂积

$$g_1(z)^{h_1} \cdots g_m(z)^{h_m}, \quad 0 \leq h_1 + \cdots + h_m \leq q - s, \quad h_i \geq 0,$$

我们便得到 ω 个线性型

$$\phi_i(x, z) = \sum_{j=1}^u c_{ij}(x) G_j(z), \quad 1 \leq i \leq \omega, \quad (29)$$

其中 $c_{ij}(x) \in O_K[x]$, 并满足

$$\deg(c_{ij}(x)) \leq r, \quad H(c_{ij}(x)) \leq H(P), \quad 1 \leq i \leq \omega, \quad 1 \leq j \leq u. \quad (30)$$

假定 θ, γ, P 满足定理的条件, 并设 a, b 分别是 θ 和 γ 的 $\mathbf{Z}$ 上的极小多项式的首项系数, 则

$$a\theta \in O_K, \quad b\gamma \in O_K, \quad (31)$$

并且线性型

$$\phi_1(\theta, \gamma), \dots, \phi_\omega(\theta, \gamma) \quad (32)$$

的系数矩阵的秩为 ω , 于是这些线性型线性无关. 由 (21) 式可知, 我们还可找到 ν 个线性型, 比如 $R_{i_1}(\gamma), \dots, R_{i_\nu}(\gamma)$, 和 (32) 式一起是线性无关的. 我们考虑行列式

$$D(x, z) = \begin{vmatrix} c_{11}(x) \cdots c_{1u}(x) \\ \vdots \\ c_{w1}(x) \cdots c_{wu}(x) \\ P_{i_1,1}(z) \cdots P_{i_1,u}(z) \\ \vdots \\ P_{i_\nu,1}(z) \cdots P_{i_\nu,u}(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi_1(x, z) c_{12}(x) \cdots c_{1u}(x) \\ \vdots \\ \phi_w(x, z) c_{w2}(x) \cdots c_{wu}(x) \\ R_{i_1}(z) \quad P_{i_1,2}(z) \cdots P_{i_1,u}(z) \\ \vdots \\ R_{i_\nu}(z) \quad P_{i_\nu,2}(z) \cdots P_{i_\nu,u}(z) \end{vmatrix}. \quad (33)$$

显然 $D(x, z) \in O_K[x, z]$, 且 $D(\theta, \gamma) \neq 0$. 我们注意,

$$\deg P_{i_k,j}(z) \leq n + i_k g. \quad (34)$$

记

$$\Delta(x, z) = a^{\omega} b^{\nu + (i_1 + \cdots + i_\nu)g} D(x, z).$$

由 (2), (22), (31), (34) 式可计算出

$$\max_{i,j} \|a' c_{ij}(\theta)\| \leqslant 4^r H(P) H(\theta)^r, \quad (35)$$

$$\max_j \|b^{n+i_k} P_{i_k, j}(\gamma)\| \leqslant 4^{2n+i_k} g u (B^q u (g+1) g T)^{i_k} (2C)^{4d n u^2 i} H(\gamma)^{n+i_k} g, \quad (36)$$

因而估计出

$$\begin{aligned} \|\Delta(\theta, \gamma)\| &\leqslant H(P)^u H(\theta)^r H(\gamma)^{n v + (t+u) v g} \\ &\quad \cdot (2BC(g+1)T)^{4d n u^2 v q + (g+1)(t+u) u v q + 6n u + 2r u}. \end{aligned} \quad (37)$$

5. 另一方面, 行列式 $\Delta(x, z)$ 可以展成形式

$$\Delta(x, z) = \sum_{i=0}^{r u} \sum_{j=0}^{n v + (i_1 + \dots + i_v) g} D_{ij} x^i z^j,$$

其中 $D_{ij} \in O_K$, 并根据(22)和(30)式, D_{ij} 满足

$$\begin{aligned} \max_{i,j} \|D_{ij}\| &\leqslant H(P)^u H(\theta)^r H(\gamma)^{n v + (t+u) v g} \\ &\quad \cdot (2BC(g+1)T)^{4d n u^2 v q + (g+1)(t+u) u v q + 5n u + r u}. \end{aligned} \quad (38)$$

