(α, d, β) 超过程 Tanaka 公式的注记*

向开南**

(湖南师范大学数学系，长沙 410081)

摘要 在最优的初始条件及最优的维数条件下，证明了 (α, d, β) 超过程关于局部时的 Tanaka 公式成立.

关键词 局部时 Tanaka 公式 (α, d, β) 超过程

1 引言

用 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)(\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d))$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上 Radon(有限) 测度全体. 以

$$\langle \mu, f\rangle = \mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu(dx)$$

记函数 f 关于 $\mathbb{R}^d$ 上测度 μ 的积分. 对 $r > d/2$, 取函数

$$\phi_r(x) = (1 + |x|^2)^{-r}, \quad x \in \mathbb{R}^d;$$

令

$$\mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d) = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) |\ \langle \mu, \phi_r\rangle\ < +\infty\}.$$

用 $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上具有紧支撑的连续函数全体，赋予 $\mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d)$ 如下的 τ_r 拓扑：

$$\mu_n \Rightarrow \mu \text{ 当且仅当 } \lim_{n\to\infty} \langle \mu_n, f\rangle = \langle \mu, f\rangle,\ \forall\, f \in \mathcal{C}_c \cup \{\phi_r\}.$$

设 $0 < \alpha \leqslant 2,\ 0 < \beta \leqslant 1,\ r > d/2$, 且 $r < d + \alpha$ 如果 $\alpha < 2$. 令 $\{S_t^\alpha\}_{t\geqslant 0}$ 是对应于生成算子 $\Delta_\alpha \equiv -(-\Delta)^{\alpha/2}$ 的 α 稳定过程的半群. 用 $\mathcal{B}_b = \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)(\mathcal{C}_b = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d))$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上所有有界可测 (有界连续) 函数构成的集合. 本文中，对任给函数集 F, 以 F_+ 或 F^+ 记 F 中的非负函数全体.

众所周知，(α, d, β) 超过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是满足如下条件的右连左极的

2004-10-18 收稿

* 国家自然科学基金资助项目 (批准号: 10101002)

** E-mail: nan_kai@yahoo.com

$\mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d)$ 值时齐强 Markov 过程 (见文献 [1] 定理 1.1 与 3.1):

$$\begin{aligned} &E\left[\exp\left\{-\langle X_t\,,\varphi\rangle - \int_0^t \langle X_s\,,\psi\rangle\,ds\right\}\Big|\,X_0=\mu\right] \\ &= \exp\{-\langle \mu, V_t(\varphi,\psi)\rangle\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

对任意的 $\mu \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d)$, $\varphi,\psi \in \mathcal{B}_b^+$ 成立，其中 $V_t(\varphi,\psi)$ 是如下方程的唯一非负解：

$$v_t = S_t^\alpha \varphi + \int_0^t S_s^\alpha \psi\,ds - \int_0^t S_{t-s}^\alpha\left((v_s)^{1+\beta}\right)ds, \quad t \geqslant 0. \tag{1.2}$$

注意 $(\alpha,d,1)$ 超过程 X 是连续的 (文献 [2] 性质 5.6.2(a)).

记 $\Omega = \mathcal{D}_{\mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d)}$ 为 $\mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d)$ 值的右连左极路径空间并赋予其 Skorohod 拓扑. 用 $P_\mu^{\alpha,\beta}$ 表从 $X_0=\mu\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d)$ 出发的 (α,d,β) 超过程 X 在 Ω 上的分布. 令

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t}\sigma(X_u, u\leqslant s), \quad \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_t, t\geqslant 0),$$

则得到如下的漏斗形概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0},P_\mu^{\alpha,\beta})$. 本文用 $E_\mu^{\alpha,\beta}$ 表示关于 $P_\mu^{\alpha,\beta}$ 的期望.

令 $\mathcal{C}_b^n = \mathcal{C}_b^n(\mathbb{R}^d)(\mathcal{C}_c^n = \mathcal{C}_c^n(\mathbb{R}^d))$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上具有如下性质的函数全体： n 次连续可微且各阶导数属于 $\mathcal{C}_b(\mathcal{C}_c)$. 若 $X_0=\mu\in\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$, 则 (α,d,β) 超过程 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ 值的右连左极强 Markov 过程，且满足如下的鞅特征：

$$\forall\,\varphi\in\mathcal{C}_c^2,\ M_t(\varphi) = \langle X_t,\varphi\rangle - \langle X_0,\varphi\rangle - \int_0^t \langle X_s, \Delta_\alpha\varphi\rangle\,ds \text{ 是一}\mathcal{F}_t\text{- 鞅.} \tag{1.3}$$

注意当 $\beta<1$ 时，$M_t(\varphi)$ 是一纯不连续鞅 (文献 [2] 定理 5.6.1, 文献 [3] 例 7.1.4); 而对 $\beta=1$, (1.3) 式中的 $M_t(\varphi)$ 是一连续的具有平方变差 $2\int_0^t\langle X_s\,,\varphi^2\rangle\,ds$ 的 L^2- 鞅 (文献 [3] 例 7.1.3).

回忆关于超过程局部时的一些结果. 文献 [1] 称过程 $Y_t=\int_0^t X_s ds(\forall\, t\geqslant 0)$ 为 X 的占位时过程. 若 $Y_t(dx)$ 关于 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度绝对连续，则称过程

$$L_t^x \equiv \begin{cases} \lim_{n\to\infty}\langle Y_t,\varphi_{n,x}\rangle, & \text{若极限存在,} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{1.4}$$

为 X 在 $x\in\mathbb{R}^d$ 处的局部时，其中 $\{\varphi_{n,x}\}_{n\geqslant 1}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上满足 $\varphi_{n,x}(y)\,dy$ 收敛于在 x 处的 Dirac 测度 δ_x 的非负函数列. Fleischmann[4] 证明了对 (α,d,β) 超过程 X $(X_0\neq 0)$, 仅当 $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$ 时，其局部时才有可能存在；且若 $(L_t^x)_{t\geqslant 0}$ 存在，则它的分布不依赖于 $\{\varphi_{n,x}\}_{n\geqslant 1}$ 的选取，对 $t>0$,

$$\langle Y_t,\varphi_{n,x}\rangle \to L_t^x \text{ (依概率)}, \quad n\to\infty; \tag{1.5}$$

且当 X_0 是 Lebesgue 测度时，对任意的 $x\in\mathbb{R}^d$, $(L_t^x)_{t\geqslant 0}$ 存在.

对 $X_0(dx)=\mu(dx)=h(x)dx\neq 0$, $h\in\mathcal{B}_b^+$, 由文献 [1,5] 知当 $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$ 时，对任意的 $x\in\mathbb{R}^d$, (α,d,β) 超过程 X 具有局部时 $(L_t^x)_{t\geqslant 0}$(亦可参见文献 [6~8]).

