中国科学: 数学 2022 年 第 52 卷 第 1 期: 23 ∼ 50
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
论 文

# 随机非自治 Navier-Stokes 方程的随机拉回和一致指数吸引子

韩宗飞, 周盛凡*

浙江师范大学数学与计算机科学学院, 金华 321004
E-mail: zfeihan@163.com, zhoushengfan@yahoo.com

收稿日期: 2019-12-21; 接受日期: 2020-06-01; 网络出版日期: 2021-03-26; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11871437) 资助项目

**摘要** 本文首先证明带加法噪声和非自治外力的二维 Navier-Stokes 方程的随机拉回指数吸引子的存在性; 然后引进联合连续的非自治随机动力系统的随机一致指数吸引子的定义和存在性判据, 并且证明带加法噪声和拟周期外力的二维 Navier-Stokes 方程的随机一致指数吸引子的存在性.

**关键词** 随机拉回指数吸引子 随机一致指数吸引子 非自治随机动力系统 Navier-Stokes 方程

**MSC (2020) 主题分类** 37L55, 35B41, 35B40

## 1 引言

吸引子是描述无穷维动力系统渐近行为的重要工具. 在有些情形下, 全局吸引子具有有限分形维数. 然而, 全局吸引子吸引轨道的速度通常是未知的. 它可能任意慢, 因此全局吸引子在扰动下一般是不稳定的. 为了克服这一缺陷, Eden 等 [1] 引进了自治确定动力系统的指数吸引子, 它是一个具有有限分形维数的紧的正不变集, 并且以指数速度吸引轨道. 利用不同的方法将指数吸引子推广到非自治确定动力系统, 可以得到拉回指数吸引子 [2–6] 和一致指数吸引子 [6–11].

Shirikyan 和 Zelik [12] 首先引进了自治随机动力系统的随机指数吸引子, 并且给出了自治随机动力系统存在随机指数吸引子的条件. Caraballo 和 Sonner [13] 改进了 Shirikyan 和 Zelik 给出的随机指数吸引子存在性条件. Zhou [14] 引进了非自治随机动力系统的随机拉回指数吸引子, 同时建立了随机拉回指数吸引子的存在性判据. 文献 [14] 中的随机拉回指数吸引子理论已经应用到一些随机演化方程中, 参见文献 [14–16]. 值得注意的是, 文献 [14] 中的随机拉回指数吸引子存在性判据较文献 [12,13] 中给出的随机指数吸引子存在性条件容易验证. 由于不存在非自治随机动力系统的随机一致指数吸引子的概念, 受文献 [10,14,17,18] 中想法的启发, 本文将给出非自治随机动力系统的随机一致指数吸引子的定义及其存在性判据. 实际上, 我们定义了由环面和相空间生成的扩展空间上的斜积余圈 (即自

**英文引用格式:** Han Z F, Zhou S F. Random pullback and uniform exponential attractors for stochastic non-autonomous Navier-Stokes equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 23–50, doi: 10.1360/SCM-2019-0805

治随机动力系统), 通过证明斜积余圈存在随机拉回指数吸引子得到了非自治随机动力系统存在随机一致指数吸引子 (参见定理 3.1).

Navier-Stokes (NS) 方程是流体力学研究的最重要的方程之一. 本文将考虑如下具有加法噪声和非自治外力的二维 NS 方程的随机拉回指数吸引子的存在性:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = g(x,t) + \psi\dfrac{dW(t)}{dt}, \\ \nabla\cdot u = 0, \quad x\in\mathcal{O}, \quad t>\tau, \\ u(x,t) = 0, \quad x\in\partial\mathcal{O}, \quad t>\tau, \\ u(x,\tau) = u_\tau(x), \quad x\in\mathcal{O} \end{cases} \tag{1.1}$$

和如下具有加法噪声和拟周期外力的二维 NS 方程的随机一致指数吸引子的存在性:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = g(x,\tilde\sigma(t)) + \psi\dfrac{dW(t)}{dt}, \\ \nabla\cdot u = 0, \quad x\in\mathcal{O}, \quad t>0, \\ u(x,t) = 0, \quad x\in\partial\mathcal{O}, \quad t>0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\mathcal{O}, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^2$ 是具有光滑边界 $\partial\mathcal{O}$ 的有界区域, 常数 $\nu>0$ 是流体的运动黏性; $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t))$ 和 $p(x,t)$ 分别是流体的速度场和压力; $W(t)$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 Brown 运动, 其中 $\Omega=\{\omega\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}):\omega(0)=0\}$, $\mathcal{F}$ 是 $\Omega$ 上的紧开拓扑产生的 Borel $\sigma$- 代数, $\mathbb{P}$ 表示 $\mathcal{F}$ 上的 Wiener 测度; $\tilde\sigma(t)=(\boldsymbol{x}t+\sigma)\mathrm{mod}(\mathbb{T}^k)$, 其中 $\sigma\in\mathbb{T}^k$ ($k$- 维环面), $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ 是固定向量, 满足 $x_1,\ldots,x_k$ 是有理线性无关的, 即如果存在整数 $l_1,\ldots,l_k$ 使得 $\sum_{j=1}^k l_jx_j=0$, 则 $l_j=0$, $j=1,\ldots,k$; $g(x,t)$ 和 $g(x,\tilde\sigma(t))$ 是给定的满足某些假设的函数.

Wang [19] 引进了两个参数空间 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 上的非自治随机动力系统 (或称余圈), 参数空间 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 分别来源于描述非自治随机微分方程的非自治确定项和随机项对解的演化的影响, 其中初始时刻的集合 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 和符号空间 (参见文献 [18]) 都可以取作参数空间 $\Omega_1$. 在本文中, 方程 (1.1) 的解生成的非自治随机动力系统的参数空间 $\Omega_1$ 是 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, 方程 (1.2) 的解生成的非自治随机动力系统的参数空间 $\Omega_1$ 是符号空间 $\mathbb{T}^k$. 为了读者方便, 后文中将简要回顾这两种不同形式的非自治随机动力系统及相关概念.

关于确定 NS 方程 [1,18,20–24] 或随机 NS 方程 [25–32] 的各种吸引子的研究已有很多, 但至今尚无二维随机 NS 方程的随机拉回和一致指数吸引子的存在性结果. 本文余下内容的组织结构如下: 第 2 节证明方程 (1.1) 的随机拉回指数吸引子的存在性, 第 3 节证明方程 (1.2) 的随机一致指数吸引子的存在性.

## 2 随机拉回指数吸引子的存在性

### 2.1 预备工作

本小节介绍一些符号和概念, 并给出连续非自治随机动力系统的随机拉回指数吸引子的存在性判据.

假设 $(X,\|\cdot\|_X)$ 是可分 Banach 空间, $\mathcal{B}(X)$ 表示其 Borel $\sigma$- 代数. 令

$$\mathrm{d}_h(F_1,F_2)=\sup_{u\in F_1}\inf_{v\in F_2}\|u-v\|_X$$

是 $X$ 的子集 $F_1$ 到 $F_2$ 的 Hausdorff 半距离, $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是遍历度量动力系统 [30]. 称随机变量 $\gamma_\omega$ 关于 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是缓增的, 若对任意 $\epsilon>0$, a.e. $\omega\in\Omega$, 有 $\limsup_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\epsilon|t|}|\gamma_{\vartheta_t\omega}|=0$ (参见文献 [33]). 称 $X$ 中的随机集簇 $\{B(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 关于 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是缓增的, 如果对任意 $\epsilon>0$, $\tau\in\mathbb{R}$ 和 a.e. $\omega\in\Omega$, 有 $\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{\epsilon t}\|B(\tau+t,\vartheta_t\omega)\|_X=0$, 其中 $\|B(\tau,\omega)\|_X=\sup_{x\in B(\tau,\omega)}\|x\|_X$.

本小节用 $\mathcal{D}(X)$ 表示 $X$ 中的某些随机集簇 $\{D(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 组成的集合.

**定义 2.1** 称映射 $\Psi:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\Omega\times X\to X$ 为 $\mathbb{R}$ 和 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 驱动的空间 $X$ 上的连续非自治随机动力系统, 如果

(i) $\Psi(\cdot,\tau,\cdot,\cdot)$: $\mathbb{R}^+\times\Omega\times X\to X$ 是 $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\times\mathcal{F}\times\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(X))$- 可测的;

(ii) $\Psi(0,\tau,\omega,\cdot)$ 是 $X$ 上的恒等映射;

(iii) $\Psi(t+s,\tau,\omega,\cdot)=\Psi(t,\tau+s,\vartheta_s\omega,\Psi(s,\tau,\omega,\cdot))$, $t,s\geqslant0$, $\tau\in\mathbb{R}$;

(iv) $\Psi(t,\tau,\omega,\cdot)$: $X\to X$ 是连续的.

**定义 2.2** 称 $X$ 的子集簇 $\{\mathcal{E}(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 为 $\mathbb{R}$ 和 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 驱动的连续非自治随机动力系统 $\{\Psi(t,\tau,\omega)\}_{t\geqslant0,\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 的 $\mathcal{D}(X)$- 随机拉回指数吸引子, 如果存在全测集 $\tilde{\Omega}\in\mathcal{F}$ 使得对任意 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\omega\in\tilde{\Omega}$, 下面的性质成立:

(i) $\mathcal{E}(\tau,\omega)$ 是 $X$ 中的紧集, 且关于 $\omega$ 可测;

(ii) 存在随机变量 $\varsigma_\omega<\infty$ 使得 $\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\dim_f\mathcal{E}(\tau,\omega)\leqslant\varsigma_\omega$, 其中

$$\dim_f\mathcal{E}(\tau,\omega)=\lim\sup_{\varepsilon\to0+}\frac{\ln N_\varepsilon(\mathcal{E}(\tau,\omega))}{-\ln\varepsilon}$$

是 $\mathcal{E}(\tau,\omega)$ 的分形维数, $N_\varepsilon(\mathcal{E}(\tau,\omega))$ 是在 $X$ 中覆盖 $\mathcal{E}(\tau,\omega)$ 所需半径为 $\varepsilon$ 的球的最小个数;

(iii) $\Psi(t,\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)\mathcal{E}(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)\subseteq\mathcal{E}(\tau,\omega)$, $t\geqslant0$;

(iv) 存在常数 $\tilde{a}>0$ 使得对任意 $B\in\mathcal{D}(X)$, 存在随机变量 $t_B(\tau,\omega)\geqslant0$ 和 $Q(\tau,\omega,\|B\|_X)>0$ 满足 $\mathrm{d}_h(\Psi(t,\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)B(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega),\mathcal{E}(\tau,\omega))\leqslant Q(\tau,\omega,\|B\|_X)\mathrm{e}^{-\tilde{a}t}$, $t\geqslant t_B(\tau,\omega)$.

**注 2.1** 在定义 2.2 中, $X$ 中的某些随机集簇 $\{D(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 组成的集合 $\mathcal{D}(X)$ 称为随机拉回指数吸引子 $\{\mathcal{E}(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 的吸引域.

在下文中, 为方便起见, 将 “a.e. $\omega\in\Omega$” 记为 “$\omega\in\Omega$”.

接下来给出可分 Banach 空间上连续非自治随机动力系统存在随机拉回指数吸引子的判据 (参见文献 [15]).

**定理 2.1** 令 $\{\Psi(t,\tau,\omega)\}_{t\geqslant0,\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 是 $\mathbb{R}$ 和遍历度量动力系统 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 驱动的可分 Banach 空间 $X$ 上的连续非自治随机动力系统. 假设

(H1) 存在 $X$ 的缓增随机闭集簇 $\{\check{\chi}(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 使得对任意 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\omega\in\Omega$,

(h11) $\check{\chi}(\tau,\omega)$ 的直径有界, 即 $\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\sup_{u,v\in\check{\chi}(\tau,\omega)}\|u-v\|_X\leqslant R_\omega<\infty$, 其中 $R_\omega$ (独立于 $\tau$) 是缓增随机变量且 $R_{\vartheta_t\omega}$ 关于 $t\in\mathbb{R}$ 连续;

(h12) $\check{\chi}(\tau,\omega)$ 关于 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是正不变的, 即 $\Psi(t,\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)\check{\chi}(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)\subseteq\check{\chi}(\tau,\omega)$, $t\geqslant0$;

(H2) 存在正常数 $\hat{\lambda}$、$\hat{\delta}$ 和 $\hat{t}_0$, 随机变量 $\hat{C}_0(\omega),\hat{C}_1(\omega)\geqslant0$ 和 $N$- 维投影 $P_N$: $X\to P_NX$ $(\dim(P_NX)=N\in\mathbb{N})$ 使得对任意 $\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$ 和 $u,v\in\check{\chi}(\tau,\omega)$, 有

$$\|\Psi(t,\tau,\omega)u-\Psi(t,\tau,\omega)v\|_X\leqslant\mathrm{e}^{\int_0^{\hat{t}_0}\hat{C}_0(\vartheta_s\omega)ds}\|u-v\|_X,\quad\forall\,t\in[0,\hat{t}_0],\tag{2.1}$$

$$\|(I-P_N)(\Psi(t_0,\tau,\omega)u-\Psi(t_0,\tau,\omega)v)\|_X \leqslant \left(\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}\hat{t}_0+\int_0^{\hat{t}_0}\hat{C}_1(\vartheta_s\omega)ds}+\frac{\hat{\delta}}{2}\mathrm{e}^{\int_0^{\hat{t}_0}\hat{C}_0(\vartheta_s\omega)ds}\right)\|u-v\|_X, \tag{2.2}$$

其中 $\hat{\lambda}$、$\hat{\delta}$、$\hat{t}_0$、$N$ 与 $\tau$ 和 $\omega$ 无关;

(H3) $\hat{C}_0(\omega)$、$\hat{C}_1(\omega)$、$\hat{\lambda}$、$\hat{t}_0$ 和 $\hat{\delta}$ 满足

$$\begin{cases}0\leqslant \mathrm{E}[\hat{C}_1(\omega)]\leqslant \dfrac{\hat{\lambda}}{16}, \quad \hat{t}_0=\dfrac{8\ln 2}{\hat{\lambda}}>0, \quad 0\leqslant \mathrm{E}[\hat{C}_0^2(\omega)], \mathrm{E}[\hat{C}_0(\omega)]<\infty,\\ 0<\hat{\delta}\leqslant \min\left\{\dfrac{1}{16}, \mathrm{e}^{-\frac{2}{\ln\frac{3}{2}}(2\hat{t}_0^2\mathrm{E}[\hat{C}_0^2(\omega)]+\hat{\lambda}\hat{t}_0^2\mathrm{E}[\hat{C}_0(\omega)])}\right\},\end{cases}$$

其中 E 表示期望.