我们还进一步有

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha_v, \beta_v) &= \sum_{i=0}^{r u} \sum_{j=0}^{n v + (i_1 + \dots + i_v) g} D_{ij} (\theta + \delta_{1v})^i (\gamma + \delta_{2v})^j \\ &= \Delta(\theta, \gamma) + r_1(\theta, \gamma, \delta_{1v}, \delta_{2v}), \end{aligned} \quad (39)$$

这里

$$r_1(\theta, \gamma, \delta_{1v}, \delta_{2v}) = \sum_{\substack{i,j \neq (0,0)}}^{r u} \sum_{\substack{j=0}}^{n v + (i_1 + \dots + i_v) g} D_{ij} \sum_{\substack{\lambda=0}}^i \sum_{\substack{\mu=0}}^j \binom{i}{\lambda} \binom{j}{\mu} \theta^{i-\lambda} \gamma^{j-\mu} \delta_{1v}^\lambda \delta_{2v}^\mu. \quad (40)$$

对于 $v \mid \infty$, 根据(1), (38), (40)式, 我们得到

$$\begin{aligned} |r_1(\theta, \gamma, \delta_{1v}, \delta_{2v})|_v &\leqslant \max(|\delta_{1v}|_v, |\delta_{2v}|_v) \\ &\quad \cdot 4r u (n v + (i_1 + \dots + i_v) g) \cdot \max_{i,j} \|D_{ij}\| \cdot 2^{r u + n v + (i_1 + \dots + i_v) g} \\ &\quad \cdot (1 + \|\theta\|)^{r u} (1 + \|\gamma\|)^{n v + (i_1 + \dots + i_v) g} \\ &\leqslant \max(|\delta_{1v}|_v, |\delta_{2v}|_v) H(P)^u H(\theta)^{2r u} H(\gamma)^{2n v + 2(t+u) v g} \\ &\quad \cdot (2BC(g+1)T)^{4d n u^2 v q + 4(r+1)(g+1)(t+u) u v q + 8(r+1) n u}. \end{aligned}$$

对于 $v \mid p$, 由(2)式中右边不等式容易看出,

$$|r_1(\theta, \gamma, \delta_{1v}, \delta_{2v})|_v \leqslant \max(|\delta_{1v}|_v, |\delta_{2v}|_v) H(\theta)^r H(\gamma)^{n v + (t+u) v g}.$$

因此, 根据(10), (25)–(27)式, 不难验证, 对于任意 v , 存在只依赖于 d, m, r, s, B, C, g, T 的正常数 C_4, C_5 , 使得当 $H(\gamma) \geqslant \exp \exp(Q(m)^{6/\varepsilon})$ 时, 有

$$|r_1(\theta, \gamma, \delta_{1v}, \delta_{2v})|_v < \exp(-H + C_4 H(\log \log H(\gamma))^{-(\frac{1}{2} - \frac{m-1}{3r})\varepsilon}). \quad (41)$$

和

$$\|\Delta(\theta, \gamma)\| \leqslant \exp(C_5 H(\log \log H(\gamma))^{-(\frac{1}{2} - \frac{m-1}{3r})\varepsilon}). \quad (42)$$

进一步, 由(3), (4), (37), (42)式可知, 对任意 v , 有

$$|\Delta(\theta, \gamma)|_v > \exp(-d C_5 H(\log \log H(\gamma))^{-(\frac{1}{2} - \frac{m-1}{3r})\varepsilon}), \quad (43)$$

容易验证, 如果 $H(\gamma) \geqslant \exp \exp((C_4 + 2d C_5)^{6/\varepsilon})$, 则由(41)和(43)式推出, 对任意 v ,

$$|r_1(\theta, \gamma, \delta_{1\nu}, \delta_{2\nu})|_v \leq \frac{1}{2} |\Delta(\theta, \gamma)|_v. \quad (44)$$

由(39)式, 对于 $v|\infty$,

$$|\Delta(\alpha_\nu, \beta_\nu)|_v \geq |\Delta(\theta, \gamma)|_v - |r_1(\theta, \gamma, \delta_{1\nu}, \delta_{2\nu})|_v,$$

对于 $v|p$,

$$|\Delta(\theta, \gamma)|_v \leq \max(|\Delta(\alpha_\nu, \beta_\nu)|_v, |r_1(\theta, \gamma, \delta_{1\nu}, \delta_{2\nu})|_v).$$