令 $p_t^\alpha(\cdot)$ 是生成算子为 Δ_α 的 α 稳定过程之转移密度，Mytnik 与 Perkins[9] 证明了对 $(2,d,\beta)$ 超过程 X, 当 $1\leqslant d<2+\frac{2}{\beta}$, $\beta\in(0,1)$ 时，其局部时 $(L_t^x)_{t\geqslant 0}$ 在 x 处存在 (见文献 [9] 引理 4.5(a) 和 (b)), 如果

$$\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} p_s^2(x-y)X_0(dy)ds<\infty \quad (X_0\in\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d));$$

且对 $(2,d,\beta)$ 超过程 X, 当 $2\leqslant d<2+\frac{2}{\beta}$ 时，若

$$\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} p_s^2(x-y)X_0(dy)ds=\infty \quad (X_0\in\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)),$$

则 $(L_t^x)_{t\geqslant 0}$ 在 x 处不存在 (因为 (1.4) 式右边的极限等于 $+\infty$, 见文献 [9] 引理 4.5.(c)).

为推导 Tanaka 公式，对初始测度引进如下的假设：

假设 1.1 固定 $x\in\mathbb{R}^d$, 假设 $X_0\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}$ 满足

$$\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} p_s^\alpha(x-y)X_0(dy)ds<+\infty. \tag{1.6}$$

显然，当 $X_0=h(y)dy\neq 0(h\in\mathcal{B}_b^+)$ 时，假设 1.1 对任给 $x\in\mathbb{R}^d$ 成立. 注意假设 1.1 能推出 (见下文性质 2.1)

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} p_s^\alpha(x-y)X_0(dy)ds<\infty, \quad \forall t\in[0,\infty).$$

类似文献 [9] 引理 4.5.(a) 和 (b), 可证对 (α,d,β) 超过程 X, 当 $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$ 时，在假设 1.1 下，$(L_t^x)_{t\geqslant 0}$ 存在.

在假设 1.1 下，对 (α,d,β) 超过程 $X(X_0=\mu)$, 当 $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$ 时，由文献 [4] 中 $(L_t^x)_{t\geqslant 0}$ 的 Laplace 变换，易知

$$E_\mu^{\alpha,\beta}[L_t^x]=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} p_s^\alpha(x-y)\mu(dy)ds,$$

于是由文献 [10] 的定理 1.1, 知 L_t^x 关于 t 连续，$P_\mu^{\alpha,\beta}$-a.s.

现在我们来描述关于 (α,d,β) 超过程 Tanaka 公式的结果.

若 $X_0=h(y)dy\neq 0$, $h\in\mathcal{B}_b^+$, Adler 与 Lewin[6] 利用 L^2- 收敛技巧证明了 $(\alpha,d,1)$ 超过程 X 在 $d<2\alpha$ 时关于 $(L_t^x)_{t\geqslant 0}$ 的 Tanaka 公式成立. 文献 [11] 的定理 6.1 建立了关于 $(2,d,1)$ 超过程 X(有或没有移民) 在 $d\leqslant 3$ 及

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} p_t^2(x-y)X_0(dy)dt<+\infty$$

时关于 $(L_t^x)_{t\geqslant 0}$ 的 Tanaka 公式. 文献 [11] 将上述结果推广到了碰撞局部时. 利用 Fourier 变换技巧，当 X_0 为 Lebesgue 测度时，文献 [12] 的定理 7 重新证明了文献 [6] 的结果. 在与文献 [6] 相同的初始条件下，Mytnik 与 Xiang[13] 利用 $L^{1+\theta}$- 收敛技巧 $(0\leqslant\theta<\beta)$, 对满足 $\alpha\in(0,2]$, $\beta\in(0,1]$, $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$ 的 (α,d,β) 超过程 X 证明了关于局部时的 Tanaka 公式对所有的时间 $t\in[0,\infty)$ 同时成立. 对具有如下分支特征的超 α 稳定过程：

$$\Phi(y,z)=c(y)|z|^{1+\beta}+b(y)z, \quad \forall\, y\in\mathbb{R}^d, \quad z\in\mathbb{R}^1, \tag{1.7}$$

其中 $\beta\in(0,1]$, $c(\cdot),b(\cdot)\in\mathcal{C}_b^+((\alpha,d,\beta)$ 超过程的分支特征为 $\Phi(y,z)=|z|^{1+\beta})$, 当 $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$ 且 $X_0=h(y)dy\in\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}$(不是 $\mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d)$), $h\in\mathcal{B}_b^+$ 时，Villa1) 利用 L^1- 收敛技巧证明了相应的 Tanaka 公式．但 Villa 的 Tanaka 公式仅对每个固定的时间 $t\in[0,\infty)$ 成立.

当 $X_0=h(y)dy\neq 0$, $h\in\mathcal{B}_b^+$ 时，Dynkin[5] 建立了某些超过程的局部时的多重随机积分表示.

令

$$G_\alpha^\lambda(y)=\int_0^\infty \exp\{-\lambda t\}p_t^\alpha(y)dt,\quad \forall\,\lambda>0,\quad y\in\mathbb{R}^d,$$

则 G_α^λ 是适定的且在分布意义下满足如下方程：

$$(-\Delta_\alpha+\lambda)G_\alpha^\lambda(\cdot-y)=\delta_y,\quad \forall\,y\in\mathbb{R}^d. \tag{1.8}$$

利用一些新观察，我们证明如下的关于 Tanaka 公式的结果：

定理 1.2　固定 α, d, β, 使之满足 $0<\beta\leqslant 1$, $0<\alpha\leqslant 2$, $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$. 令 (α,d,β) 超过程 $X(X_0=\mu)$ 满足假设 1.1, 则对任意的 $\lambda\in(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}\big\langle X_t,G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\big\rangle=&\big\langle X_0,G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\big\rangle+\lambda\int_0^t\big\langle X_s,G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\big\rangle\,ds\\&+M_t(G_\alpha^\lambda(\cdot-x))-L_t^x,\quad\forall\,t\in[0,\infty),\quad P_\mu^{\alpha,\beta}\text{-}a.s.,\end{aligned}\tag{1.9}$$

其中 $M_t(G_\alpha^\lambda(\cdot-x))$ 是右连左极的 $\mathcal{F}_t$- 鞅 (特别地，连续 $\mathcal{F}_t$- 鞅若 $\beta=1$), 且对任意的 $T\in[0,\infty)$ 及任意的 $\theta\in[0,\beta)$,

$$E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\sup_{t\leqslant T}\left|\big\langle X_t,G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\big\rangle\right|^{1+\theta}\right]<+\infty,$$

$$E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\sup_{t\leqslant T}\left|M_t(G_\alpha^\lambda(\cdot-x))\right|^{1+\theta}\right]<+\infty,$$

$$E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\sup_{t\leqslant T}(L_t^x)^{1+\theta}\right]=E_\mu^{\alpha,\beta}\left[(L_T^x)^{1+\theta}\right]<+\infty.$$

注记 1.3　为得到 Tanaka 公式，$\big\langle X_0,G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\big\rangle<+\infty$ 对某个 $\lambda\in(0,\infty)$ 成立是一个基本的要求．显然，该条件可推出假设 1.1. 回顾对 $(2,d,\beta)$ 超过程 X, 当 $\beta\in(0,1)$, $2\leqslant d<2+\frac{2}{\beta}$ 时，$(L_t^x)_{t\geqslant 0}$ 在 x 处不存在，如果 $X_0\in\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}p_s^2(x-y)X_0(dy)ds=\infty.$$

因此为得到 Tanaka 公式，假设 1.1 是最优的.