则连续非自治随机动力系统 $\{\Psi(t,\tau,\omega)\}_{t\geqslant 0,\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 存在具有吸引域 $\{\breve{\chi}(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 的随机拉回指数吸引子 $\{\mathcal{E}(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$, 并且具有如下性质: 对任意 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\omega\in\Omega$,

(i) $\mathcal{E}(\tau,\omega)$ ($\subseteq\breve{\chi}(\tau,\omega)$) 关于 $\omega$ 可测, 且在 $X$ 中是紧的;

(ii) $\Psi(t,\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)\mathcal{E}(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)\subseteq\mathcal{E}(\tau,\omega)$, $t\geqslant 0$;

(iii) $\dim_f\mathcal{E}(\tau,\omega)\leqslant\frac{2N\ln(\frac{2\sqrt{N}}{\hat{\delta}}+1)}{\ln\frac{4}{3}}<\infty$;

(iv) 存在随机变量 $\tilde{T}_\omega\geqslant 0$ 和缓增随机变量 $\breve{b}_\omega>0$ 使得

$$\mathrm{d}_h(\Psi(t,\tau,\omega)\breve{\chi}(\tau,\omega),\mathcal{E}(t+\tau,\vartheta_t\omega))\leqslant\breve{b}_\omega\mathrm{e}^{-\frac{\ln\frac{4}{3}}{4\hat{t}_0}t}, \quad t\geqslant\tilde{T}_\omega.$$

**注 2.2** 在应用中, 通常将吸引域 $\mathcal{D}(X)$ 取为 $X$ 中的具有某些性质的随机集簇 $\{D(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 的集合, 例如, 取 $\mathcal{D}(X)$ 为 $X$ 的所有缓增随机集簇 $\{D(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 的集合. 容易证明, 如果对任意 $\{D(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}\in\mathcal{D}(X)$, 存在 $T(\tau,\omega,D)\geqslant 0$ 使得 $\Psi(t,\tau-t,\theta_{-t}\omega)D(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)\subseteq\breve{\chi}(\tau,\omega)$, $t\geqslant T(\tau,\omega,D)$, 则连续非自治随机动力系统 $\{\Psi(t,\tau,\omega)\}_{t\geqslant 0,\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 存在 $\mathcal{D}(X)$- 随机拉回指数吸引子 $\{\mathcal{E}(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$, 且有定理 2.1 中的性质 (i)–(iii) 和下面的吸引性 (iv′):

(iv′) 对任意 $D\in\mathcal{D}(X)$, 存在随机变量 $\tilde{T}_{\tau,\omega,D}\geqslant 0$ 和缓增随机变量 $\breve{b}_{\tau,\omega,D}>0$ 使得

$$\mathrm{d}_h(\Psi(t,\tau,\omega)D(\tau,\omega),\mathcal{E}(t+\tau,\vartheta_t\omega))\leqslant\breve{b}_{\tau,\omega,D}\mathrm{e}^{-\frac{\ln\frac{4}{3}}{4\hat{t}_0}t}, \quad t\geqslant\tilde{T}_{\tau,\omega,D}.$$

最后, 给出下面两个 Hilbert 空间:

$$H=\{u\in L^2(\mathcal{O})^2,\ \nabla\cdot u=0,\ u\cdot n\,|_{\partial\mathcal{O}}=0\}, \tag{2.3}$$

$$V=\{u\in H_0^1(\mathcal{O})^2,\ \nabla\cdot u=0\}, \tag{2.4}$$

其中 $n$ 为 $\partial\mathcal{O}$ 上的单位外法向量. 空间 $H$ 的内积和范数分别为 $(u,v)=\sum_{j=1}^2\int_{\mathcal{O}}u_j(x)v_j(x)dx$ 和 $|u|=\{(u,u)\}^{1/2}$. 空间 $V$ 的内积和范数分别为 $((u,v))=\sum_{i,j=1}^2\int_{\mathcal{O}}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx$ 和 $\|u\|=\{((u,u))\}^{1/2}$. 嵌入 $V\hookrightarrow H\equiv H'\hookrightarrow V'$ 是稠密和连续的. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $V$ 与 $V'$ 的对偶积.

### 2.2 问题的提出

考虑如下二维随机非自治 NS 方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=g(x,t)+\psi\dfrac{dW(t)}{dt},\\ \nabla\cdot u=0, \quad x\in\mathcal{O}, \quad t>\tau,\end{cases} \tag{2.5}$$

赋予初边值条件

$$\begin{cases} u(x,t)=0, \quad x\in\partial\mathcal{O}, \quad t>\tau, \\ u(x,\tau)=u_\tau(x), \quad x\in\mathcal{O}. \end{cases} \tag{2.6}$$

函数 $g(x,t)$ 满足如下假设:

(A) $g\in C(\mathcal{O}\times\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$, $g(x,\cdot)\in C_b(\mathbb{R},H)$ 且 $|g|^2=\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(\cdot,t)|^2<\infty$.

令 $D(A)=H^2(\mathcal{O})^2\cap V$, 定义 Stokes 算子 $A: D(A)\subset H\to H$ 为 $Au=-P\Delta u$, 其中 $P$ 是从 $L^2(\Omega)^2$ 到 $H$ 的 Helmholtz-Leray 投影. 它存在线性延拓 $A: V\to V'$, $\langle Au,v\rangle=((u,v))$, $u,v\in V$. 此外, 定义双线性算子 $B(u,v): V\times V\to V'$, $\langle B(u,v),w\rangle=((u\cdot\nabla)v,w)=\sum_{i,j=1}^2\int_{\mathcal{O}}u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_jdx, \forall\, u,v,w\in V$. 从文献 [34, 命题 9.1] 可知 $\langle B(u,v),v\rangle=0$, $\langle B(u,v),w\rangle=-\langle B(u,w),v\rangle$, $u\in H$, $v,w\in V$.

假设

$$\psi\in W^{1,\infty}(\mathcal{O})^2\cap D(A).$$

根据上面的算子和记号, 可在分布意义下将 (2.5) 写为如下抽象形式:

$$\frac{du}{dt}+\nu Au+B(u,u)=g(t)+\psi\frac{dW}{dt}. \tag{2.7}$$

取 Brown 运动的实现为 $W(t)=W(t,\omega)=\omega(t)$, $\omega\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$. 定义 $\vartheta_t\omega(\cdot)=\omega(t+\cdot)-\omega(t)$, $\forall\omega\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$, 则 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是遍历度量动力系统. 令 $z(\vartheta_t\omega)=-\alpha\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\alpha s}(\vartheta_t\omega)(s)ds$ $(t\in\mathbb{R})$ 是一维方程 $dz(\vartheta_t\omega)+\alpha z(\vartheta_t\omega)dt=dW(t)$ 的平稳解, 由文献 [33,35,36] 可知, 对任意 $\omega\in\Omega$, $z(\vartheta_t\omega)$ 关于 $t\in\mathbb{R}$ 连续, 且

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\epsilon\int_s^{s+t}|z(\vartheta_r\omega)|dr})\leqslant \mathrm{e}^{\frac{\epsilon t}{\sqrt{\alpha}}}, \quad \forall\, s\in\mathbb{R}, \quad \forall\,\alpha^3\geqslant\epsilon^2\geqslant 0, \quad \forall\, t\geqslant 0, \tag{2.8}$$

$$\mathrm{E}(|z(\vartheta_s\omega)|^r)=\frac{\Gamma(\frac{1+r}{2})}{\sqrt{\pi\alpha^r}}, \quad \forall\, r>0, \quad \forall\, s\in\mathbb{R}, \tag{2.9}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{|z(\vartheta_t\omega)|}{|t|}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_0^t z(\vartheta_s\omega)ds=0, \tag{2.10}$$

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\epsilon t}|z(\vartheta_{-t}\omega)|=0, \quad \forall\,\epsilon>0, \tag{2.11}$$

其中 $\Gamma$ 是 Gamma 函数.

令 $v(t)=u(t)-z(\vartheta_t\omega)\psi$, 根据 (2.7), $v(t)$ 满足

$$\frac{dv}{dt}+\nu Av+B(v+z(\vartheta_t\omega)\psi, v+z(\vartheta_t\omega)\psi)=g(t)+\alpha z(\vartheta_t\omega)\psi-\nu z(\vartheta_t\omega)A\psi, \tag{2.12}$$

$$\nabla\cdot v=0, \quad x\in\mathcal{O}, \quad t>\tau. \tag{2.13}$$

赋予初边值条件

$$v(x,t)=0, \quad x\in\partial\mathcal{O}, \quad t>\tau, \tag{2.14}$$

$$v(x,\tau)=v_\tau(x)=u_\tau-z(\vartheta_\tau\omega)\psi, \quad x\in\mathcal{O}. \tag{2.15}$$

从文献 [32,34] 可知, 对任意 $\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$ 和 $v_\tau\in H$, 问题 (2.12)–(2.15) 存在唯一解 $v(t,\tau,\omega,v_\tau)\in C([\tau,+\infty],H)\cap L^2_{\mathrm{loc}}([\tau,+\infty],V)$ $(\partial_t v\in L^2_{\mathrm{loc}}([\tau,+\infty],V'))$, 且 $v(t,\tau,\omega,v_\tau)$ 在 $H$ 中关于 $v_\tau$ 连续. 此外,

解 $v(t,\tau,\omega,v_\tau)$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B}(H))$- 可测的. 因此可以定义 $\mathbb{R}$ 和 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(\vartheta_t)_{t\in\mathbb{R}})$ 驱动的 $H$ 上的连续非自治随机动力系统 $\varphi:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\Omega\times H\to H$:

$$(t,\tau,\omega,v_\tau)\to\varphi(t,\tau,\omega,v_\tau)=\varphi(t,\tau,\omega)v_\tau=v(t+\tau,\tau,\vartheta_{-\tau}\omega,v_\tau(\vartheta_{-\tau}\omega)),$$

其中 $\varphi(0,\tau,\omega)v_\tau=v_\tau(\vartheta_{-\tau}\omega)$.

在本节余下的部分, 令 $\mathcal{D}=\mathcal{D}(H)$ 是 $H$ 中所有缓增随机集簇组成的集合, 即

$$\mathcal{D}=\{D:D(\tau,\omega)\ (\neq\emptyset,\forall\,\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega)\ \text{属于}\ H\ \text{且}\ \mathrm{e}^{-\alpha t}|D(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)|_H^2\xrightarrow{t\to+\infty}0,\ \forall\,\alpha>0,\ \omega\in\Omega\}.$$

接下来证明问题 (2.12)–(2.15) 产生的连续非自治随机动力系统 $\varphi$ 存在 $\mathcal{D}$- 随机拉回指数吸引子.

### 2.3 解的一致估计

对任意 $\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$ 和 $t\geqslant 0$, 令 $v(r)=v(r,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))\ (r\geqslant\tau-t)$ 是 (2.12) 和 (2.15) 具有初值 $v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)\in H$ 的解.

**引理 2.1** 对任意 $\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$ 和 $D\in\mathcal{D}$, 存在 $T_0=T_0(\tau,\omega,D)>0$ 和缓增随机变量 $R_0(\omega)\geqslant 0$ (独立于 $\tau$) 使得 (2.12) 和 (2.15) 的具有初值 $v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)\in D(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)$ 的解满足

$$|v(\tau,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|\leqslant R_0(\omega),\quad t\geqslant T_0. \tag{2.16}$$

**证明** 在 $H$ 中取内积 $((2.12),v(r))$, 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2+\nu\|v\|^2&\leqslant|\langle B(v+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi,v+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi),v\rangle|+|g(r)||v|\\&\quad+\alpha|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)||\psi||v|+\nu|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|\|\psi\|\|v\|.\end{aligned}\tag{2.17}$$

注意到 $\langle B(\xi,\eta),\eta\rangle=0$ 和 $\psi\in W^{1,\infty}(\mathcal{O})^2$, 有

$$\begin{aligned}&|\langle B(v+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi,v+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi),v\rangle|\\&\quad=|\langle B(v+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi,z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi),v\rangle|\\&\quad\leqslant\|\nabla\psi\|_{L^\infty(\mathcal{O})^2}|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|\,|v|^2+\|\nabla\psi\|_{L^\infty(\mathcal{O})^2}|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^2|\psi||v|.\end{aligned}\tag{2.18}$$

令

$$c_0=\|\nabla\psi\|_{L^\infty(\mathcal{O})^2}+|\psi|\|\nabla\psi\|_{L^\infty(\mathcal{O})^2}+\|\psi\|+|\psi|. \tag{2.19}$$

在本节余下部分, 用 $c_i$ $(i\in\mathbb{N}^+)$ 表示正常数. 由 (2.17) 和 (2.18) 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2+\nu\|v\|^2&\leqslant c_0|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)||v|^2+c_0|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^2|v|+|g(r)||v|\\&\quad+\alpha c_0|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)||v|+\nu c_0|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|\|v\|.\end{aligned}$$

根据 Young 不等式和 Poincaré 不等式 $\|v\|^2\geqslant\lambda_1|v|^2$ (对于某个 $\lambda_1>0$), 有

$$\frac{d}{dt}|v|^2+\nu\|v\|^2\leqslant 2c_0|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)||v|^2+c_1|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^4+c_1|g(r)|^2+c_1, \tag{2.20}$$

$$\frac{d}{dt}|v|^2+\frac{\nu}{2}\|v\|^2\leqslant\bigg(-\frac{\nu\lambda_1}{2}+2c_0|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|\bigg)|v|^2+c_1(|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^4+|g(r)|^2+1), \tag{2.21}$$

其中 $c_1$ 依赖 $\nu$、$\lambda_1$ 和 $\psi$. 对 (2.21) 在 $[\tau-t,r]$ 上应用 Gronwall 不等式, 得

$$\begin{aligned}&|v(r,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|^2+\frac{\nu}{2}\int_{\tau-t}^{r}\mathrm{e}^{\int_l^r(2c_0|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}\|v(l)\|^2dl\\&\quad\leqslant \mathrm{e}^{\int_{-t}^{r-\tau}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}|v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)|^2+c_2\int_{-t}^{r-\tau}\mathrm{e}^{\int_l^{r-\tau}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1)dl,\end{aligned}\tag{2.22}$$

其中 $c_2$ 依赖 $\nu$、$\lambda_1$、$\psi$ 和 $g$. 取 $r=\tau$, 可得

$$\begin{aligned}|v(\tau,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|^2&\leqslant \mathrm{e}^{\int_{-t}^{0}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}|v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)|^2\\&\quad+c_2\int_{-t}^{0}\mathrm{e}^{\int_l^{0}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1)dl.\end{aligned}$$