因此, 根据(44)式可推出, 对任意 v ,

$$|\Delta(\theta, \gamma)|_v \leq 2|\Delta(\alpha_\nu, \beta_\nu)|_v. \quad (45)$$

6. 类似地, 我们有

$$a'c_{ij}(\alpha_\nu) = a'c_{ij}(\theta) + r_2(i, j, \theta, \delta_{1\nu}), \quad (46)$$

其中对任意 v , 根据(2)式有

$$|r_2(i, j, \theta, \delta_{1\nu})|_v \leq \max(|\delta_{1\nu}|_v, |\delta_{2\nu}|_v) 2^{3r} H(P) H(\theta)^r. \quad (47)$$

我们还有

$$b^{n+ikg} P_{i,kg}(\beta_\nu) = b^{n+ikg} P_{i,kg}(\gamma) + r_3(k, j, \gamma, \delta_{2\nu}), \quad (48)$$

根据(2), (22), (34)式可知, 对任意 v ,

$$\begin{aligned} |r_3(k, j, \gamma, \delta_{2\nu})|_v &\leq \max(|\delta_{1\nu}|_v, |\delta_{2\nu}|_v) H(\gamma)^{n+ikg} \\ &\quad \cdot 2^{5(n+ikg)} u(B^q u(g+1)qT)^{ik}(2C)^{4dnu^2q}. \end{aligned} \quad (49)$$

于是由(35), (36), (46)–(49)式得到, 对任意 v ,

$$|a'c_{ij}(\alpha_\nu)|_v \leq 2^r H(P) H(\theta)^r, \quad (50)$$

$$|b^{n+ikg} P_{i,kg}(\beta_\nu)|_v \leq H(\gamma)^{n+(t+u)g} (2BC(g+1)T)^{4dnn^2q+6(g+1)(t+u)nq+6n}. \quad (51)$$

7. 由(2), (3), (4)式容易验证, 对任意 $\gamma \neq 0 \in K$, 对任意 v , 有不等式

$$|\gamma|_v \geq 2^{-d} H(\gamma)^{-d}.$$

因此, 由(8), (10)式可知, 对任意 v

$$\begin{aligned} \log |\beta_\nu|_v &\leq \log |\gamma|_v + \log \left| 1 + \frac{\delta_{2\nu}}{\gamma} \right|_v \\ &\leq \log |\gamma|_v + |\delta_{2\nu}|_v 2^d H(\gamma)^d \leq \log |\gamma|_v + 1 \\ &\leq -\frac{C_0}{2} \log H(\gamma) (\log \log H(\gamma))^{-\varepsilon/(3r)}, \end{aligned}$$

于是由(28)式直接可推出, 对任意 v ,

$$n(u-1) \log |\beta_\nu|_v < -C_0 (m! 2^{m+3})^{-1} H(\log \log H(\gamma))^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{m-1}{3r}\right)\varepsilon}. \quad (52)$$

根据(8)和(18)式得到

$$\begin{aligned} |b^{n+ikg} R_{i,k}(\beta_\nu)|_v &< H(\gamma)^{n+(t+u)g} 4^{u+1} (B^q(g+1)qT)^{t+u} \\ &\quad \cdot (2C)^{4dnn^2q+(t+u)q+(un-[n/2])q} |\beta_\nu|_v^{un-[n/2]-t-u}. \end{aligned}$$

于是根据(25)–(27), (52)式可知, 存在正常数 C_6 , 使得

$$|b^{n+ikg} R_{i,k}(\beta_\nu)|_v < \exp((-C_6(m! 2^{m+4})^{-1} + C_6) H(\log \log H(\gamma))^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{m-1}{3r}\right)\varepsilon}). \quad (53)$$

8. 记

$$G(\beta_\nu) = \max(1, |g_1(\beta_\nu)|_v, \dots, |g_m(\beta_\nu)|_v).$$

我们按(33)式中右式展开行列式 $\Delta(\alpha_\nu, \beta_\nu)$, 得

$$\Delta(\alpha_\nu, \beta_\nu) = \sum_{i=1}^w a^i \phi_i(\alpha_\nu, \beta_\nu) \Delta_i(\alpha_\nu, \beta_\nu) + \sum_{k=1}^v b^{n+i_k} R_{i_k}(\beta_\nu) \delta_k(\alpha_\nu, \beta_\nu),$$