定理 1.2 可推广至 Dynkin[10] 引进的更广的一类自然的可加泛函，亦可平推至具有 (1.7) 式所描述的分支特征的超 α 稳定过程.

在本文的余下部分，用 c 及 C 表正的有限常数 (它们的值在不同的地方可以不同); 并固定 $x\in\mathbb{R}^d$. 形如 $C(a,b,\cdots)$ 的常数意味着它依赖于参数 $a,b,\cdots$.

1) Villa J. Local time and a Tanaka type formula for a class of discontinuous measure-valued branching processes. Preprint, 2003

2 预备知识：假设 1.1 的等价性质及一些估计

以 Φ 记具有如下性质的函数 f 全体：$f \in \mathcal{C}_b$, $\lim_{|y|\to\infty} \frac{f(y)}{\phi_r(y)}$ 存在且有限. 赋予 Φ 如下的范数：

$$\|f\|_\Phi = \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \frac{|f(y)|}{\phi_r(y)}, \quad f \in \Phi,$$

则 $(\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ 为可分 Banach 空间. 回顾如下关于 $p_t^\alpha(\cdot)(\alpha \in (0,2))$ 的上界估计：

$$p_t^\alpha(y) \leqslant C(\eta, d, \alpha) t^{\frac{\eta-d}{\alpha}} |y|^{-\eta}, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \quad \forall\, \eta \in [0, \alpha+d],$$

及

$$p_t^2(y) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0.$$

易知 $\forall\, \alpha \in (0,2]$, $\forall\, \lambda \in (0,\infty)$, $\forall\, t \in (0,\infty)$, 成立

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{p_t^\alpha(y-x)}{\phi_r(y)} = 0, \quad p_t^\alpha(\cdot - x) \in \Phi, \quad \sup_{s\geqslant t} e^{-\lambda s} \|p_s^\alpha(\cdot - x)\|_\Phi < +\infty. \tag{2.1}$$

性质 2.1 假设 1.1 等价于

$$\int_{\mathbb{R}^d} G_\alpha^\lambda(x-y) X_0(dy) < +\infty, \quad \forall\, \lambda \in (0,\infty). \tag{2.2}$$

证 只需检查假设 1.1 可推出 (2.2) 式. 事实上, 对任意的 $\lambda \in (0,\infty)$, 由 (2.1) 式,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} G_\alpha^\lambda(x-y) X_0(dy) \\
&= \left\{ \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} + \int_1^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \right\} e^{-\lambda t} p_t^\alpha(x-y) X_0(dy) dt \\
&\leqslant \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} p_t^\alpha(x-y) X_0(dy) dt \\
&\quad + \left(\sup_{t\geqslant 1} e^{-\frac{\lambda t}{2}} \|p_t^\alpha(\cdot - x)\|_\Phi \right) \int_1^\infty \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\lambda t}{2}} \phi_r(y) X_0(dy) dt \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} p_t^\alpha(x-y) X_0(dy) dt \\
&\quad + \left(\sup_{t\geqslant 1} e^{-\frac{\lambda t}{2}} \|p_t^\alpha(\cdot - x)\|_\Phi \right) \langle X_0, \phi_r \rangle \int_1^\infty e^{-\frac{\lambda t}{2}} dt \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

引理 2.2 在假设 1.1 下, 对任意的 $\lambda \in (0,\infty)$, $t \in [0,\infty)$, 及 $d < \alpha + \frac{\alpha}{\beta}$,

$$\int_0^t \left\langle X_0, S_u^\alpha((G_\alpha^\lambda(\cdot - x))^{1+\beta}) \right\rangle du < +\infty.$$

证 (1) 令 $d < \alpha + \frac{\alpha}{\beta}$. 固定 $a \leqslant 1$, $b \in (0,\beta)$, 使得 $d < a\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{ab\alpha}{\beta}$, 则

$$(G_\alpha^\lambda)^{1+\beta}(\cdot) \leqslant C(a,b) \int_0^\infty e^{-\lambda t(1+b)} t^{\beta(a - \frac{d}{\alpha} - \frac{ab}{\beta})} p_t^\alpha(\cdot) dt$$

对某个 $C(a,b)$ 成立．实际上，取 $\beta_*=\frac{1+\beta}{\beta-b}$, 由 Hölder 不等式，易知

$$
\begin{aligned}
(G_\alpha^\lambda)^{1+\beta}(\cdot) &= \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_t^\alpha(\cdot)dt\right)^{1+\beta}\\
&= \left\{\int_0^\infty (e^{-\frac{\lambda t(1+b)}{1+\beta}}t^{\frac{a}{\beta_*}}p_t^\alpha(\cdot))(e^{-\frac{\lambda t}{\beta_*}}t^{-\frac{a}{\beta_*}})dt\right\}^{1+\beta}\\
&\leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t(1+b)}t^{a(\beta-b)}(p_t^\alpha(\cdot))^{1+\beta}dt\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda(1-\frac{b}{\beta})t}t^{-a(1-\frac{b}{\beta})}dt\right\}^\beta\\
&\leqslant C(a,b)\int_0^\infty e^{-\lambda t(1+b)}t^{\beta(a-\frac{d}{\alpha}-\frac{ab}{\beta})}p_t^\alpha(\cdot)dt,
\end{aligned}
$$

其中利用了当 $t>0$ 时,

$$
p_t^\alpha(y)=t^{-\frac{d}{\alpha}}p_1^\alpha(t^{-\frac{1}{\alpha}}y)\leqslant t^{-\frac{d}{\alpha}}\sup_{z\in\mathbb{R}^d}p_1^\alpha(z)<+\infty,\quad \forall\, y\in\mathbb{R}^d.
$$