由 (2.9) 和 $\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_{-t}^0|z(\vartheta_s\omega)|ds=\mathrm{E}[|z(\omega)|]$ 知, 存在 $\tilde{T}_0(\omega)>0$ 使得 $\int_{-t}^0|z(\vartheta_s\omega)|ds\leqslant\frac{2t}{\sqrt{\pi\alpha}}$. 假设 $\frac{2}{\sqrt{\pi\alpha}}\leqslant\frac{\nu\lambda_1}{8c_0}$, 则

$$2c_0\int_{-t}^{0}|z(\vartheta_s\omega)|ds\leqslant\frac{\nu\lambda_1}{4}t,\quad t\geqslant\tilde{T}_0(\omega).\tag{2.23}$$

取 $T_0=T_0(\tau,\omega,D)=\min\{t\geqslant\tilde{T}_0(\omega)\mid \mathrm{e}^{\int_{-t}^{0}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}\sup_{v\in D(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)}|v|^2\leqslant1\}$, 则

$$\begin{aligned}|v(\tau,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|^2&\leqslant1+c_2\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\int_l^{0}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1)dl\\&=1+c_2K_0(\omega)\doteq R_0^2(\omega),\quad t\geqslant T_0,\end{aligned}$$

其中 $K_0(\omega)=\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{\int_l^{0}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1)dl$. 容易验证 $K_0(\omega)$ 是缓增的. 证毕. □

**引理 2.2** 对任意 $\omega\in\Omega$, 令 $D_0(\omega)=\{v\in H:|v|\leqslant R_0(\omega)\}\subset H$, 则对任意 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\omega\in\Omega$, 存在 $T_1=T_1(\omega,D_0)\geqslant1$ 和缓增随机变量 $R_1(\omega)>0$, 使得 (2.12) 和 (2.15) 的具有初值 $v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)\in D(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)$ 的解满足

$$\int_{\tau-1}^{\tau}\|v(s,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))\|^2ds\leqslant R_1(\omega),\quad t\geqslant T_1.\tag{2.24}$$

**证明** 由 $v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)\in D(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)$ 和 (2.22) 知, 对 $t\geqslant1$, 有

$$\begin{aligned}|v(\tau-1,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|^2&\leqslant \mathrm{e}^{\int_{-t}^{-1}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}R_0^2(\vartheta_{-t}\omega)\\&\quad+c_2\int_{-t}^{-1}\mathrm{e}^{\int_l^{-1}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1)dl.\end{aligned}\tag{2.25}$$

在 (2.22) 中取 $t=1$ 和 $r=\tau$, 再由 (2.25), 可得

$$\begin{aligned}&|v(\tau)|^2+\frac{\nu}{2}\int_{\tau-1}^{\tau}\mathrm{e}^{\int_l^{\tau}(2c_0|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}\|v(l)\|^2dl\\&\quad\leqslant \mathrm{e}^{\int_{-t}^{0}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}R_0^2(\vartheta_{-t}\omega)+c_2\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\int_l^{0}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1)dl.\end{aligned}\tag{2.26}$$

由于

$$\int_{\tau-1}^{\tau}\mathrm{e}^{\int_l^{\tau}(2c_0|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}\|v(l)\|^2dl\geqslant \mathrm{e}^{-\int_{-1}^{0}2c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds-\frac{\nu\lambda_1}{2}}\int_{\tau-1}^{\tau}\|v(l)\|^2dl,$$

从 (2.26) 可以推出

$$\int_{\tau-1}^{\tau}\|v(l,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))\|^2dl\leqslant\frac{2}{\nu}\mathrm{e}^{\int_{-1}^{0}2c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds+\frac{\nu\lambda_1}{2}+\int_{-t}^{0}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}R_0^2(\vartheta_{-t}\omega)$$
$$+\frac{2c_2}{\nu}\mathrm{e}^{\int_{-1}^{0}2c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds+\frac{\nu\lambda_1}{2}}K_0(\omega).$$

取 $T_1=T_1(D_0,\omega)=\min\{t\geqslant\tilde{T}_0(\omega)+1\mid\frac{2}{\nu}\mathrm{e}^{\int_{-1}^{0}2c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds+\frac{\nu\lambda_1}{2}+\int_{-t}^{0}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}R_0^2(\vartheta_{-t}\omega)\leqslant1\}$, 故

$$\int_{\tau-1}^{\tau}\|v(l,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))\|^2dl\leqslant1+\frac{2c_2}{\nu}\mathrm{e}^{\int_{-1}^{0}2c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds+\frac{\nu\lambda_1}{2}}K_0(\omega)\doteq R_1(\omega),\quad t\geqslant T_1.$$

证毕. □

下面对解在 $V$ 中进行估计, 采用文献 [26,29] 中的方法.

**引理 2.3** 对任意 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\omega\in\Omega$, 存在 $T_1=T_1(\omega,D_0)>0$ (由引理 2.2 给出) 和缓增随机变量 $R_2(\omega)\geqslant0$, 使得 (2.12) 和 (2.15) 的具有初值 $v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)\in D_0(\vartheta_{-t}\omega)$ 的解满足

$$\|v(\tau,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))\|\leqslant R_2(\omega),\quad t\geqslant T_1.$$

**证明** 旋度场 $\xi=\mathrm{rot}u=\partial_{x_2}u_1-\partial_{x_1}u_2$ 满足方程

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}-\nu\Delta\xi+(u\cdot\nabla)\xi=\mathrm{rot}g+\mathrm{rot}\psi\frac{dW}{dt}$$

(由 $\mathrm{div}u=0$ 知 $\mathrm{rot}((u\cdot\nabla)u)=(u\cdot\nabla)\xi$), 赋予初边值条件 (2.6). 可以证明半范数 $|\mathrm{rot}\phi|_{L^2(\mathcal{O})}$ 等价于经典范数 $\|\phi\|_{H^1(\mathcal{O})}$.

令 $\tilde{v}=\xi-z(\vartheta_t\omega)\mathrm{rot}\psi$, 则 $\tilde{v}$ 满足方程

$$\frac{d\tilde{v}}{dt}-\nu\Delta\tilde{v}+(u\cdot\nabla)\tilde{v}=\mathrm{rot}g+\alpha z(\vartheta_t\omega)\mathrm{rot}\psi-z(\vartheta_t\omega)(u\cdot\nabla)\mathrm{rot}\psi+\nu z(\vartheta_t\omega)\Delta\mathrm{rot}\psi.$$

根据边界条件知,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}|\tilde{v}|_{L^2(\mathcal{O})}^2+2\nu\|\tilde{v}\|_{H^1(\mathcal{O})}^2\\&\quad=2\langle\mathrm{rot}g+\alpha z(\vartheta_t\omega)\mathrm{rot}\psi-z(\vartheta_t\omega)(u\cdot\nabla)\mathrm{rot}\psi+\nu z(\vartheta_t\omega)\Delta\mathrm{rot}\psi,\tilde{v}\rangle\nu\|\tilde{v}\|_{H^1(\mathcal{O})}^2\\&\qquad+c_3(|\mathrm{rot}g|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2+|z(\vartheta_t\omega)|^2|\mathrm{rot}\psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2+|z(\vartheta_t\omega)|^2|(v\cdot\nabla)\mathrm{rot}\psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2\\&\qquad+|z(\vartheta_t\omega)|^4|(\psi\cdot\nabla)\mathrm{rot}\psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2+|z(\vartheta_t\omega)|^2|\Delta\mathrm{rot}\psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}|\tilde{v}(t,\tau,\omega,v_\tau(\omega))|_{L^2(\mathcal{O})}^2\leqslant{}&|\tilde{v}(s,\tau,\omega,v_\tau(\omega))|_{L^2(\mathcal{O})}^2+c_3\int_s^t(|\mathrm{rot}g|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2+|z(\vartheta_l\omega)|^2|\mathrm{rot}\psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2\\&+|z(\vartheta_l\omega)|^2|(v(l,\tau,\omega,v_\tau(\omega))\cdot\nabla)\mathrm{rot}\psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2+|z(\vartheta_l\omega)|^4|(\psi\cdot\nabla)\mathrm{rot}\psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2\\&+|z(\vartheta_l\omega)|^2|\Delta\mathrm{rot}\psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2)dl.\end{aligned}\tag{2.27}$$

对 (2.27) 关于 $s$ 在 $[t-1,t]$ 上积分, 并应用一些基本不等式可得

$$|\tilde{v}(t,\tau,\omega,v_\tau(\omega))|_{L^2(\mathcal{O})}^2\leqslant\int_{t-1}^{t}|\tilde{v}(s,\tau,\omega,v_\tau(\omega))|_{L^2(\mathcal{O})}^2ds+c_4\int_{t-1}^{t}(|g(l)|^2+|z(\vartheta_l\omega)|^2|\psi|^2$$

$$+|z(\vartheta_l\omega)|^2|v(l,\tau,\omega,v_\tau(\omega))|^2\|\psi\|^2_{W^{1,\infty}}+|z(\vartheta_l\omega)|^4|\psi|^2\|\psi\|^2_{W^{1,\infty}}$$
$$+|z(\vartheta_l\omega)|^2\|\mathrm{rot}\psi\|^2_{H^1(\mathcal{O})})dl.$$

在上式中用 $\tau$ 替换 $t$、$\tau-t$ 替换 $\tau$、$\vartheta_{-\tau}\omega$ 替换 $\omega$, 可得

$$\begin{aligned}
&|\tilde{v}(\tau,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|^2_{L^2(\mathcal{O})}\\
&\quad\leqslant\int_{\tau-1}^{\tau}|\tilde{v}(s,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|^2_{L^2(\mathcal{O})}ds+c_4\int_{\tau-1}^{\tau}(|g(l)|^2+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^2|\psi|^2\\
&\quad\quad+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^2|v(l,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|^2\|\psi\|^2_{W^{1,\infty}}+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^4|\psi|^2\|\psi\|^2_{W^{1,\infty}}\\
&\quad\quad+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^2\|\mathrm{rot}\psi\|^2_{H^1(\mathcal{O})})dl.
\end{aligned}$$

由于 $|\mathrm{rot}\phi|_{L^2(\mathcal{O})}$ 等价于范数 $\|\phi\|_{H^1(\mathcal{O})}$, 因此存在常数 $c_5>0$ 和 $c_6>0$ 使得

$$\begin{aligned}
&c_5\|v(\tau,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))\|^2\\
&\quad\leqslant c_6\int_{\tau-1}^{\tau}\|v(s,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))\|^2ds+c_4\int_{\tau-1}^{\tau}(|g(l)|^2+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^2|\psi|^2\\
&\quad\quad+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^2|v(l,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|^2\|\psi\|^2_{W^{1,\infty}}+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^4|\psi|^2\|\psi\|^2_{W^{1,\infty}}\\
&\quad\quad+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^2\|\mathrm{rot}\psi\|^2_{H^1(\mathcal{O})})dl.
\end{aligned}$$

由上式、(2.24) 和 Poincaré 不等式可以推出

$$\begin{aligned}
&\|v(\tau,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))\|^2\\
&\quad\leqslant\frac{c_6}{c_5}\int_{\tau-1}^{\tau}\|v(s,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))\|^2ds\\
&\quad\quad+c_7\int_{\tau-1}^{\tau}(1+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^2+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^4+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^2\|v(l,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))\|^2)dl\\
&\quad\leqslant c_8\Big(1+\max_{-1\leqslant s\leqslant 0}|z(\vartheta_s\omega)|^2\Big)R_1(\omega)+c_8\int_{-1}^{0}(1+|z(\vartheta_s\omega)|^4)ds\doteq R_2^2(\omega),\quad t\geqslant T(\omega,D_0),
\end{aligned}$$

其中 $c_8$ 依赖 $\nu$、$\lambda_1$、$\psi$ 和 $g$. 容易验证 $R_2(\omega)$ 是缓增的, 证毕. □

**引理 2.4**　对任意 $\omega\in\Omega$, 令 $D_1(\omega)=\{v\in V:\|v\|\leqslant R_2(\omega)\}$, 则对任意 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\omega\in\Omega$, 有

$$\varphi(t,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega)D_0(\vartheta_{-t}\omega)\subseteq D_0(\omega)\subset H,\quad t\geqslant T_0(\omega,D_0),\tag{2.28}$$
$$\varphi(t,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega)D_0(\vartheta_{-t}\omega)\subseteq D_1(\omega)\subset H,\quad t\geqslant T_0(\omega,D_0)+T_1(\omega,D_0).\tag{2.29}$$

**证明**　由引理 2.1 和 2.3 可直接得到, 证毕. □

### 2.4　随机拉回指数吸引子

对任意 $\omega\in\Omega$, 令 $T^*(\omega)=T_0(\omega,D_0)+T_1(\omega,D_0)$. 对任意 $\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$ 和 $s\geqslant 0$, 记

$$\begin{aligned}
\chi(\tau-s,\vartheta_{-s}\omega)&=\bigcup_{t\geqslant\max\{T^*(\vartheta_{-s}\omega),T^*(\omega)\}}\varphi(t,\tau-s-t,\vartheta_{-t-s}\omega)D_0(\vartheta_{-t-s}\omega)\\
&\subseteq D_0(\vartheta_{-s}\omega)\cap D_1(\vartheta_{-s}\omega).
\end{aligned}\tag{2.30}$$

我们可以断言随机有界集簇 $\{\chi(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 具有如下性质:

(a1) 对任意 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\omega\in\Omega$, $\chi(\tau,\omega)$ 在 $H$ 中的直径以 $2R_0(\omega)$ 为上界, 其中 $R_0(\vartheta_t\omega)$ 关于 $t\in\mathbb{R}$ 连续.

(a2) $\chi(\tau,\omega)$ 在 $H$ 中是正不变的. 实际上, 对任意 $s\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}
&\varphi(s,\tau-s,\vartheta_{-s}\omega)\chi(\tau-s,\vartheta_{-s}\omega)\\
&\quad=\bigcup_{t\geqslant\max\{T^*(\vartheta_{-s}\omega),T^*(\omega)\}}\varphi(s,\tau-s,\vartheta_{-s}\omega)\varphi(t,\tau-s-t,\vartheta_{-t-s}\omega)D_0(\vartheta_{-t-s}\omega)\\
&\quad=\bigcup_{t\geqslant\max\{T^*(\vartheta_{-s}\omega),T^*(\omega)\}}\varphi(s+t,\tau-s-t,\vartheta_{-t-s}\omega)D_0(\vartheta_{-t-s}\omega)\\
&\quad=\bigcup_{r\geqslant\max\{T^*(\vartheta_{-s}\omega),T^*(\omega)\}+s}\varphi(r,\tau-r,\vartheta_{-r}\omega)D_0(\vartheta_{-r}\omega)\\
&\quad\subseteq\bigcup_{r\geqslant T^*(\omega)}\varphi(r,\tau-r,\vartheta_{-r}\omega)D_0(\vartheta_{-r}\omega)\\
&\quad=\chi(\tau,\omega).
\end{aligned}\tag{2.31}$$

(a3) $\chi(\tau,\omega)$ 是 $\mathcal{D}(H)$- 拉回吸收的, 即对任意 $D\in\mathcal{D}(H)$, 存在 $\tilde{T}=T_0(\tau,\omega,D)+T_0(\omega,D_0)+T_1(\omega,D_0)$ 使得 $\varphi(t,\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)D(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)\subseteq\chi(\tau,\omega)$, $t\geqslant\tilde{T}$.