式中 $\Delta_1, \dots, \Delta_w, \delta_1, \dots, \delta_v$ 是 $\Delta(\alpha_\nu, \beta_\nu)$ 的第一列各元素的代数余子式. 由(29), (45)式可知, 对任意 ν ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\Delta(\theta, \gamma)|_\nu &\leq w H(\theta)^r G(\beta_\nu)^q |P(\alpha_\nu, g_1(\beta_\nu), \dots, g_m(\beta_\nu))|_\nu \max_i |\Delta_i(\alpha_\nu, \beta_\nu)|_\nu \\ &\quad + v \max_k |b^{n+i_k} R_{i_k}(\beta_\nu)|_\nu \max_k |\delta_k(\alpha_\nu, \beta_\nu)|_\nu. \end{aligned} \quad (54)$$

根据(25)—(27), (50), (51)式, 存在只依赖于 d, m, r, s, B, C, g, T 和 $G(\beta_\nu)$ 的正常数 C_7 , 使得

$$\begin{aligned} \max_{i,k} (w H(\theta)^r G(\beta_\nu)^q |\Delta_i(\alpha_\nu, \beta_\nu)|_\nu, v |\delta_k(\alpha_\nu, \beta_\nu)|_\nu) \\ \leq \exp(C_7 H(\log \log H(\gamma))^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{m-1}{3r}\right)\epsilon}). \end{aligned} \quad (55)$$

再由(43), (53), (54), (55)式得到

$$\begin{aligned} &\exp(-2d C_5 H(\log \log H(\gamma))^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{m-1}{3r}\right)\epsilon}) \\ &\leq \exp(C_7 H(\log \log H(\gamma))^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{m-1}{3r}\right)\epsilon}) |P(\alpha_\nu, g_1(\beta_\nu), \dots, g_m(\beta_\nu))|_\nu \\ &\quad + \exp((-C_0(m! 2^{m+4})^{-1} + C_6 + C_7) H(\log \log H(\gamma))^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{m-1}{3r}\right)\epsilon}). \end{aligned}$$

这时取

$$\begin{aligned} C_0 &= m! 2^{m+4} (2d C_5 + C_6 + C_7), \\ C' &= \max(Q(m), C_4 + 2d C_5, C_7, (\log(2C)/(2d \log 2))^{\tau/2}), \\ C_1 &= \exp \exp(C'^{6/\epsilon}), \end{aligned}$$

便得到不等式(11), 于是定理证完.

参 考 文 献

- [1] Väänänen, K., *J. für die reine und angew. Math.*, **296**(1977), 205—211.
- [2] Галочкин, А. И., *Вестник МГУ*, серия 1, 1970. No. 5, 58—63.
- [3] Siegel, C. L., *Phys.-Math. Kl.*, 1929, No. 1, 1—70, *Abhandl. Preuss. Akad. Wiss.*
- [4] Schneider, Th., *Einführung in die Transzendenten Zahlen*, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957.
- [5] Väänänen, K., *Acta Universitatis Ouluensis*, Ser. A, *Scientiae Rerum Naturalium*, No. 112, *Mathematica*, No. 24, 1981.
- [6] Perron, O., *Algebra II*, Gochens Lehrbucherei, 1 Gruppe, Seine und angewandte Mathematik. 1933.
- [7] Шидловский, А. Б., *Изв. АН СССР серия матем.*, **23** (1959), 35—66.
- [8] Bombieri, E., In *Recent Progress in Analytic Number Theory* (Ed. H. Halberstam et al.), Vol. 2, 1—67, Academic Press, 1981.
- [9] Bombieri, E., *Acta Math.*, **148**(1982), 255—296.
- [10] Галочкин, А. И., *Матем. сбор.*, 95 (1974), 3: 394—417.
- [11] Нурмаромедов, М. С., *Матем. сбор.*, **85** (1971), 3: 339—365.
- [12] 王连祥, *中国科学A辑*, 1983, 8: 698—706.
- [13] Нестеренко, Ю. В., *Изв. АН СССР серия матем.*, **41** (1977), 2: 253—284.
- [14] Šidlovskii, A. B., *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, **27** (1979), 385—407.