(2) 注意到 $\beta(a-\frac{ab}{\beta}-\frac{d}{\alpha})>-1$, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \left\langle X_0,S_u^\alpha((G_\alpha^\lambda(\cdot-x))^{1+\beta})\right\rangle du\\
&\leqslant C(a,b)\int_0^t\left\langle X_0,S_u^\alpha\left(\int_0^\infty e^{-\lambda(1+b)s}s^{\beta(a-\frac{ab}{\beta}-\frac{d}{\alpha})}p_s^\alpha(\cdot-x)ds\right)\right\rangle du\\
&= C(a,b)\int_0^t\left\langle X_0,\int_0^\infty e^{-\lambda(1+b)s}s^{\beta(a-\frac{ab}{\beta}-\frac{d}{\alpha})}p_{s+u}^\alpha(\cdot-x)ds\right\rangle du\\
&= C(a,b)\int_0^\infty\left\langle X_0,e^{-\lambda(1+b)s}s^{\beta(a-\frac{ab}{\beta}-\frac{d}{\alpha})}\int_0^t p_{s+u}^\alpha(\cdot-x)du\right\rangle ds\\
&\leqslant C(a,b)e^{\lambda t}\int_0^\infty\left\langle X_0,e^{-\lambda bs}s^{\beta(a-\frac{ab}{\beta}-\frac{d}{\alpha})}G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\right\rangle ds\\
&= C(a,b)e^{\lambda t}\left\langle X_0,G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\right\rangle\int_0^\infty e^{-\lambda bs}s^{\beta(a-\frac{ab}{\beta}-\frac{d}{\alpha})}ds<+\infty.
\end{aligned}
$$

证毕.

对任给的 $\varepsilon\geqslant 0$ 及 $\lambda\in(0,\infty)$, 定义

$$
G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)=e^{\lambda\varepsilon}\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}p_t^\alpha(\cdot-x)dt, \tag{2.3}
$$

则

$$
\lim_{\varepsilon\downarrow 0}G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(y-x)=G_\alpha^\lambda(y-x),\quad \forall\, y\in\mathbb{R}^d. \tag{2.4}
$$

引理 2.3　在假设 1.1 下，对任给的 $T\in[0,\infty)$ 及 $\lambda\in(0,\infty)$,

$$
\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 1}\left\langle X_0,S_t^\alpha(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))\right\rangle<+\infty, \tag{2.5}
$$

且若 $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$, 则

$$
\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 1}\int_0^t\left\langle X_0,S_{t-s}^\alpha\left(\left(S_s^\alpha(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))\right)^{1+\beta}\right)\right\rangle ds<+\infty, \tag{2.6}
$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 1}\int_0^t\left\langle X_0,S_{t-s}^{\alpha}\left(\left(\int_0^s S_u^{\alpha}(G_{\alpha}^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))du\right)^{1+\beta}\right)\right\rangle ds<+\infty. \qquad (2.7)$$

证 注意到

$$\begin{aligned}\left\langle X_0,S_t^{\alpha}(G_{\alpha}^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))\right\rangle &= e^{\lambda(t+\varepsilon)}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\varepsilon}^{\infty}e^{-\lambda(t+s)}p_{s+t}^{\alpha}(y-x)dsX_0(dy)\\ &\leqslant e^{\lambda(t+\varepsilon)}\left\langle X_0,G_{\alpha}^{\lambda}(\cdot-x)\right\rangle,\end{aligned}$$

由性质 2.1, (2.5) 式成立.

另一方面，对任意的 $s\in[0,t]$ 与 $\varepsilon\in[0,\infty)$,

$$\begin{aligned}S_s^{\alpha}(G_{\alpha}^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))(y) &= e^{\lambda(s+\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\infty}e^{-\lambda(s+u)}p_{s+u}^{\alpha}(y-x)du\\ &\leqslant e^{\lambda(t+\varepsilon)}G_{\alpha}^{\lambda}(y-x),\quad \forall\, y\in\mathbb{R}^d,\end{aligned}$$

因此当 $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$ 时，由引理 2.2, 在假设 1.1 下,

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left\langle X_0,S_{t-s}^{\alpha}\left(\left(S_s^{\alpha}(G_{\alpha}^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))\right)^{1+\beta}\right)\right\rangle ds\\ &\leqslant e^{\lambda(t+\varepsilon)(1+\beta)}\int_0^t\left\langle X_0,S_{t-s}^{\alpha}\left((G_{\alpha}^{\lambda}(\cdot-x))^{1+\beta}\right)\right\rangle ds\\ &= e^{\lambda(t+\varepsilon)(1+\beta)}\int_0^t\left\langle X_0,S_u^{\alpha}\left((G_{\alpha}^{\lambda}(\cdot-x))^{1+\beta}\right)\right\rangle du,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 1}\int_0^t\left\langle X_0,S_{t-s}^{\alpha}\left(\left(S_s^{\alpha}(G_{\alpha}^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))\right)^{1+\beta}\right)\right\rangle ds\\ &\leqslant e^{\lambda(T+1)(1+\beta)}\int_0^T\left\langle X_0,S_u^{\alpha}\left((G_{\alpha}^{\lambda}(\cdot-x))^{1+\beta}\right)\right\rangle du<+\infty;\end{aligned}$$

$$\int_0^s S_u^{\alpha}(G_{\alpha}^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))(y)du\leqslant te^{\lambda(t+\varepsilon)}G_{\alpha}^{\lambda}(y-x),\quad\forall\, y\in\mathbb{R}^d,\quad s\leqslant t,$$

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 1}\int_0^t\left\langle X_0,S_{t-s}^{\alpha}\left(\left(\int_0^s S_u^{\alpha}(G_{\alpha}^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))du\right)^{1+\beta}\right)\right\rangle ds\\ &\leqslant T^{1+\beta}e^{\lambda(T+1)(1+\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t\left\langle X_0,S_{t-s}^{\alpha}((G_{\alpha}^{\lambda}(\cdot-x))^{1+\beta})\right\rangle ds\\ &= T^{1+\beta}e^{\lambda(T+1)(1+\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t\left\langle X_0,S_u^{\alpha}((G_{\alpha}^{\lambda}(\cdot-x))^{1+\beta})\right\rangle du\\ &= T^{1+\beta}e^{\lambda(T+1)(1+\beta)}\int_0^T\left\langle X_0,S_u^{\alpha}((G_{\alpha}^{\lambda}(\cdot-x))^{1+\beta})\right\rangle du<+\infty.\end{aligned}$$

引理 2.4 在假设 1.1 下，对任意的 $T\in[0,\infty)$,

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1}\int_0^T\langle X_0,S_s^{\alpha}(p_{\varepsilon}^{\alpha}(\cdot-x))\rangle ds<+\infty,$$

且若 $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$, 则

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1}\int_0^t\left\langle X_0,S_{t-s}^{\alpha}\left(\left(\int_0^s S_u^{\alpha}(p_{\varepsilon}^{\alpha}(\cdot-x))du\right)^{1+\beta}\right)\right\rangle ds<+\infty.$$