为证明 $\varphi$ 存在随机拉回指数吸引子, 需要验证 $\{\chi(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 满足定理 2.1 中的 (H2) 和 (H3).

对任意 $\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$, $t\geqslant 0$ 和 $v^j_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)\in\chi(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)$, 令

$$v^j(r)=v^j(r,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,v^j_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)),\quad y(r)=v^1(r)-v^2(r),\quad r\geqslant\tau-t,\quad j=1,2.$$

由 (2.31) 和 (2.30) 知,

$$v^j(r)\in\chi(r,\vartheta_{r-\tau}\omega)\subseteq D_0(\vartheta_{r-\tau}\omega),\quad |v^j(r)|\leqslant R_0(\vartheta_{r-\tau}\omega),\quad j=1,2.\tag{2.32}$$

在 (2.30) 中取 $s=\tau-r$, 则对任意 $v^j(r)\in\chi(r,\vartheta_{r-\tau}\omega)$, $j=1,2$, 存在 $\hat{t}\geqslant\max\{T^*(\vartheta_{r-\tau}\omega),T^*(\omega)\}$, $\hat{v}\in D_0(\vartheta_{-\hat{t}}\vartheta_{r-\tau}\omega)$, 使得

$$v^j(r)=\varphi(\hat{t},r-\hat{t},\vartheta_{-\hat{t}}\vartheta_{r-\tau}\omega)\hat{v}\in\varphi(\hat{t},r-\hat{t},\vartheta_{-\hat{t}}\vartheta_{r-\tau}\omega)D_0(\vartheta_{-\hat{t}}\vartheta_{r-\tau}\omega),\quad j=1,2,$$

再由 (2.30) 知,

$$v^j(r)\in D_1(\vartheta_{r-\tau}\omega),\quad \|v^j(r)\|\leqslant R_2(\vartheta_{r-\tau}\omega),\quad j=1,2.\tag{2.33}$$

显然, 下面的方程成立:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}+\nu Ay+B(v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi,v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi)-B(v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi,v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi)=0,\\ y(\tau-t,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))=v^1_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)-v^2_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega),\quad r\geqslant\tau-t,\quad\tau\in\mathbb{R}.\end{cases}\tag{2.34}$$

下面的引理说明了 $\varphi$ 在 $\chi(\tau,\omega)$ 上的 Lipschitz 连续性.

**引理 2.5** 对任意 $\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$, $t\geqslant 0$ 和 $v^j_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)\in\chi(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)$, $j=1,2$, 有

$$|y(r,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|^2\leqslant \mathrm{e}^{\int_{-t}^{r-\tau}c_9(R_2^2(\vartheta_s\omega)+|z(\vartheta_s\omega)|^2)ds}|y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)|^2.\tag{2.35}$$

特别地,

$$|y(\tau,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|^2\leqslant \mathrm{e}^{\int_{-t}^{0}c_9(R_2^2(\vartheta_s\omega)+|z(\vartheta_s\omega)|^2)ds}|y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)|^2.\tag{2.36}$$

**证明**　在 $H$ 中取内积 $((2.34), y(r))$, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y|^2+\nu\|y\|^2+\langle B(v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y\rangle\\&\quad-\langle B(v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y\rangle\\&\quad=0.\end{aligned}\tag{2.37}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\langle B(v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y\rangle-\langle B(v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y\rangle\\&\quad=\langle B(v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi-(v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y\rangle+\langle B(v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^1\\&\qquad+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y\rangle-\langle B(v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y\rangle\\&\quad=\langle B(y, v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y\rangle-\langle B(v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, y), y\rangle\\&\quad=\langle B(y, v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y\rangle,\end{aligned}$$

由于

$$|\langle B(\eta,\xi),\varrho\rangle|\leqslant\tilde{c}|\eta|^{1/2}\|\eta\|^{1/2}\|\xi\||\varrho|^{1/2}\|\varrho\|^{1/2},\quad(\eta,\xi,\varrho)\in V\times V\times V,\tag{2.38}$$

参见文献 [34, 命题 9.2], 因此有

$$\begin{aligned}&|\langle B(v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y\rangle-\langle B(v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y\rangle|\\&\quad\leqslant\tilde{c}|y|^{1/2}\|y\|^{1/2}\|v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi\||y|^{1/2}\|y\|^{1/2}\\&\quad\leqslant\tilde{c}|y|\|y\|\|v^1\|+\tilde{c}|y|\|y\|\|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi\|\\&\quad\leqslant\frac{\tilde{c}^2}{2\nu}R_2^2(\vartheta_{r-\tau}\omega)|y|^2+\frac{\nu}{2}\|y\|^2+\frac{\tilde{c}^2\|\psi\|^2}{2\nu}|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^2|y|^2+\frac{\nu}{2}\|y\|^2\\&\quad\leqslant\nu\|y\|^2+\frac{c_9}{2}(R_2^2(\vartheta_{r-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^2)|y|^2.\end{aligned}\tag{2.39}$$

因此, 由 (2.37) 和 (2.39) 可推出

$$\frac{d}{dt}|y(r)|^2\leqslant c_9(R_2^2(\vartheta_{r-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^2)|y(r)|^2.\tag{2.40}$$

对 (2.40) 应用 Gronwall 不等式可得 (2.35) 和 (2.36). 证毕. □

为证明 $\{\chi(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 满足 (2.2), 需根据 Stokes 算子 $A$ 的性质将 (2.34) 的解分成两部分.

算子 $A$ 的特征值序列 $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ $(0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\to+\infty)$ 和特征函数族 $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ $(\subset D(A))$ 满足 $Ae_m=\lambda_m e_m$, $m=1,2,\ldots$, 而且 $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ 构成 $H$ 的标准正交基和 $V$ 的正交基.

对给定的 $m\in\mathbb{N}$, 令

$$\begin{aligned}&H_m=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\ldots,e_m\},\quad H_m^\perp=\mathrm{span}\{e_{m+1},e_{m+2},\ldots\},\\&P_m:H\to H_m,\quad Q_m:I_H-P_m:H\to H_m^\perp,\end{aligned}\tag{2.41}$$

其中 $P_m$ 是 $m$- 维正交投影. 下面的不等式是有用的 (参见文献 [37]):

$$|v-P_mv|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_m}\|v-P_mv\|^2,\quad\forall\,v\in V,\quad m\in\mathbb{N},\tag{2.42}$$

$$\|P_m v\|^2 \leqslant \lambda_m |v|^2, \quad \forall\, v \in H, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.43}$$

令 $y(r) = y(r, \tau - t, \vartheta_{-\tau}\omega, y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))$ 是 (2.34) 的解. 记

$$y_{1,m}(r) = P_m y(r), \quad y_{2,m}(r) = Q_m y(r),$$

则

$$y(r) = y_{1,m}(r) + y_{2,m}(r).$$

接下来估计 $y_{2,m}(r)$.

**引理 2.6** 对任意 $\tau \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, $t \geqslant 0$ 和 $m \in \mathbb{N}$, 存在随机变量 $C_0(\omega) \geqslant 0$, 使得对任意 $v^j_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega) \in \chi(\tau - t, \vartheta_{-t}\omega)$, $j = 1, 2$, 有

$$\begin{aligned} &|y_{2,m}(\tau, \tau - t, \vartheta_{-\tau}\omega, y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))| \\ &\quad = |Q_m\varphi(t, \tau - t, \vartheta_{-t}\omega, v^1_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)) - Q_m\varphi(t, \tau - t, \vartheta_{-t}\omega, v^2_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))| \\ &\quad \leqslant (\mathrm{e}^{-\frac{\nu\lambda_1}{2}t} + H(\lambda_m)\mathrm{e}^{\int_{-t}^{0} C_0(\vartheta_s\omega)ds})|v^1_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega) - v^2_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)|, \end{aligned} \tag{2.44}$$

其中 $H(\lambda_m) = (\frac{c_{10}(1+\sqrt{\lambda_m})}{(\frac{3}{2}\nu\lambda_m)^{\frac{2}{3}}})^{1/2}$.

**证明** 在 $H$ 中取内积 $((2.34), y_{2,m}(r))$, 可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_{2,m}(r)|^2 + \nu\|y_{2,m}(r)\|^2 + \langle B(v^1(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^1(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle \\ &\quad - \langle B(v^2(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^2(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle \\ &\qquad = 0. \end{aligned} \tag{2.45}$$

注意到

$$\begin{aligned} &\langle B(v^1(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^1(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle \\ &\quad - \langle B(v^2(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^2(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle \\ &\quad = \langle B(v^1(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi - (v^2(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), v^1(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle \\ &\qquad + \langle B(v^2(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^1(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle \\ &\qquad - \langle B(v^2(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, v^2(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle \\ &\quad = \langle B(y(r), v^1(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle + \langle B(v^2(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi, y(r)), y_{2,m}(r)\rangle. \end{aligned} \tag{2.46}$$

考虑 (2.38)、(2.43) 和 Poincaré 不等式, 有

$$\begin{aligned} &|\langle B(y(r), v^1(r) + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle| \\ &\quad \leqslant \tilde{c}|y|^{1/2}\|y\|^{1/2}\|v^1 + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi\||y_{2,m}|^{1/2}\|y_{2,m}\|^{1/2} \\ &\quad \leqslant \frac{2\tilde{c}^2}{\nu\sqrt{\lambda_1}}|y|\|y\|\|v^1 + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi\|^2 + \frac{\nu\sqrt{\lambda_1}}{8}|y_{2,m}|\|y_{2,m}\| \\ &\quad \leqslant \frac{2\tilde{c}^2}{\nu\sqrt{\lambda_1}}|y|\|y_{1,m}\|\|v^1 + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi\|^2 + \frac{2\tilde{c}^2}{\nu\sqrt{\lambda_1}}|y|\|y_{2,m}\|\|v^1 + z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi\|^2 + \frac{\nu\sqrt{\lambda_1}}{8}|y_{2,m}|\|y_{2,m}\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{2\tilde{c}^2\sqrt{\lambda_m}}{\nu\sqrt{\lambda_1}}|y|^2\|v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi\|^2+\frac{8\tilde{c}^4}{\nu^3\lambda_1}|y|^2\|v^1+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi\|^4+\frac{\nu}{4}\|y_{2,m}\|^2\\
&\leqslant \frac{4\tilde{c}^2\sqrt{\lambda_m}(1+\|\psi\|^2)}{\nu\sqrt{\lambda_1}}(R_2^2(\vartheta_{r-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^2)|y|^2\\
&\quad+\frac{64\tilde{c}^4(1+\|\psi\|^4)}{\nu^3\lambda_1}(R_2^4(\vartheta_{r-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^4)|y|^2+\frac{\nu}{4}\|y_{2,m}\|^2,
\end{aligned}\tag{2.47}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\langle B(v^2(r)+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi,y(r)),y_{2,m}(r)\rangle|\\
&\quad=|\langle B(v^2(r)+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi,y_{2,m}(r)),y_{1,m}(r)\rangle|\\
&\quad\leqslant \frac{2\tilde{c}^2}{\nu}|v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi|\|v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi\||y_{1,m}|\|y_{1,m}\|+\frac{\nu}{8}\|y_{2,m}\|^2\\
&\quad\leqslant \frac{2\tilde{c}^2}{\nu\sqrt{\lambda_1}}\|v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi\|^2|y|(\|y_{1,m}\|+\|y_{2,m}\|)+\frac{\nu}{8}\|y_{2,m}\|^2\\
&\quad\leqslant \frac{2\tilde{c}^2\sqrt{\lambda_m}}{\nu\sqrt{\lambda_1}}\|v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi\|^2|y|^2+\frac{8\tilde{c}^4}{\nu^3\lambda_1}\|v^2+z(\vartheta_{r-\tau}\omega)\psi\|^4|y|^2+\frac{\nu}{4}\|y_{2,m}\|^2\\
&\quad\leqslant \frac{4\tilde{c}^2\sqrt{\lambda_m}(1+\|\psi\|^2)}{\nu\sqrt{\lambda_1}}(R_2^2(\vartheta_{r-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^2)|y|^2\\
&\quad\quad+\frac{64\tilde{c}^4(1+\|\psi\|^4)}{\nu^3\lambda_1}(R_2^4(\vartheta_{r-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^4)|y|^2+\frac{\nu}{4}\|y_{2,m}\|^2.
\end{aligned}\tag{2.48}
$$

令 $c_{10}=4(\frac{4\tilde{c}^2(1+\|\psi\|^2)}{\nu\sqrt{\lambda_1}}+\frac{64\tilde{c}^4(1+\|\psi\|^4)}{\nu^3\lambda_1})$. 从 (2.42) 和 (2.45)–(2.48) 可以推出

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|y_{2,m}(r)|^2\leqslant&-\nu\lambda_m|y_{2,m}(r)|^2+c_{10}(\sqrt{\lambda_m}(R_2^2(\vartheta_{r-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^2)\\
&+R_2^4(\vartheta_{r-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|^4)|y(r)|^2.
\end{aligned}\tag{2.49}
$$