证　由性质 2.1,

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1}\int_0^T \langle X_0, S_s^\alpha(p_\varepsilon^\alpha(\cdot - x))\rangle\, ds\\
=&\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1}\int_0^T \left\langle X_0, p_{s+\varepsilon}^\alpha(\cdot - x)\right\rangle ds\\
\leqslant& e^{T+1}\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1}\left\langle X_0, \int_0^T e^{-(s+\varepsilon)}p_{s+\varepsilon}^\alpha(\cdot - x)ds\right\rangle\\
\leqslant& e^{T+1}\left\langle X_0, G_\alpha^1(\cdot - x)\right\rangle < +\infty.
\end{aligned}$$

因为对任意的 $s\in[0,t]$, $y\in\mathbb{R}^d$ 及 $\varepsilon\in[0,1]$,

$$\int_0^s S_u^\alpha(p_\varepsilon^\alpha(\cdot - x))(y)du = \int_0^s p_{u+\varepsilon}^\alpha(y-x)du \leqslant e^{t+\varepsilon}G_\alpha^1(y-x),$$

所以由引理 2.2, 当 $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1}\int_0^t \left\langle X_0, S_{t-s}^\alpha\left(\left(\int_0^s S_u^\alpha(p_\varepsilon^\alpha(\cdot - x))du\right)^{1+\beta}\right)\right\rangle ds\\
\leqslant& e^{(T+1)(1+\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t \left\langle X_0, S_{t-s}^\alpha\left((G_\alpha^1(\cdot - x))^{1+\beta}\right)\right\rangle ds\\
=& e^{(T+1)(1+\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^t \left\langle X_0, S_u^\alpha\left((G_\alpha^1(\cdot - x))^{1+\beta}\right)\right\rangle du\\
=& e^{(T+1)(1+\beta)}\int_0^T \left\langle X_0, S_u^\alpha\left((G_\alpha^1(\cdot - x))^{1+\beta}\right)\right\rangle du < +\infty.
\end{aligned}$$

推论 2.5　设 $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$, 则对任意的 $T\in[0,\infty)$, $\theta\in(0,\beta)$ 与 $\lambda\in(0,\infty)$, 在假设 1.1 下,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 1}E_{X_0}^{\alpha,\beta}\left[\left\langle X_t, G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)\right\rangle^{1+\theta}\right] < +\infty, \tag{2.8}$$

$$\sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 1}E_{X_0}^{\alpha,\beta}\left[\left(\int_0^T \left\langle X_s, G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)\right\rangle ds\right)^{1+\theta}\right] < +\infty, \tag{2.9}$$

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1}E_{X_0}^{\alpha,\beta}\left[\left(\int_0^T \langle X_s, p_\varepsilon^\alpha(\cdot - x)\rangle\, ds\right)^{1+\theta}\right] < +\infty. \tag{2.10}$$

证　注意到文献 [13] 的引理 2.2: 对任给的 $t>0$, $\theta\in(0,\beta)$, $\psi\geqslant 0$ 及 $\mu\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
&E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\langle X_t,\psi\rangle^{1+\theta}\right]\\
\leqslant& 1+C(\theta)\left[\int_0^t \left\langle \mu, S_{t-s}^\alpha\big((S_s^\alpha\psi)^{1+\beta}\big)\right\rangle ds + \langle\mu, S_t^\alpha\psi\rangle^{1+\beta}\right],
\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$
\begin{aligned}
&E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\left(\int_0^t \langle X_s,\psi\rangle\,ds\right)^{1+\theta}\right]\\
&\leqslant 1+C(\theta)\left[\left(\int_0^t \langle \mu, S_s^\alpha\psi\rangle\,ds\right)^{1+\beta}+\int_0^t\left\langle \mu, S_{t-s}^\alpha\left(\left(\int_0^s S_u^\alpha\psi du\right)^{1+\beta}\right)\right\rangle ds\right],
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

则 (2.5)、(2.6) 及 (2.11) 式 $\Rightarrow$ (2.8) 式；(2.5)、(2.7) 及 (2.12) 式 $\Rightarrow$ (2.9) 式；引理 2.4 与 (2.12) 式 $\Rightarrow$ (2.10) 式.

3 定理 1.2 的证明

由文献 [14] 的引理 (3.2) 和 (3.3)，$\{S_t^\alpha\}_{t\geqslant 0}$ 是 Banach 空间 $(\Phi,\|\cdot\|_\Phi)$ 上的强连续有界算子半群．用 $\mathrm{Dom}(\Delta_\alpha)$ 表 $\{S_t^\alpha\}_{t\geqslant 0}$ 在 Banach 空间 $(\Phi,\|\cdot\|_\Phi)$ 上的强生成算子的定义域．注意到 (2.3) 和 (2.4) 式，易知

$$
\Delta_\alpha G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)=-p_\varepsilon^\alpha(\cdot-x)+\lambda G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x),\quad \forall\,\lambda\in(0,\infty),\quad \forall\,\varepsilon\in(0,\infty).\tag{3.1}
$$

引理 3.1 对任意的 $\lambda\in(0,\infty)$ 及 $\varepsilon\in(0,\infty)$,

$$
G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\in\Phi,\quad \Delta_\alpha G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\in\Phi,
$$

且

$$
\lim_{t\downarrow 0}\left\|\frac{1}{t}\left\{S_t^\alpha(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))(\cdot)-G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\right\}+p_\varepsilon^\alpha(\cdot-x)-\lambda G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\right\|_\Phi=0,
$$

即 $G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\in\mathrm{Dom}(\Delta_\alpha)$.

证 由 (2.1) 式，得

$$
\begin{aligned}
\frac{G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(y-x)}{\phi_r(y)}&=e^{\lambda\varepsilon}\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda s}\,\frac{p_s^\alpha(y-x)}{\phi_r(y)}ds\\
&\leqslant e^{\lambda\varepsilon}\int_\varepsilon^\infty e^{-\frac{\lambda s}{2}}ds\left(\sup_{t\geqslant\varepsilon}\ e^{-\frac{\lambda t}{2}}\|p_t^\alpha(\cdot-x)\|_\Phi\right)<+\infty,\quad \forall\,y\in\mathbb{R}^d.
\end{aligned}
$$

因此由控制收敛定理及 (2.1) 式，有

$$
\lim_{|y|\to\infty}\frac{G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(y-x)}{\phi_r(y)}=e^{\lambda\varepsilon}\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda s}\lim_{|y|\to\infty}\frac{p_s^\alpha(y-x)}{\phi_r(y)}ds=0,
$$

这推出 $G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\in\Phi$. 进一步，由 (3.1) 和 (2.1) 式知 $\Delta_\alpha G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\in\Phi$.

易知

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\left\{S_t^\alpha(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))(\cdot)-G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\right\}\\
&=\frac{1}{t}\left\{e^{\lambda(t+\varepsilon)}\int_{t+\varepsilon}^\infty e^{-\lambda s}p_s^\alpha(\cdot-x)ds-e^{\lambda\varepsilon}\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda s}p_s^\alpha(\cdot-x)ds\right\},
\end{aligned}
$$

$$
-p_\varepsilon^\alpha(\cdot-x)+\lambda G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)=-p_\varepsilon^\alpha(\cdot-x)+\lambda e^{\lambda\varepsilon}\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda s}p_s^\alpha(\cdot-x)ds,
$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}\left\{S_t^\alpha(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))(\cdot)-G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\right\}+p_\varepsilon^\alpha(\cdot-x)-\lambda G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\\&=\left\{\frac{1}{t}\left(e^{\lambda(t+\varepsilon)}-e^{\lambda\varepsilon}\right)\int_{t+\varepsilon}^\infty e^{-\lambda s}p_s^\alpha(\cdot-x)ds-\lambda e^{\lambda\varepsilon}\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda s}p_s^\alpha(\cdot-x)ds\right\}\\&\quad-\left\{\frac{e^{\lambda\varepsilon}}{t}\int_\varepsilon^{t+\varepsilon}e^{-\lambda s}p_s^\alpha(\cdot-x)ds-p_\varepsilon^\alpha(\cdot-x)\right\}.\end{aligned}$$

由 (2.1) 式，不难证明

$$\lim_{t\downarrow0}\left\|\frac{1}{t}\left\{S_t^\alpha(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))(\cdot)-G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\right\}+p_\varepsilon^\alpha(\cdot-x)-\lambda G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\right\|_\Phi=0.$$

因此 $G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\in\mathrm{Dom}(\Delta_\alpha)$.

引理 3.2　给定 (α,d,β) 超过程 $X(\alpha\in(0,2],\ \beta\in(0,1])$ 及 $X_0\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d)$, 则对任意的 $\varepsilon\in(0,\infty)$ 及 $\lambda\in(0,\infty)$, 在 $P_{X_0}^{\alpha,\beta}$ 下，

$$\begin{aligned}&M_t(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))\\&=\left\langle X_t,G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\right\rangle-\left\langle X_0,G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\right\rangle-\int_0^t\left\langle X_s,\Delta_\alpha G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\right\rangle ds\end{aligned}$$

是 $\mathcal{F}_t$- 鞅.

证　(i) 由引理 3.1, 有

$$0<G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\in\Phi,\quad \Delta_\alpha(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))\in\Phi,\quad G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\in\mathrm{Dom}(\Delta_\alpha).$$

注意到 $\mathcal{C}_c^2\bigcap\mathrm{Dom}(\Delta_\alpha)$ 是 Δ_α 的一个核，可以选取 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{C}_c^2\bigcap\mathrm{Dom}(\Delta_\alpha)$, 满足当 $n\to\infty$ 时，在空间 $(\Phi,\|\cdot\|_\Phi)$ 中，

$$0\leqslant f_n\to G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x),\quad \Delta_\alpha f_n\to\Delta_\alpha(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)).$$

(ii) 对任意的 $0\leqslant\psi\in\mathcal{C}_c^2\bigcap\mathrm{Dom}(\Delta_\alpha)$ 及 $t\in[0,\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{|y|\geqslant n\}}S_t^\alpha\psi(y)X_0(dy)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_{\{|y|\geqslant n\}}S_s^\alpha(|\Delta_\alpha\psi|)(y)X_0(dy)ds=0,$$

其中利用了

$$S_t^\alpha\psi\in\Phi,\quad S_t^\alpha(|\Delta_\alpha\psi|)\in\Phi.$$

由文献 [13] 引理 3.1 的证明，易知在 $P_{X_0}^{\alpha,\beta}$ 下，

$$M_t(\psi)=\langle X_t,\psi\rangle-\langle X_0,\psi\rangle-\int_0^t\langle X_s,\Delta_\alpha\psi\rangle ds$$

是 $\mathcal{F}_t$- 鞅.

(iii) 由 (ii) 知 $M_t(f_n)$ 在 $P_{X_0}^{\alpha,\beta}$ 下是 $\mathcal{F}_t$- 鞅. 注意 $\{S_t^\alpha\}_{t\geqslant0}$ 在 Banach 空间 $(\Phi,\|\cdot\|_\Phi)$ 上是强连续有界算子半群. 由一致有界性原则，对任意的 $T\in[0,\infty)$, 存在正常数 $C(T)$, 满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|S_t^\alpha f\|_\Phi\leqslant C(T)\|f\|_\Phi,\quad \forall\ f\in\Phi,$$

因此，对任给的 $t \in [0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} E_{X_0}^{\alpha,\beta}\left[\,\left|\langle X_t, f_n\rangle - \left\langle X_t, G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)\right\rangle\right|\,\right] \\
\leqslant\ &\limsup_{n\to\infty} E_{X_0}^{\alpha,\beta}\left[\,\left\langle X_t, |f_n(\cdot) - G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)|\right\rangle\,\right] \\
=\ &\limsup_{n\to\infty} \left\langle X_0, S_t^\alpha[\,|f_n(\cdot) - G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)|\,]\right\rangle \\
\leqslant\ &\limsup_{n\to\infty} \left\langle X_0, \left\|S_t^\alpha[\,|f_n(\cdot) - G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)|\,]\right\|_\Phi \phi_r\right\rangle \\
\leqslant\ &\limsup_{n\to\infty}\ C(t)\left\|\,|f_n(\cdot) - G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)|\,\right\|_\Phi \langle X_0, \phi_r\rangle \\
=\ &\limsup_{n\to\infty}\ C(t)\left\|f_n(\cdot) - G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)\right\|_\Phi \langle X_0, \phi_r\rangle \\
=\ &0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} E_{X_0}^{\alpha,\beta}\left[\,\left|\int_0^t \langle X_s, \Delta_\alpha f_n\rangle - \left\langle X_s, \Delta_\alpha G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)\right\rangle ds\right|\,\right] \\
\leqslant\ &\limsup_{n\to\infty} E_{X_0}^{\alpha,\beta}\left[\int_0^t \left\langle X_s, |\Delta_\alpha f_n - \Delta_\alpha G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)|\right\rangle ds\right] \\
=\ &\limsup_{n\to\infty} \int_0^t \left\langle X_0, S_s^\alpha[\,|\Delta_\alpha f_n - \Delta_\alpha G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)|\,]\right\rangle ds \\
\leqslant\ &\limsup_{n\to\infty} \int_0^t \left\langle X_0, \left\|S_s^\alpha[\,|\Delta_\alpha f_n - \Delta_\alpha G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)|\,]\right\|_\Phi \phi_r\right\rangle ds \\
\leqslant\ &\limsup_{n\to\infty} \int_0^t \left\langle X_0, C(t)\left\|\,|\Delta_\alpha f_n - \Delta_\alpha G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)|\,\right\|_\Phi \phi_r\right\rangle ds \\
=\ &\limsup_{n\to\infty}\ tC(t)\langle X_0, \phi_r\rangle \|\Delta_\alpha f_n - \Delta_\alpha G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)\|_\Phi = 0.
\end{aligned}$$