对 (2.49) 在 $[\tau-t,\tau]$ 上应用 Gronwall 不等式, 并应用 (2.35) 可以推出

$$
\begin{aligned}
&|y_{2,m}(\tau,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|^2\\
&\quad\leqslant \mathrm{e}^{-\nu\lambda_m t}|y_{2,m}(\tau-t)|^2\\
&\quad\quad+\int_{\tau-t}^{\tau}\mathrm{e}^{\nu\lambda_m(l-\tau)}c_{10}(\sqrt{\lambda_m}(R_2^2(\vartheta_{l-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^2)+R_2^4(\vartheta_{l-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^4)|y(l)|^2dl\\
&\quad\leqslant \mathrm{e}^{-\nu\lambda_1 t}|y_{2,m}(\tau-t)|^2\\
&\quad\quad+\int_{\tau-t}^{\tau}\mathrm{e}^{\nu\lambda_m(l-\tau)}c_{10}(\sqrt{\lambda_m}(R_2^2(\vartheta_{l-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^2)+R_2^4(\vartheta_{l-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{l-\tau}\omega)|^4)\\
&\quad\quad\times \mathrm{e}^{\int_{\tau-t}^{l}c_9(R_2^2(\vartheta_{s-\tau}\omega)+|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|^2)ds}|y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)|^2dl\\
&\quad\leqslant \mathrm{e}^{-\nu\lambda_1 t}|y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)|^2+\mathrm{e}^{\int_{-t}^{0}c_9(R_2^2(\vartheta_s\omega)+|z(\vartheta_s\omega)|^2)ds}|y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)|^2\\
&\quad\quad\times\int_{-t}^{0}\mathrm{e}^{\nu\lambda_m l}c_{10}(\sqrt{\lambda_m}(R_2^2(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^2)+R_2^4(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^4)dl.
\end{aligned}\tag{2.50}
$$

根据 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
&\int_{-t}^{0}\mathrm{e}^{\nu\lambda_m l}c_{10}(\sqrt{\lambda_m}(R_2^2(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^2)+R_2^4(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^4)dl\\
&\quad\leqslant c_{10}(1+\sqrt{\lambda_m})\int_{-t}^{0}\mathrm{e}^{\nu\lambda_m l}(R_2^2(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^2+R_2^4(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^4)dl
\end{aligned}
$$

$$\leqslant c_{10}(1+\sqrt{\lambda_m})\bigg(\int_{-t}^{0}(\mathrm{e}^{\nu\lambda_m l})^{\frac{3}{2}}dl\bigg)^{\frac{2}{3}}\bigg(\int_{-t}^{0}(R_2^2(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^2+R_2^4(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^4)^3dl\bigg)^{\frac{1}{3}}$$

$$\leqslant \frac{c_{10}(1+\sqrt{\lambda_m})}{(\frac{3}{2}\nu\lambda_m)^{\frac{2}{3}}}\mathrm{e}^{\int_{-t}^{0}16(R_2^6(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^6+R_2^{12}(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^{12})dl}\quad (\text{用到 } x^{\frac{1}{3}}\leqslant \mathrm{e}^x,\ x\geqslant 0). \tag{2.51}$$

记 $H(\lambda_m)=\sqrt{\frac{c_{10}(1+\sqrt{\lambda_m})}{(\frac{3}{2}\nu\lambda_m)^{\frac{2}{3}}}}$, 则 $H(\lambda_m)\xrightarrow{m\to\infty}0$. 因此, 从 (2.50) 和 (2.51) 可以推出

$$|y_{2,m}(\tau,\tau-t,\vartheta_{-\tau}\omega,y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega))|^2\leqslant(\mathrm{e}^{-\nu\lambda_1 t}+H^2(\lambda_m)\mathrm{e}^{\int_{-t}^{0}2C_0(\vartheta_s\omega)ds})|y_{\tau-t}(\vartheta_{-\tau}\omega)|^2, \tag{2.52}$$

其中

$$C_0(\omega)=c_{11}(R_2^2(\omega)+R_2^6(\omega)+R_2^{12}(\omega)+|z(\omega)|^2+|z(\omega)|^6+|z(\omega)|^{12}),\quad 2c_{11}=c_9+16. \tag{2.53}$$

证毕. □

**引理 2.7** 对任意 $\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$, $t\geqslant 0$ 和 $m\in\mathbb{N}$, 存在随机变量 $C_0(\omega)\geqslant 0$ (由引理 2.6 给出) 和 $m$- 维正交投影 $P_m: H\to H_m$, 使得对任意 $v_{\tau-t}^j(\vartheta_{-\tau}\omega)\in\chi(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)$, $j=1,2$, 有

$$\begin{aligned}&|\varphi(t,\tau-t,\vartheta_{-t}\omega,v_{\tau-t}^1(\vartheta_{-\tau}\omega))-\varphi(t,\tau-t,\vartheta_{-t}\omega,v_{\tau-t}^2(\vartheta_{-\tau}\omega))|\\&\quad\leqslant \mathrm{e}^{\int_{-t}^{0}C_0(\vartheta_s\omega)ds}|v_{\tau-t}^1(\vartheta_{-\tau}\omega)-v_{\tau-t}^2(\vartheta_{-\tau}\omega)|,\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}&|(I-P_m)\varphi(t,\tau-t,\vartheta_{-t}\omega,v_{\tau-t}^1(\vartheta_{-\tau}\omega))-(I-P_m)\varphi(t,\tau-t,\vartheta_{-t}\omega,v_{\tau-t}^2(\vartheta_{-\tau}\omega))|\\&\quad\leqslant(\mathrm{e}^{-\frac{\nu\lambda_1}{2}t}+H(\lambda_m)\mathrm{e}^{\int_{-t}^{0}C_0(\vartheta_s\omega)ds})|v_{\tau-t}^1(\vartheta_{-\tau}\omega)-v_{\tau-t}^2(\vartheta_{-\tau}\omega)|.\end{aligned} \tag{2.55}$$

**证明** 由引理 2.5 和 2.6 可知 (2.54) 和 (2.55) 成立. 证毕. □

下面的引理说明了期望 $\mathrm{E}[C_0(\omega)]$ 和 $\mathrm{E}[C_0^2(\omega)]$ 的有界性.

**引理 2.8** 令 $\alpha>\max\{(192c_0)^{\frac{2}{3}},(\frac{16c_0}{\nu\lambda_1})^2\}$, 则 $0\leqslant \mathrm{E}[C_0(\omega)]$, $\mathrm{E}[C_0^2(\omega)]<\infty$.

**证明** 对任意实值随机变量 $\xi\in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, 有

$$(\mathrm{E}[|\xi|^r])^{1/r}\leqslant(\mathrm{E}[|\xi|^p])^{1/p},\quad 0<r<p<\infty. \tag{2.56}$$

由于

$$\begin{aligned}&C_1^2(\omega)\leqslant c_{12}(R_2^4(\omega)+R_2^{12}(\omega)+R_2^{24}(\omega)+|z(\omega)|^4+|z(\omega)|^{12}+|z(\omega)|^{24}),\\&R_2^{24}(\omega)\leqslant c_{13}\bigg(1+R_1^{24}(\omega)+\max_{-1\leqslant s\leqslant 0}|z(\vartheta_s\omega)|^{48}+\int_{-1}^{0}|z(\vartheta_s\omega)|^{48}dl\bigg),\\&R_1^{24}(\omega)\leqslant c_{14}(1+\mathrm{e}^{96c_0\int_{-1}^{0}|z(\vartheta_s\omega)|ds}+K_0^{48}(\omega)),\end{aligned}$$

根据 (2.56)、(2.9) 和 Fubini 定理, 问题转化为证明下面的期望有界:

$$\mathrm{E}[|z(\omega)|^{48}]<\infty,\quad \mathrm{E}[\mathrm{e}^{96c_0\int_{-1}^{0}|z(\vartheta_s\omega)|ds}]<\infty,\quad \mathrm{E}[K_0^{48}(\omega)]<\infty.$$

考虑 (2.8) 和 (2.9) 可知, $\mathrm{E}[|z(\omega)|^{48}]<\infty$, $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{96c_0\int_{-1}^{0}|z(\vartheta_s\omega)|ds}]<\infty$. 由 Hölder 不等式有

$$K_0^{48}(\omega)=\bigg(\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\int_l^0(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1)dl\bigg)^{48}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\frac{12\nu\lambda_1}{47}l} dl\right)^{47} \int_{-\infty}^{0} (\mathrm{e}^{\frac{\nu\lambda_1}{4}l+\int_l^0 2c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1))^{48} dl \\
&\leqslant \left(\frac{47}{12\nu\lambda_1}\right)^{47} \int_{-\infty}^{0} (\mathrm{e}^{12\nu\lambda_1 l+\int_l^0 96c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1)^{48}) dl \\
&\leqslant c_{15} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{12\nu\lambda_1 l}(\mathrm{e}^{\int_l^0 192c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds}+|z(\vartheta_l\omega)|^{384}+1) dl.
\end{aligned}
$$

因此, 从 (2.8) 和 (2.9) 可以推出

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[K_0^{48}(\omega)] &\leqslant c_{16} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{12\nu\lambda_1 l}(\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\int_l^0 192c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds}]+\mathrm{E}[|z(\vartheta_l\omega)|^{384}]+1) dl \\
&\leqslant c_{16} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{12\nu\lambda_1 l}\left(\mathrm{e}^{-\frac{192c_0}{\sqrt{\alpha}}l}+\frac{\Gamma(\frac{385}{2})}{\sqrt{\pi}\alpha^{384}}+1\right) dl < \infty. \qquad (2.57)
\end{aligned}
$$

证毕. □

下面给出本节的主要结果.

**定理 2.2** 假设 (A) 和 $\alpha > \max\{(192c_0)^{\frac{2}{3}}, (\frac{16c_0}{\nu\lambda_1})^2\}$ 成立, 则 $\{\varphi(t,\tau,\omega)\}_{t\geqslant 0,\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$ 存在 $\mathcal{D}$- 随机拉回指数吸引子 $\{\mathcal{M}(\tau,\omega)\}_{\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega}$, 且具有如下性质: 对任意 $\tau\in\mathbb{R}$ 和 $\omega\in\Omega$,

(i) $\mathcal{M}(\tau,\omega)\subseteq\chi(\tau,\omega)$ 是 $H$ 中的紧集, 且关于 $\omega$ 可测;

(ii) $\varphi(t,\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)\mathcal{M}(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)\subseteq\mathcal{M}(\tau,\omega)$, $t\geqslant 0$;

(iii) 存在正数 $m_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\dim_f \mathcal{M}(\omega) \leqslant \frac{2m_0\ln(\frac{\sqrt{m_0}}{H(\lambda_{m_0})}+1)}{\ln\frac{4}{3}} < \infty$;

(iv) 对任意 $D\in\mathcal{D}$, 存在随机变量 $\check{T}(\tau,\omega,D)\geqslant 0$ 和缓增随机变量 $\check{b}_\omega > 0$, 使得

$$
\mathrm{dist}_h(\varphi(t,\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)D(\vartheta_{-t}\omega), \mathcal{M}(\tau,\omega)) \leqslant \check{b}_\omega \mathrm{e}^{-\frac{\nu\lambda_1\ln\frac{4}{3}}{64\ln 2}t}, \quad t\geqslant \check{T}(D,\tau,\omega).
$$

**证明** 在 (2.54) 的右端和 (2.55) 中取 $t=\hat{t}_0=\frac{16\ln 2}{\nu\lambda_1}$. 根据引理 2.8 知,

$$
\kappa = \min\left\{\frac{1}{16}, \mathrm{e}^{-\frac{2}{\ln\frac{3}{2}}(2\hat{t}_0^2\mathrm{E}[C_0^2(\omega)]+\frac{\nu\lambda_1}{2}\hat{t}_0^2\mathrm{E}[C_0(\omega)])}\right\} < \infty.
$$

由于 $H(\lambda_m)\xrightarrow{m\to\infty}0$, 取充分大的 $m=m_0$ 使得 $2H(\lambda_{m_0})\leqslant\kappa$. 根据 (a1)–(a3)、引理 2.7、2.8 和定理 2.1 可知定理 2.2 成立. 证毕. □

## 3 随机一致指数吸引子的存在性

### 3.1 预备工作

本小节介绍一些符号和概念, 并给出联合连续的非自治随机动力系统存在随机一致指数吸引子的判据.

令 $(X,\|\cdot\|_X)$ 是可分 Banach 空间, $\mathcal{B}(X)$ 表示其 Borel $\sigma$- 代数. $d_X$ 表示范数 $\|\cdot\|_X$ 诱导的度量. $\mathrm{dist}_X(F_1,F_2)=\sup_{u\in F_1}\inf_{v\in F_2}\|u-v\|_X$ 表示 $X$ 中的非空子集 $F_1$ 到 $F_2$ 的 Hausdorff 半距离.

令 $\mathbb{T}^k$ 是 $k$- 维环面, $\mathbb{T}^k=\{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_k):\sigma_j\in[-\pi,\pi],\forall j=1,\ldots,k\}$ 满足 $(\sigma_1,\ldots,\sigma_{j-1},-\pi,\sigma_{j+1},\ldots,\sigma_k)\sim(\sigma_1,\ldots,\sigma_{j-1},\pi,\sigma_{j+1},\ldots,\sigma_k)$, $\forall j=1,\ldots,k$, 其上的拓扑和度量由下面的范数诱导: $\|\sigma\|_{\mathbb{T}^k}=(\sum_{j=1}^k\sigma_j^2)^{1/2}$, $\forall\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\in\mathbb{T}^k$. 令 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ 是固定向量, 且 $x_1,\ldots,x_k$ 是

有理线性无关的. 对于 $t\in\mathbb{R}$, 定义 $\theta_t\sigma=(\boldsymbol{x}t+\sigma)\,\mathrm{mod}(\mathbb{T}^k)$, $\sigma\in\mathbb{T}^k$, 则 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{T}^k$ 上的平移群, 且 $\theta_t\mathbb{T}^k=\mathbb{T}^k$, $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $(t,\sigma)\to\theta_t\sigma$ 是连续的. $\mathcal{B}(\mathbb{T}^k)$ 表示 $\mathbb{T}^k$ 的 Borel $\sigma$- 代数. 如果发展方程的时间符号是拟周期的, 可以用 $\mathbb{T}^k$ 作为符号空间 (参见文献 [18]).

令 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ 是遍历度量动力系统, $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 构成 $\Omega$ 上的变换群 (参见文献 [30]).

称上述 $\mathbb{T}^l$ 上的群 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和 $\Omega$ 上的群 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为基流[17]. 注意, 下文中除非特别说明, 提到基流 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 时分别是指 $\mathbb{T}^l$ 上的基流 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和 $\Omega$ 上的基流 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

**定义 3.1** 称映射 $\psi(t,\omega,x):\mathbb{R}^+\times\Omega\times X\to X$ 为 $X$ 上带基流 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的 (自治) 随机动力系统, 如果对任意 $t\geqslant 0$, $s\geqslant 0$ 和 $\omega\in\Omega$, $\psi$ 都满足以下性质:

(i) $\psi$ 是 $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\times\mathcal{F}\times\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(X))$- 可测的;

(ii) $\psi(0,\omega,\cdot)$ 是 $X$ 上的恒等映射;

(iii) $\psi(t+s,\omega,\cdot)=\psi(t,\vartheta_s\omega)\circ\psi(s,\omega,\cdot)$;

(iv) $\psi(t,\omega,\cdot):X\to X$ 是连续的.