于是由标准的鞅论，知 $M_t(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x))$ 在 $P_{X_0}^{\alpha,\beta}$ 下是一 $\mathcal{F}_t$- 鞅．证毕．

对任意的 $\lambda \in (0,\infty)$ 及 $\varepsilon \in (0,\infty)$, 有

$$\begin{aligned}
&\left\langle X_t, G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)\right\rangle \\
=\ &\left\langle X_0, G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)\right\rangle + \int_0^t \left\langle X_s, \Delta_\alpha G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)\right\rangle ds \\
&+ M_t(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)), \quad t \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

任给 $0 < \varepsilon \leqslant 1$, 令

$$L_{t,\varepsilon}^x \equiv \int_0^t \langle X_s, p_\varepsilon^\alpha(\cdot - x)\rangle ds, \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{3.3}$$

由 (3.1) 式，有

$$\begin{aligned}
&\left\langle X_t, G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)\right\rangle \\
=\ &\left\langle X_0, G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)\right\rangle + \lambda\int_0^t \left\langle X_s, G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)\right\rangle ds \\
&+ M_t(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot - x)) - L_{t,\varepsilon}^x, \quad t \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

注意当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，$p_\varepsilon^\alpha(y-x)\,dy\Rightarrow\delta_x$, 且

$$G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(y-x)\to G_\alpha^\lambda(y-x),\quad \forall\, y\in\mathbb{R}^d.$$

为得到 Tanaka 公式，需证对任意的 $0<\theta<\beta$, 在空间 $L^{1+\theta}(\Omega,\mathcal{F},P_\mu^{\alpha,\beta})$ 上，(3.4) 式中的每一项关于 $t\leqslant T$ 一致地收敛于 (1.9) 式中的对应项，这里 $T\geqslant 0$ 为任意的常数.

引理 3.3　对 (α,d,β) 超过程 X ($\alpha\in(0,2]$, $\beta\in(0,1]$, $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$), 设 $X_0=\mu\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}$ 满足假设 1.1, 则对任意的 $t\in[0,\infty)$, $\theta\in(0,\beta)$ 及 $\lambda\in(0,\infty)$,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\left(\left\langle X_t,\left|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\right|\right\rangle\right)^{1+\theta}\right]=0, \tag{3.5}$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\left(\int_0^t\left\langle X_s,\left|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\right|\right\rangle ds\right)^{1+\theta}\right]=0, \tag{3.6}$$

$$E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\,(L_t^x)^{1+\theta}\,\right]<+\infty,\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\left|L_{t,\varepsilon}^x-L_t^x\right|^{1+\theta}\right]=0. \tag{3.7}$$

证　因为

$$\left|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\right|\leqslant e^\lambda G_\alpha^\lambda(\cdot-x),\quad \forall\,\varepsilon\in(0,1], \tag{3.8}$$

所以由 (2.8) 和 (2.9) 式知，以 $P_\mu^{\alpha,\beta}$- 概率 1, 对所有的 $0<\varepsilon\leqslant 1$,

$$\left\langle X_t,|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^\lambda(\cdot-x)|\right\rangle\leqslant e^\lambda\left\langle X_t,G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\right\rangle<+\infty, \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}&\left\langle\int_0^t X_s ds,\left|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\right|\right\rangle\\ &\leqslant e^\lambda\left\langle\int_0^t X_s ds,G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\right\rangle<+\infty,\end{aligned} \tag{3.10}$$

且对任意的 $\eta\in(0,\beta)$,

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\left(\left\langle X_t,\left|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\right|\right\rangle\right)^{1+\eta}\right]<+\infty, \tag{3.11}$$

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\left(\left\langle\int_0^t X_s ds,\left|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\right|\right\rangle\right)^{1+\eta}\right]<+\infty. \tag{3.12}$$

当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时,

$$G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(y-x)\to G_\alpha^\lambda(y-x),\quad \forall\, y\in\mathbb{R}^d.$$

由 (3.8)~(3.10) 式，当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时,

$$|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(y-x)-G_\alpha^\lambda(y-x)|\to 0,\quad X_t\text{ - a.s. } y,\quad P_\mu^{\alpha,\beta}\text{ - a.s.}, \tag{3.13}$$

$$|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(y-x)-G_\alpha^\lambda(y-x)|\to 0,\quad \int_0^t X_s ds\text{ - a.s. } y,\quad P_\mu^{\alpha,\beta}\text{ - a.s.} \tag{3.14}$$

因此由 (3.8)~(3.10)、(3.13) 和 (3.14) 式及控制收敛定理得

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\langle X_t,\,\left|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\right|\right\rangle=0,\quad P_\mu^{\alpha,\beta}\text{ - a.s.},$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\langle\int_0^t X_s ds,\ \left|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^\lambda(\cdot-x)\right|\right\rangle=0,\ P_\mu^{\alpha,\beta}\text{ - a.s.},$$

于是结合 (3.11) 和 (3.12) 式，即得 (3.5) 和 (3.6) 式.

当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，$L_{t,\varepsilon}^x\to L_t^x$(依概率). 由 Fatou 引理与 (2.10) 式，有

$$E_\mu^{\alpha,\beta}\left[(L_t^x)^{1+\eta}\right]\leqslant\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[(L_{t,\varepsilon}^x)^{1+\eta}\right]<+\infty,\quad\forall\,\eta\in(0,\beta),$$

$$\sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 1}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[(L_{t,\varepsilon}^x)^{1+\eta}\right]<+\infty,\quad\forall\,\eta\in(0,\beta),$$

其中 $L_{t,0}^x=L_t^x$. 因此,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\left|L_{t,\varepsilon}^x-L_t^x\right|^{1+\theta}\right]=0.$$

引理 3.4 对 (α,d,β) 超过程 X ($\alpha\in(0,2]$, $\beta\in(0,1]$, $d<\alpha+\frac{\alpha}{\beta}$), 设 $X_0=\mu\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}$ 满足假设 1.1, 则对任意的 $\lambda\in(0,\infty)$, 存在唯一的 $\mathcal{F}_t$- 鞅 $M_t(G_\alpha^\lambda(\cdot-x))$, 使得 $\forall\,T\in(0,\infty)$, $0<\theta<\beta$,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|M_t(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))-M_t(G_\alpha^\lambda(\cdot-x))\right|^{1+\theta}\right]=0.$$

证 只需证

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\downarrow 0}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|M_t(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))-M_t(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon'}(\cdot-x))\right|^{1+\theta}\right]=0,$$

因为若如此，则鞅 $M_t(G_\alpha^\lambda(\cdot-x))$ 可定义为鞅 $M_t(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))$ 当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时的极限.