**定义 3.2** 称映射 $\phi(t,\omega,\sigma,x):\mathbb{R}^+\times\Omega\times\mathbb{T}^k\times X\to X$ 为 $X$ 上带基流 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的非自治随机动力系统, 如果对任意 $t\geqslant 0$, $s\geqslant 0$, $\omega\in\Omega$ 和 $\sigma\in\mathbb{T}^k$, $\phi$ 都满足以下性质:

(i) $\phi$ 是 $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\times\mathcal{F}\times\mathcal{B}(\mathbb{T}^k)\times\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(X))$- 可测的;

(ii) $\phi(0,\omega,\sigma,\cdot)$ 是 $X$ 上的恒等映射;

(iii) $\phi(t+s,\omega,\sigma,\cdot)=\phi(t,\vartheta_s\omega,\theta_s\sigma)\circ\phi(s,\omega,\sigma,\cdot)$.

称上述非自治随机动力系统为连续的, 如果对任意 $t\in\mathbb{R}^+$, $\omega\in\Omega$ 和 $\sigma\in\mathbb{T}^k$, 映射 $\phi(t,\omega,\sigma,\cdot)$ 是连续的. 称上述非自治随机动力系统关于 $\mathbb{T}^k$ 和 $X$ 是联合连续的, 如果对任意 $t\in\mathbb{R}^+$ 和 $\omega\in\Omega$, 映射 $\phi(t,\omega,\cdot,\cdot)$ 是连续的. 在定义 3.2 中用一般的符号空间 $\Sigma$ 替换环面 $\mathbb{T}^k$, 可以得到一般的非自治随机动力系统的定义 (参见文献 [17]).

**定义 3.3** 称集值映射 $D:\Omega\to 2^X\setminus\emptyset$, $\omega\to D(\omega)$ 是 $X$ 中的 (自治) 随机集, 如果对任意 $x\in X$, 映射 $\omega\to d_X(x,D(\omega))$ 是可测的. 称自治随机集是有界的 (或闭的、紧的), 如果对任意 $\omega\in\Omega$, $D(\omega)$ 是有界的 (或闭的、紧的).

**定义 3.4** 称 $X$ 中的随机集 $D$ 关于 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是缓增的, 若对任意 $\omega\in\Omega$, 有 $\mathrm{e}^{-\beta t}\|D(\vartheta_{-t}\omega)\|_X\xrightarrow{t\to+\infty}0$, $\forall\,\beta>0$, 其中 $\|D(\omega)\|_X=\sup_{x\in D(\omega)}\|x\|_X$.

本小节用 $\mathcal{D}(X)$ 表示 $X$ 中所有的缓增随机有界集的集合.

定义扩展空间 $\mathbb{X}\doteq\mathbb{T}^k\times X$, 赋予范数 $\|\mathcal{X}\|_{\mathbb{X}}=(\|\sigma\|^2_{\mathbb{T}^k}+\|x\|^2_X)^{1/2}$, $\forall\,\mathcal{X}=\{\sigma\}\times\{x\}\in\mathbb{X}$, $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ 表示其 Borel $\sigma$- 代数.

显然, 对任意 $\mathbb{B}\subseteq\mathbb{X}$, $\mathbb{B}=\bigcup_{\sigma\in\mathbb{T}^k}\{\sigma\}\times B(\sigma)$, 其中 $B(\sigma)$ (可能为空) 称为 $\mathbb{B}$ 的 $\sigma$- 截面. 令 $P_\sigma\mathbb{B}\doteq B(\sigma)$ $(\forall\,\mathbb{B}\subseteq\mathbb{X})$ 和 $P_X\mathbb{B}=\bigcup_{\sigma\in\mathbb{T}^k}P_\sigma\mathbb{B}=\{x\in X:\text{存在}\,\sigma\in\mathbb{T}^k\ \text{使得}\,\{\sigma\}\times\{x\}\in\mathbb{B}\}$, 则 $P_X$ 是从 $\mathbb{X}$ 到 $X$ 的投影. 用 $P_{\mathbb{T}^k}$ 表示从 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{T}^k$ 的投影.

根据定义 3.3, 称集值映射 $\mathbb{B}:\Omega\to 2^{\mathbb{X}}\backslash\emptyset$, $\omega\to\mathbb{B}(\omega)$ 为 $\mathbb{X}$ 中的随机集, 如果对任意 $\mathcal{X}\in\mathbb{X}$, 映射 $\omega\to d_{\mathbb{X}}(\mathcal{X},\mathbb{B}(\omega))$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$- 可测的. 根据定义 3.4, 称 $\mathbb{X}$ 中的随机集 $\mathbb{B}$ 是缓增的, 如果 $\mathrm{e}^{-\beta t}\|\mathbb{B}(\vartheta_{-t}\omega)\|_{\mathbb{X}}\xrightarrow{t\to+\infty}0$, $\forall\,\beta>0$.

令 $\mathcal{D}_{\mathbb{X}}=\{\mathbb{B}:\mathbb{B}=\mathbb{T}^l\times B=\{\mathbb{T}^l\times B(\omega)\}_{\omega\in\Omega},\,B\in\mathcal{D}(X)\}$. 注意到 $\mathcal{D}_{\mathbb{X}}$ 中的任意元素是 $\mathbb{X}$ 中的随机集.

对 $X$ 的 $K$- 维子空间 $X_K$ $(K\in\mathbb{N})$, 定义有界投影 $\mathbb{P}_{k+K}:\mathbb{X}\to\mathbb{X}_K=\mathbb{T}^k\times X_K$ 和 $\mathbb{Q}_{k+K}:\mathbb{X}$

$\to \mathbb{X}_K^{\perp} = \mathbb{T}^k \times X_K^{\perp}$ 分别为

$$\mathbb{P}_{k+K}\mathcal{X} = \{\sigma\} \times \{P_K x\}, \quad \mathbb{Q}_{k+K}\mathcal{X} = \{0\} \times \{Q_K x\}, \quad \forall\, \mathcal{X} = \{\sigma\} \times \{x\} \in \mathbb{X},$$

其中 $P_K : X \to X_K$ 是从 $X$ 到 $X_K$ 的 $K$- 维正交投影, $Q_K = I_X - P_K$, $\mathbb{Q}_{k+K} = I_{\mathbb{X}} - \mathbb{P}_{k+K}$, 这里 $I_{\mathbb{X}}$ 是 $\mathbb{X}$ 上的恒等算子.

为研究可分 Banach 空间 $X$ 上的非自治随机动力系统的随机一致指数吸引子的存在性, 需要引进扩展空间 $\mathbb{X}$ 上的斜积余圈 (参见文献 [17]). 给定 $X$ 上带基流 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的联合连续非自治随机动力系统 $\phi$, 定义映射 $\pi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$,

$$\pi(t, \omega, \{\sigma\} \times \{x\}) = \{\theta_t \sigma\} \times \{\phi(t, \omega, \sigma, x)\}, \tag{3.1}$$

那么 $\pi$ 是一个随机动力系统, 即满足

(i) $\pi$ 是 $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{X}), \mathcal{B}(\mathbb{X}))$- 可测的;

(ii) $\pi(0, \omega, \mathcal{X}) = \mathcal{X}$, $\forall\, \omega \in \Omega$, $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$;

(iii) $\pi(t+s, \omega, \mathcal{X}) = \pi(t, \theta_s\omega, \pi(s, \omega, \mathcal{X}))$, $\forall\, t, s \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$, $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$.

随机动力系统 $\pi$ 称为由 $\phi$ (和 $\theta$) 产生的斜积余圈. 注意到 $\pi$ 是连续的, 即映射 $\mathcal{X} \to \pi(\cdot, \cdot, \mathcal{X})$ 在 $\mathbb{X}$ 中是连续的, 当且仅当 $\phi$ 关于 $\mathbb{T}^k$ 和 $X$ 是联合连续的. 通常记 $\pi(t, \omega, \mathcal{X})$ 为 $\pi(t, \omega)\mathcal{X}$.

接下来定义在 $X$ 上的连续非自治随机动力系统 $\{\phi(t, \omega, \sigma)\}_{t\geqslant 0, \omega\in\Omega, \sigma\in\mathbb{T}^k}$ 的 $\mathcal{D}(X)$- 随机一致指数吸引子.

**定义 3.5** 称 $X$ 中的随机集 $\{\mathcal{M}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 为 $X$ 上带基流 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的连续非自治随机动力系统 $\{\phi(t, \omega, \sigma)\}_{t\geqslant 0, \omega\in\Omega, \sigma\in\mathbb{T}^k}$ 的 $\mathcal{D}(X)$- 随机一致指数吸引子, 如果存在全测集 $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$ 使得对任意 $\omega \in \tilde{\Omega}$, 下面的性质成立:

(i) 紧性: $\mathcal{M}(\omega)$ 是紧集;

(ii) 有限维性: 存在随机变量 $\xi_\omega$ $(< \infty)$ 使得 $\dim_f \mathcal{M}(\omega) \leqslant \xi_\omega < \infty$, 其中 $\dim_f \mathcal{M}(\omega)$ 是 $\mathcal{M}(\omega)$ 的分形维数;

(iii) (拉回) 一致指数吸引性: 存在常数 $\alpha > 0$, 使得对任意 $B \in \mathcal{D}(X)$, 存在随机变量 $\bar{t}_B(\omega) \geqslant 0$ 和 $\bar{Q}(\omega, \|B\|_X) > 0$ 使得

$$\sup_{\sigma\in\mathbb{T}^k} \operatorname{dist}_X(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma)B(\vartheta_{-t}\omega), \mathcal{M}(\omega)) \leqslant \bar{Q}(\omega, \|B\|_X)\mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad t \geqslant \bar{t}_B(\omega). \tag{3.2}$$

**注 3.1** 根据定义 3.5 可知, 随机一致指数吸引子沿着样本轨道没有 (正) 不变性.

令 $\{\pi(t, \omega)\}_{t\geqslant 0, \omega\in\Omega}$ 是由 (3.1) 给出的扩展空间 $\mathbb{X}$ 上的连续余圈. 假设

(A1) 存在 $\mathbb{X}$ 中的缓增随机闭集 $\{\chi(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$, 使得对任意 $\omega \in \Omega$,

(a11) $\chi(\omega)$ 的直径有界, 即 $\sup_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\in\chi(\omega)} \|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\|_{\mathbb{X}} \leqslant R_\omega < \infty$, 其中 $R_\omega$ 是缓增随机变量且 $R_{\vartheta_t\omega}$ 关于 $t \in \mathbb{R}$ 连续;

(a12) $\chi(\omega)$ 关于 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是正不变的, 即 $\pi(t, \vartheta_{-t}\omega)\chi(\vartheta_{-t}\omega) \subseteq \chi(\omega)$, $t \geqslant 0$;

(a13) 对任意 $\mathbb{B} \in \mathcal{D}_{\mathbb{X}}$, 存在 $T_{\mathbb{B}} = T_{\mathbb{B}}(\omega) \geqslant 0$ 使得 $\pi(t, \vartheta_{-t}\omega)\mathbb{B}(\vartheta_{-t}\omega) \subseteq \chi(\omega)$, $t \geqslant T_{\mathbb{B}}$;

(A2) 存在正数 $\bar{\lambda}$、$\bar{\delta}$、随机变量 $\bar{C}_0(\omega) > 0$ 和 $(k+K)$- 维投影 $\mathbb{P}_{k+K}$: $\mathbb{X} \to \mathbb{P}_{k+K}\mathbb{X}$ $(\dim(\mathbb{P}_{k+K}\mathbb{X}) = k + K \in \mathbb{N})$, 使得对任意 $\omega \in \Omega$ 和 $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \chi(\omega)$, 有

$$\|\pi(t, \omega)\mathcal{X} - \pi(t, \omega)\mathcal{Y}\|_{\mathbb{X}} \leqslant \mathrm{e}^{\int_0^{\frac{8\ln 2}{\bar{\lambda}}} \bar{C}_0(\vartheta_s\omega)ds}\|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\|_{\mathbb{X}}, \quad \forall\, t \in \left[0, \frac{8\ln 2}{\bar{\lambda}}\right], \tag{3.3}$$

$$\left\|(I_{\mathbb{X}}-\mathbb{P}_{k+K})\left(\pi\left(\frac{8\ln 2}{\bar{\lambda}},\omega\right)\mathcal{X}-\pi\left(\frac{8\ln 2}{\bar{\lambda}},\omega\right)\mathcal{Y}\right)\right\|_{\mathbb{X}}\leqslant\left(\mathrm{e}^{-8\ln 2}+\frac{\bar{\delta}}{2}\mathrm{e}^{\int_0^{\frac{8\ln 2}{\lambda}}\bar{C}_0(\vartheta_s\omega)ds}\right)\|\mathcal{X}-\mathcal{Y}\|_{\mathbb{X}},\quad(3.4)$$

其中 $\bar{\lambda}$、$\bar{\delta}$ 和 $K$ 独立于 $\omega$;

(A3) $\bar{C}_0(\omega)$、$\bar{\lambda}$ 和 $\bar{\delta}$ 满足

$$0\leqslant \mathrm{E}[\bar{C}_0^2(\omega)]<\infty,\quad 0<\bar{\delta}\leqslant\min\left\{\frac{1}{16},\mathrm{e}^{-\frac{2}{\ln\frac{3}{2}}\left(\frac{128(\ln 2)^2}{\bar{\lambda}^2}\mathrm{E}[\bar{C}_0^2(\omega)]+\frac{64(\ln 2)^2}{\bar{\lambda}}\mathrm{E}[\bar{C}_0(\omega)]\right)}\right\},\quad(3.5)$$

其中 E 表示期望.

**定理 3.1** 假设 (A1)–(A3) 成立, 则由带基流 $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和 $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的联合连续非自治随机动力系统 $\{\phi(t,\omega,\sigma)\}_{t\geqslant 0,\omega\in\Omega,\sigma\in\mathbb{T}^k}$ 产生的 $\mathbb{X}$ 上的连续斜积余圈 $\pi$ 存在 $\mathcal{D}_{\mathbb{X}}$- 随机拉回指数吸引子 $\mathbb{E}\subseteq\chi$. 此外, $P_X\mathbb{E}$ 是 $\{\phi(t,\omega,\sigma)\}_{t\geqslant 0,\omega\in\Omega,\sigma\in\mathbb{T}^k}$ 的 $\mathcal{D}(X)$- 随机一致指数吸引子.

**证明** 连续斜积余圈 $\{\pi(t,\omega)\}_{t\geqslant 0,\omega\in\Omega}$ 的 $\mathcal{D}_{\mathbb{X}}$- 随机拉回指数吸引子 $\mathbb{E}$ 的存在性可由定理 2.1 得到. 可以断言 $P_{\mathbb{T}^k}(\mathbb{E}(\omega))=\mathbb{T}^k$, a.e. $\omega\in\Omega$. 否则, $\mathbb{P}\{\omega:P_{\mathbb{T}^k}(\mathbb{E}(\omega))\neq\mathbb{T}^k\}>0$, 令 $\mathfrak{I}=\{\omega:P_{\mathbb{T}^k}(\mathbb{E}(\omega))\neq\mathbb{T}^k\}$. 记 $P_{\mathbb{T}^k}\mathbb{E}(\omega)=A(\omega)$, $\omega\in\mathfrak{I}$, 其中 $A(\omega)\subsetneqq\mathbb{T}^k$. 从而, 存在 $\sigma_0(\omega)\in\mathbb{T}^k\backslash A(\omega)$ 使得

$$\mathrm{dist}_{\mathbb{T}^k}(\mathbb{T}^k,A(\omega))\geqslant\mathrm{dist}_{\mathbb{T}^k}(\sigma_0(\omega),A(\omega))>0,\quad\omega\in\mathfrak{I},$$

这与随机拉回指数吸引子 $\mathbb{E}$ 的指数吸引性矛盾. 换句话说, 存在 $\Omega$ 的子集 $\mathfrak{I}$ 使得 $\mathbb{P}(\mathfrak{I})>0$ 且 $\mathbb{E}$ 的指数吸引性对 $\omega\in\mathfrak{I}$ 不成立, 这与随机拉回指数吸引子的定义矛盾; $P_X\mathbb{E}$ 的紧性和可测性可由 $\mathbb{E}$ 的紧性和可测性直接得到. 显然, $\dim_f P_X\mathbb{E}(\omega)\leqslant\dim_f\mathbb{E}(\omega)\leqslant\frac{2(k+K)\ln(\frac{2\sqrt{k+K}}{\bar{\delta}}+1)}{\ln\frac{4}{3}}<\infty$, $\forall\omega\in\Omega$, 因为 $\frac{\ln N_\epsilon(\bigcup_{\sigma\in\mathbb{T}^k}P_\sigma\mathbb{E}(\omega))}{-\ln\epsilon}\leqslant\frac{\ln N_\epsilon(\bigcup_{\sigma\in\mathbb{T}^k}\{\sigma\}\times P_\sigma\mathbb{E}(\omega))}{-\ln\epsilon}$, $\forall\omega\in\Omega$. 接下来证明 $P_X\mathbb{E}$ 关于 $\mathcal{D}(X)$ 的一致指数吸引性. 注意到对任意 $x\in X$, $\sigma\in\mathbb{T}^k$, $\omega\in\Omega$ 和 $t\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_X(x,P_X\mathbb{E}(\omega))&=\inf_{\sigma'\in\mathbb{T}^k}\mathrm{dist}_X(x,P_{\sigma'}\mathbb{E}(\omega))\\&\leqslant\inf_{\sigma'\in\mathbb{T}^k}(\mathrm{dist}_X^2(x,P_{\sigma'}\mathbb{E}(\omega))+\|\sigma-\sigma'\|_{\mathbb{T}^k}^2)^{\frac{1}{2}}\\&=\mathrm{dist}_{\mathbb{X}}\left(\{\sigma\}\times\{x\},\bigcup_{\sigma'\in\mathbb{T}^k}\{\sigma'\}\times\{P_{\sigma'}\mathbb{E}(\omega)\}\right).\end{aligned}$$

对任意 $D\in\mathcal{D}(X)$, 由于 $\mathbb{D}$ ($\mathbb{D}(\omega)=\mathbb{T}^k\times D(\omega)$) 属于 $\mathcal{D}_{\mathbb{X}}$, 因此 $\mathbb{E}$ 指数吸引 $\mathbb{D}$. 从而, 对任意 $\omega\in\Omega$ 和 $\sigma\in\mathbb{T}^k$, 存在 $\tilde{T}(\omega,\mathbb{D})\geqslant 0$ 使得

$$\begin{aligned}&\sup_{\sigma\in\mathbb{T}^k}\mathrm{dist}_X(\phi(t,\vartheta_{-t}\omega,\theta_{-t}\sigma)D(\vartheta_{-t}\omega),\,P_X\mathbb{E}(\omega))\\&\quad\leqslant\sup_{\sigma\in\mathbb{T}^k}\mathrm{dist}_{\mathbb{X}}\left(\{\sigma\}\times\phi(t,\vartheta_{-t}\omega,\theta_{-t}\sigma)D(\vartheta_{-t}\omega),\bigcup_{\sigma\in\mathbb{T}^k}\{\sigma'\}\times P_{\sigma'}\mathbb{E}(\omega)\right)\\&\quad=\sup_{\sigma\in\mathbb{T}^k}\mathrm{dist}_{\mathbb{X}}(\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\{\theta_{-t}\sigma\}\times D(\vartheta_{-t}\omega),\,\mathbb{E}(\omega))\\&\quad=\mathrm{dist}_{\mathbb{X}}(\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\mathbb{D}(\vartheta_{-t}\omega),\,\mathbb{E}(\omega))\leqslant\breve{b}(\omega)\mathrm{e}^{-\ln\frac{\ln\frac{4}{3}}{4t_0}t},\quad t\geqslant\tilde{T}(\omega,\mathbb{D}),\end{aligned}\quad(3.6)$$

这说明了 $P_X\mathbb{E}$ 的一致指数吸引性. 证毕. □

### 3.2　问题的提出

在本小节中, 空间 $H$、$V$、Stokes 算子 $A$ 和双线性算子 $B(u,v)$ 与第 2 节中所给出的一致.

考虑如下带加法噪声和拟周期外力的二维 NS 方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=g(x,\tilde{\sigma}(t))+\psi\dfrac{dW(t)}{dt},\\ \nabla\cdot u=0,\quad x\in\mathcal{O},\quad t>0,\end{cases}\tag{3.7}$$

赋予初边值条件

$$\begin{cases}u(x,t)=0,\quad x\in\partial\mathcal{O},\quad t>0,\\ u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\mathcal{O}.\end{cases}\tag{3.8}$$

函数 $g(x,\tilde{\sigma}(t))$ 满足下面的假设:

(B) $\omega_i\to g(\cdot,\omega_1,\ldots,\omega_k)$ 是 $2\pi$- 周期的, $i=1,\ldots,k$, $g\in C(\mathcal{O}\times\mathbb{T}^k,\mathbb{R}^2)$, $g(x,\cdot)\in C(\mathbb{T}^k,H)$ 且 $|g|^2=\max_{\sigma\in\mathbb{T}^k}|g(\cdot,\sigma)|^2<\infty$. 存在 $h(x)\in H$ 使得

$$|g(\widetilde{\sigma}_1(t))-g(\widetilde{\sigma}_2(t))|\leqslant|h|\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}.\tag{3.9}$$

假设

$$\psi\in W^{1,\infty}(\mathcal{O})^2\cap D(A).$$

类似地, 可以在分布意义下将 (3.7) 写成如下抽象形式:

$$\frac{du}{dt}+\nu Au+B(u,u)=g(x,\tilde{\sigma}(t))+\psi\frac{dW}{dt}.\tag{3.10}$$

在下文中, 仍然使用第 2.2 小节给出的遍历度量动力系统 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$.

令 $v(t)=u(t)-z(\vartheta_t\omega)\psi$, 根据 (3.10) 可知, $v(t)$ 满足

$$\frac{dv}{dt}+\nu Av+B(v+z(\vartheta_t\omega)\psi,v+z(\vartheta_t\omega)\psi)=g(x,\tilde{\sigma}(t))+\alpha z(\vartheta_t\omega)\psi-\nu z(\vartheta_t\omega)A\psi,\tag{3.11}$$

$$\nabla\cdot v=0,\quad x\in\mathcal{O},\quad t>0.\tag{3.12}$$

赋予初边值条件

$$v(x,t)=0,\quad x\in\partial\mathcal{O},\quad t>0,\tag{3.13}$$

$$v(x,0)=v_0(x)=u_0-z(\omega)\psi,\quad x\in\mathcal{O}.\tag{3.14}$$

从文献 [18, 26] 知, 对任意 $\sigma\in\mathbb{T}^k$, $\omega\in\Omega$ 和 $v_0\in H$, 问题 (3.11)–(3.14) 存在唯一解 $v(t,\omega,\sigma,v_0)\in C([0,+\infty],H)\cap L^2_{\mathrm{loc}}([0,+\infty],V)$ $(\partial_t v\in L^2_{\mathrm{loc}}([0,+\infty],V'))$. 此外, 映射 $v(t,\omega,\cdot,\cdot)$ 是 $(\Sigma\times H,H)$- 连续的, 且 $v(t)$ 是 $(\mathcal{F},\mathcal{B}(H))$- 可测的. 故可以定义联合连续非自治随机动力系统 $\phi:\mathbb{R}^+\times\Omega\times\mathbb{T}^k\times H\to H$,

$$(t,\omega,\sigma,v_0)\to\phi(t,\omega,\sigma,v_0)=v(t,\omega,\sigma,v_0).$$

在下文中, 令 $\mathcal{D}=\mathcal{D}(H)$ 是 $H$ 中所有的缓增随机有界集的集合, 即

$$\mathcal{D}=\{D:D\text{ 是 }H\text{ 中的随机有界集且满足 }\mathrm{e}^{-\alpha t}|D(\vartheta_{-t}\omega)|_H^2\xrightarrow{t\to+\infty}0,\forall\,\alpha>0,\omega\in\Omega\}.$$

接下来证明 (3.11)–(3.14) 产生的联合连续非自治随机动力系统 $\phi$ 存在 $\mathcal{D}$- 随机一致指数吸引子.

### 3.3 解的一致估计

对任意 $\omega\in\Omega$, $\sigma\in\mathbb{T}^k$ 和 $t\geqslant 0$, 令 $v(r)=v(r,\vartheta_{-t}\omega,\sigma,v_0(\vartheta_{-t}\omega))\,(r\geqslant 0)$ 是 (3.11) 和 (3.14) 的具有符号 $\sigma$ 和初值 $v_0(\vartheta_{-t}\omega)\in H$ 的解.

**引理 3.1** 对任意 $B\in\mathcal{D}$ 和 $\omega\in\Omega$, 存在 $\bar{T}_0=\bar{T}_0(\omega,B)\geqslant 0$ 和缓增随机变量 $L_0^2(\omega)>0$, 使得对任意 $v_0(\vartheta_{-t}\omega)\in B(\vartheta_{-t}\omega)$,

$$|v(t,\vartheta_{-t}\omega,\sigma,v_0(\vartheta_{-t}\omega))|^2\leqslant L_0^2(\omega),\quad t\geqslant\bar{T}_0$$

关于 $\sigma\in\mathbb{T}^k$ 一致成立.

**证明** 由 (3.11) 知,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2+\nu\|v\|^2&\leqslant|\langle B(v+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi,v+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi),v\rangle|+|g(x,\tilde{\sigma}(r))||v|\\&\quad+\alpha|z(\vartheta_{r-t}\omega)||\psi|\,|v|+\nu|z(\vartheta_{r-t}\omega)|\|\psi\|\|v\|.\end{aligned}$$

根据 (2.18) 和 (2.19) 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2+\nu\|v\|^2&\leqslant c_0|z(\vartheta_{r-t}\omega)||v|^2+c_0|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^2|v|+|g(x,\tilde{\sigma}(r))||v|\\&\quad+\alpha c_0|z(\vartheta_{r-t}\omega)||v|+\nu c_0|z(\vartheta_{r-t}\omega)|\|v\|.\end{aligned}$$

在下文中, 用 $\tilde{c}_i$ $(i\in\mathbb{N}^+)$ 表示正常数, 则

$$\frac{d}{dt}|v|^2+\nu\|v\|^2\leqslant 2c_0|z(\vartheta_{r-t}\omega)||v|^2+\tilde{c}_1|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^4+\tilde{c}_1|g(x,\tilde{\sigma}(r))|^2+\tilde{c}_1,\tag{3.15}$$

$$\frac{d}{dt}|v|^2+\frac{\nu}{2}\|v\|^2\leqslant\Big(-\frac{\nu\lambda_1}{2}+2c_0|z(\vartheta_{r-t}\omega)|\Big)|v|^2+\tilde{c}_1(|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^4+|g(x,\tilde{\sigma}(r))|^2+1),\tag{3.16}$$

其中 $\tilde{c}_1$ 依赖 $\nu$、$\lambda_1$ 和 $\psi$. 对 (3.16) 在 $[0,r]$ 上应用 Gronwall 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&|v(r,\vartheta_{-t}\omega,\sigma,v_0(\vartheta_{-t}\omega))|^2+\frac{\nu}{2}\int_0^r\mathrm{e}^{\int_l^r(2c_0|z(\vartheta_{s-t}\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}\|v(l,\vartheta_{-t}\omega,\sigma,v_0(\vartheta_{-t}\omega))\|^2dl\\&\leqslant\mathrm{e}^{\int_{-t}^{r-t}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}|v_0(\vartheta_{-t}\omega)|^2+\tilde{c}_2\int_{-t}^{r-t}\mathrm{e}^{\int_l^{r-t}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1)dl,\end{aligned}\tag{3.17}$$

其中 $\tilde{c}_2$ 依赖 $\nu$、$\lambda_1$、$\psi$ 和 $g$. 取 $r=t$, 则有

$$\begin{aligned}|v(t,\vartheta_{-t}\omega,\sigma,v_0(\vartheta_{-t}\omega))|^2&\leqslant\mathrm{e}^{\int_{-t}^0(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}|v_0(\vartheta_{-t}\omega)|^2\\&\quad+\tilde{c}_2\int_{-t}^0\mathrm{e}^{\int_l^0(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1)dl.\end{aligned}$$

假设 $\frac{2}{\sqrt{\pi\alpha}}\leqslant\frac{\nu\lambda_1}{8c_0}$, 由 (2.23) 知, 存在 $\tilde{T}_0(\omega)>0$ 使得 $2c_0\int_{-t}^0|z(\vartheta_s\omega)|ds\leqslant\frac{\nu\lambda_1}{4}t$, $t\geqslant\tilde{T}_0(\omega)$. 取 $\bar{T}_0=\bar{T}_0(\omega,B)=\min\{t\geqslant\tilde{T}_0(\omega)\mid\mathrm{e}^{\int_{-t}^0(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}\sup_{v\in B(\vartheta_{-t}\omega)}|v|^2\leqslant 1\}$, 则

$$\begin{aligned}|v(t,\vartheta_{-t}\omega,\sigma,v_0(\vartheta_{-t}\omega))|^2&\leqslant 1+\tilde{c}_2\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{\int_l^0(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1)dl\\&=1+\tilde{c}_2K_0(\omega)\\&\doteq L_0^2(\omega),\quad t\geqslant\bar{T}_0,\end{aligned}$$

其中 $K_0(\omega)=\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{\int_l^0(2c_0|z(\vartheta_s\omega)|-\frac{\nu\lambda_1}{2})ds}(|z(\vartheta_l\omega)|^4+1)dl$ 是缓增的. 证毕. □

**引理 3.2**　对任意 $\omega \in \Omega$, 令 $B_0 = \{v \in H : |v| \leqslant L_0(\omega)\}$, 则对任意 $\omega \in \Omega$, 存在 $\bar{T}_1 = \bar{T}_1(\omega, B_0) = \min\{t \geqslant \tilde{T}_0(\omega) + 1 \mid \frac{2}{\nu} \mathrm{e}^{\int_{-1}^{0} 2c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds + \frac{\nu\lambda_1}{2} + \int_{-t}^{0}(2c_0|z(\vartheta_s\omega)| - \frac{\nu\lambda_1}{2})ds} L_0^2(\vartheta_{-t}\omega) \leqslant 1\}$ 和缓增随机变量 $L_1(\omega) = 1 + \frac{2\tilde{c}_2}{\nu} \mathrm{e}^{\int_{-1}^{0} 2c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds + \frac{\nu\lambda_1}{2}} K_0(\omega)$ 使得对任意 $v_0(\vartheta_{-t}\omega) \in B_0(\vartheta_{-t}\omega)$,

$$\int_{t-1}^{t} \|v(l, \vartheta_{-t}\omega, \sigma, v_0(\vartheta_{-t}\omega))\|^2 dl \leqslant L_1(\omega), \quad t \geqslant \bar{T}_1$$

关于 $\sigma \in \mathbb{T}^k$ 一致成立.