注意到

$$\begin{aligned}&M_t(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x))-M_t(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon'}(\cdot-x))\\&=M_t(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^{\lambda,\varepsilon'}(\cdot-x)),\quad\forall\,t\geqslant 0,\end{aligned}$$

由 Doob 极大值不等式与引理 3.2, 可得

$$\begin{aligned}&E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\sup_{t\leqslant T}\left|M_t(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^{\lambda,\varepsilon'}(\cdot-x))\right|^{1+\theta}\right]\\&\leqslant C(\theta)E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\left|M_T(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^{\lambda,\varepsilon'}(\cdot-x))\right|^{1+\theta}\right].\end{aligned}$$

由 (3.4) 式，有

$$\begin{aligned}&E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\left|M_T(G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^{\lambda,\varepsilon'}(\cdot-x))\right|^{1+\theta}\right]\\&\leqslant C(\theta)\left\{E_\mu^{\alpha,\beta}\left[|L_{T,\varepsilon}-L_{T,\varepsilon'}|^{1+\theta}\right]+\left|\left\langle X_0,G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^{\lambda,\varepsilon'}(\cdot-x)\right\rangle\right|^{1+\theta}\right\}\\&\quad+C(\theta)E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\left|\left\langle X_T,G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^{\lambda,\varepsilon'}(\cdot-x)\right\rangle\right|^{1+\theta}\right]\\&\quad+C(\theta)\lambda^{1+\theta}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\left|\int_0^T\left\langle X_s,G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^{\lambda,\varepsilon'}(\cdot-x)\right\rangle ds\right|^{1+\theta}\right],\end{aligned}$$

于是由引理 3.3, 当 $\varepsilon,\varepsilon'\downarrow 0$ 时，上式右边收敛于 0, 从而引理成立.

定理 1.2 的证　固定任意的 $T>0$, $\theta\in(0,\beta)$. 在 (3.4) 式中令 $\varepsilon\downarrow 0$. 首先注意到文献 [13] 性质 4.1 仍然成立，即

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\sup_{t\leqslant T}|L_{t,\varepsilon}^x-L_t^x|^{1+\theta}\right]=0,\quad \forall\, T\in(0,\infty),\quad \forall\,\theta\in(0,\beta). \tag{3.15}$$

由 (3.6) 式，有

$$\begin{aligned}&\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\sup_{t\leqslant T}\left|\int_0^t\left\langle X_s,G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\right\rangle ds-\int_0^t\left\langle X_s,G_\alpha^{\lambda}(\cdot-x)\right\rangle ds\right|^{1+\theta}\right]\\ \leqslant&\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\sup_{t\leqslant T}\left(\int_0^t\left\langle X_s,\left|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^{\lambda}(\cdot-x)\right|\right\rangle ds\right)^{1+\theta}\right]\\ =&\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}E_\mu^{\alpha,\beta}\left[\left(\int_0^T\left\langle X_s,\left|G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)-G_\alpha^{\lambda}(\cdot-x)\right|\right\rangle ds\right)^{1+\theta}\right]=0.\end{aligned} \tag{3.16}$$

又

$$G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)=e^{\lambda\varepsilon}\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda s}p_s^\alpha(\cdot-x)ds,$$

由控制收敛定理,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\langle X_t\,,G_\alpha^{\lambda,\varepsilon}(\cdot-x)\rangle=\langle X_t\,,G_\alpha^{\lambda}(\cdot-x)\rangle,\quad \forall\, t\geqslant 0,\quad P_\mu^{\alpha,\beta}\text{- a.s.} \tag{3.17}$$

因此由引理 3.4, (3.15)~(3.17) 式，我们已证在空间 $L^{1+\theta}(\Omega,\mathcal{F},P_\mu^{\alpha,\beta})$ 上， (3.4) 式右边每一项关于 $t\leqslant T$ 一致地收敛于 (1.9) 式右边的对应项．再结合 (3.17) 式，易知在空间 $L^{1+\theta}(\Omega,\mathcal{F},P_\mu^{\alpha,\beta})$ 上，(3.4) 式左边每一项关于 $t\leqslant T$ 一致地收敛于 (1.9) 式左边的对应项．证毕.

致谢　Israel-Technion 的 L. Mytnik 教授与作者进行了有益的讨论，谨致谢意.

参　考　文　献

1 Iscoe I. A weighted occupation time for a class of measure-valued critical branching Brownian motions. Prob Th Rel Fields, 1986, 71: 85～116
2 Dawson D A. Infinitely divisible random measures and superprocesses. In: Körezlioğlu H, Üstünel A S, eds. Stochastic Analysis and Related Topics. Boston: Birkhäuser, 1992. 1～129
3 Dawson D A. Measure-valued Markov Processes. Lect Note in Math, Vol 1541. New York: Springer-Verlag, 1993
4 Fleischmann K. Critical behavior of some measure-valued processes. Math Nachr, 1988, 135: 131～147
5 Dynkin E B. Representation for functionals of superprocesses by multiple stochastic integrals, with applications to self intersection local times. Astérisque, 1988, 157-158: 147～171
6 Adler R J, Lewin M. Local time and Tanaka formulae for super Brownian and super stable processes. Stoc Proc Appl, 1992, 41: 45～67
7 Adler R J. Superprocess local and intersection local times and their corresponding particle pictures. In: Seminar on Stochastic Processes, Seattle, WA, 1992. Progr Probab, 33. Boston: Birkhäuser, 1993. 1～42
8 Krone S M. Local times for superdiffusions. Ann Probab, 1993, 21(3): 1599～1623

9 Mytnik L, Perkins E A. Regularity and irregularity of β-stable super-Brownian motion. Ann Probab, 2003, 31(3): 1413∼1440
10 Dynkin E B, Kuznetsov S E. Natural linear additive functionals of superprocesses, Ann Probab, 1997, 25(2): 640∼661
11 Barlow M T, Evans S N, Perkins E A. Collision local times and measure-valued processes. Canada J Math, 1991, 43(5): 897∼938
12 Blount D, Bose A. Hilbert space regularity of the $(\alpha, d, 1)$-superprocess and its occupation time. Ann Probab, 2000, 28(1): 104∼131
13 Mytnik L, Xiang K N. Tanaka formulae for (α, d, β)-superprocesses. J Theoret Probab, 2004, 17(2): 483∼502
14 Dawson D A, Fleischmann K, Gorostiza L G. Stable hydrodynamic limit fluctuations of a critical branching particle system in a random medium. Ann Probab, 1989, 17(3): 1083∼1117