**证明**　证明类似于引理 2.2, 这里略去. □

下面的引理说明了解在 $V$ 中的估计.

**引理 3.3**　对任意 $\omega \in \Omega$, 存在 $\bar{T}_1 = \bar{T}_1(\omega, B_0) > 0$ (由引理 3.2 给出) 和缓增随机变量 $L_2(\omega) \geqslant 0$,

$$L_2^2(\omega) = \tilde{c}_3 \Big(1 + \max_{-1 \leqslant s \leqslant 0} |z(\vartheta_s\omega)|^2\Big) L_1(\omega) + \tilde{c}_3 \int_{-1}^{0} (1 + |z(\vartheta_s\omega)|^4) ds,$$

其中 $\tilde{c}_3$ 依赖 $\nu$、$\lambda_1$、$\psi$ 和 $g$, 使得 (3.11) 和 (3.14) 的具有初值 $v_0(\vartheta_{-t}\omega) \in B_0(\vartheta_{-t}\omega)$ 的解 $v(t)$ 满足

$$\|v(t, \vartheta_{-t}\omega, \sigma, v_0(\vartheta_{-t}\omega))\| \leqslant L_2(\omega), \quad t \geqslant \bar{T}_1$$

关于 $\sigma \in \mathbb{T}^k$ 一致成立.

**证明**　证明类似于引理 2.3, 这里略去. □

**引理 3.4**　对任意 $\omega \in \Omega$, 令 $B_1(\omega) = \{v \in V : \|v\| \leqslant L_2(\omega)\}$, 则对任意 $\omega \in \Omega$,

$$\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \sigma) B_0(\vartheta_{-t}\omega) \subseteq B_0(\omega) \subset H, \quad t \geqslant \bar{T}_0(\omega, B_0), \tag{3.18}$$

$$\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \sigma) B_0(\vartheta_{-t}\omega) \subseteq B_1(\omega) \subset H, \quad t \geqslant \bar{T}_0(\omega, B_0) + \bar{T}_1(\omega, B_0) \tag{3.19}$$

关于 $\sigma \in \mathbb{T}^k$ 一致成立.

**证明**　由引理 3.1 和 3.3 可以直接推出. 证毕. □

### 3.4　随机一致指数吸引子

对任意 $\omega \in \Omega$, 令 $T_*(\omega) = \bar{T}_0(\omega, B_0) + \bar{T}_1(\omega, B_0)$ 和

$$B_2(\omega) = \bigcup_{t \geqslant T_*(\omega)} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \mathbb{T}^k) B_0(\vartheta_{-t}\omega) \subseteq B_0(\omega) \cap B_1(\omega), \tag{3.20}$$

其中 $\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \mathbb{T}^k) B_0(\vartheta_{-t}\omega) = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{T}^k} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \sigma) B_0(\vartheta_{-t}\omega)$. 记

$$\mathbb{B}(\vartheta_{-s}\omega) = \overline{\bigcup_{t \geqslant \max\{T_*(\vartheta_{-s}\omega), T_*(\omega)\}} \pi(t, \vartheta_{-t-s}\omega) \mathbb{T}^k \times B_2(\vartheta_{-t-s}\omega)}, \quad s \geqslant 0, \quad \omega \in \Omega, \tag{3.21}$$

其中 $\pi$ 是由 $\phi$ 和 $\vartheta$ 产生的 $\mathbb{X} = \mathbb{T}^k \times H$ 上的斜积余圈. 显然, $P_H \mathbb{B} \subseteq B_2$, 其中 $P_H$ 是从 $\mathbb{T}^k \times H$ 到 $H$ 的投影. 我们可以断言 $\mathbb{B}$ 具有如下性质.

(b1) 对任意 $\omega \in \Omega$, 有 $\mathbb{B}(\omega) \subseteq \mathbb{T}^k \times B_2(\omega) \subseteq \mathbb{T}^k \times (B_0(\omega) \cap B_1(\omega))$. 因此, $\mathbb{B}(\omega)$ 在 $\mathbb{T}^k \times H$ 中的直径以 $(k(2\pi)^2 + 4L_0^2(\omega))^{1/2}$ 为上界, 其中 $L_0^2(\vartheta_t\omega)$ 关于 $t \in \mathbb{R}$ 连续.

(b2) $\mathbb{B}(\omega)$ 是正不变的, 即 $\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\mathbb{B}(\vartheta_{-t}\omega)\subseteq\mathbb{B}(\omega)$ 对任意 $\omega\in\Omega$ 和 $t\geqslant 0$ 都成立. 事实上, 对任意 $\omega\in\Omega$, 任取 $\{\sigma\}\times\{x\}\in\bigcup_{s\geqslant\max\{T_*(\vartheta_{-t}\omega),T_*(\omega)\}}\pi(s,\vartheta_{-s-t}\omega)\mathbb{T}^k\times B_2(\vartheta_{-s-t}\omega)$, 则存在 $\hat{t}\geqslant\max\{T_*(\vartheta_{-t}\omega),T_*(\omega)\}$, $\hat{\sigma}\in\mathbb{T}^k$ 和 $\hat{x}\in B_2(\vartheta_{-\hat{t}-t}\omega)$ 使得

$$\{\sigma\}\times\{x\}=\pi(\hat{t},\vartheta_{-\hat{t}-t}\omega)\{\hat{\sigma}\}\times\{\hat{x}\}=\{\vartheta_{\hat{t}}\hat{\sigma}\}\times\{\phi(\hat{t},\vartheta_{-\hat{t}-t}\omega,\hat{\sigma},\hat{x})\}.$$

因此, 对任意 $t\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\{\sigma\}\times\{x\}&=\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\pi(\hat{t},\vartheta_{-\hat{t}-t}\omega)\{\hat{\sigma}\}\times\{\hat{x}\}\\&=\pi(\hat{t}+t,\vartheta_{-\hat{t}-t}\omega)\{\hat{\sigma}\}\times\{\hat{x}\}\\&\in\pi(\hat{t}+t,\vartheta_{-\hat{t}-t}\omega)\{\hat{\sigma}\}\times B_2(\vartheta_{-\hat{t}-t}\omega).\end{aligned}$$

注意到 $\hat{t}+t\geqslant T_*(\omega)+t$, 根据 (3.21), 有 $\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\{\sigma\}\times\{x\}\in\tilde{\mathbb{B}}(\omega)$. 考虑到 $\pi$ 是连续的和 $\mathbb{B}$ 是闭的, 可得 $\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\mathbb{B}(\vartheta_{-t}\omega)\subseteq\mathbb{B}(\omega)$. 此外, 对任意 $r\geqslant 0$, $t\geqslant 0$ 和 $\omega\in\Omega$, 有

$$\pi(r,\vartheta_{-t}\omega)\mathbb{B}(\vartheta_{-t}\omega)\subseteq\mathbb{B}(\vartheta_{r-t}\omega),\tag{3.22}$$

上式和 $P_H\mathbb{B}\subseteq B_2$ 可以推出对任意 $r\geqslant 0$, $t\geqslant 0$ 和 $\omega\in\Omega$, 有

$$\phi(r,\vartheta_{-t}\omega,\sigma,x)\in B_2(\vartheta_{r-t}\omega),\quad\forall\,\{\sigma\}\times\{x\}\in\mathbb{B}(\vartheta_{-t}\omega).\tag{3.23}$$

(b3) $\mathbb{B}$ 是 $\mathcal{D}_{\mathbb{X}}$- 拉回吸收的. 实际上, 对任意 $\mathbb{D}\in\mathcal{D}_{\mathbb{X}}$ 和 $\omega\in\Omega$, 存在 $\tilde{t}(\mathbb{D},\omega)>0$ 使得

$$\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\mathbb{D}(\vartheta_{-t}\omega)\subseteq\mathbb{B}(\omega),\quad t\geqslant\tilde{t}(\mathbb{D},\omega).$$

根据定理 3.1, 为证明 $\phi$ 存在 $\mathcal{D}$- 随机一致指数吸引子, 需要验证 $\mathbb{B}$ 满足 (A2) 和 (A3).

对任意 $r\geqslant 0$, $t\geqslant 0$, $\omega\in\Omega$ 和 $\{\sigma_j\}\times\{v_0^j(\vartheta_{-t}\omega)\}\in\mathbb{B}(\vartheta_{-t}\omega)$, $j=1,2$, 令

$$v_j(r)=v_j(r,\vartheta_{-t}\omega,\sigma_j,v_0^j(\vartheta_{-t}\omega)),\quad y(r)=v_1(r)-v_2(r),\quad j=1,2.\tag{3.24}$$

根据 (3.23) 和 (3.20) 知,

$$\begin{aligned}&v_j(r)\in B_0(\vartheta_{r-t}\omega),\quad|v_j(r)|\leqslant L_0(\vartheta_{r-t}\omega),\quad j=1,2,\\&v_j(r)\in B_1(\vartheta_{r-t}\omega),\quad\|v_j(r)\|\leqslant L_2(\vartheta_{r-t}\omega),\quad j=1,2.\end{aligned}$$

由 (3.24) 有

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=-\nu Ay-B(v_1+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi,v_1+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi)+B(v_2+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi,v_2+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi)\\\qquad\quad+g(x,\widetilde{\sigma_1}(r))-g(x,\widetilde{\sigma_2}(r)),\\y(0)=v_1(0)-v_2(0)=v_0^1(\vartheta_{-t}\omega)-v_0^2(\vartheta_{-t}\omega),\quad r\geqslant 0.\end{cases}\tag{3.25}$$

下面的引理说明了 $\pi$ 在 $\mathbb{B}$ 上的 Lipschitz 连续性.

**引理 3.5** 对任意 $r\geqslant 0$, $t\geqslant 0$, $\omega\in\Omega$ 和 $\{\sigma_i\}\times\{v_0^j(\vartheta_{-t}\omega)\}\in\mathbb{B}(\vartheta_{-t}\omega)$, $j=1,2$, 有

$$\|\pi(r,\vartheta_{-t}\omega)\{\sigma_1\}\times\{v_0^1(\vartheta_{-t}\omega)\}-\pi(r,\vartheta_{-t}\omega)\{\sigma_2\}\times\{v_0^2(\vartheta_{-t}\omega)\}\|_{\mathbb{X}}^2$$

$$\leqslant \mathrm{e}^{\int_0^r \tilde{c}_4(L_2^2(\vartheta_{s-t}\omega)+|z(\vartheta_{s-t}\omega)|^2+1)ds}(|v_0^1(\vartheta_{-t}\omega)-v_0^2(\vartheta_{-t}\omega)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2). \tag{3.26}$$

特别地,

$$\begin{aligned}&\|\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\{\sigma_1\}\times\{v_0^1(\vartheta_{-t}\omega)\}-\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\{\sigma_2\}\times\{v_0^2(\vartheta_{-t}\omega)\}\|_{\mathbb{X}}^2\\&\quad\leqslant \mathrm{e}^{\int_{-t}^0 \tilde{c}_4(L_2^2(\vartheta_s\omega)+|z(\vartheta_s\omega)|^2+1)ds}(|v_0^1(\vartheta_{-t}\omega)-v_0^2(\vartheta_{-t}\omega)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2).\end{aligned} \tag{3.27}$$

**证明** 在 $H$ 中取内积 $((3.25),y(r))$, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y|^2+\nu\|y\|^2+\langle B(v_1+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi,v_1+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi),y\rangle\\&\quad-\langle B(v_2+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi,v_2+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi),y\rangle\\&\quad\quad=(g(x,\widetilde{\sigma_1}(r))-g(x,\widetilde{\sigma_2}(r)),y).\end{aligned} \tag{3.28}$$

类似于 (2.39), 有

$$\begin{aligned}&|\langle B(v_1+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi,v_1+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi),y\rangle-\langle B(v_2+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi,v_2+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi),y\rangle|\\&\quad\leqslant \nu\|y\|^2+\frac{\tilde{c}^2}{2\nu}L_2^2(\vartheta_{r-t}\omega)|y|^2+\frac{\tilde{c}^2\|\psi\|^2}{2\nu}|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^2|y|^2.\end{aligned} \tag{3.29}$$

由 (3.9) 得

$$(g(x,\widetilde{\sigma_1}(r))-g(x,\widetilde{\sigma_2}(r)),y)\leqslant \frac{|h|^2}{2}\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2+\frac{1}{2}|y|^2. \tag{3.30}$$

从 (3.28)–(3.30) 可推出

$$\frac{d}{dt}(|y|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2)\leqslant \tilde{c}_4(L_2^2(\vartheta_{r-t}\omega)+|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^2+1)(|y|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2), \tag{3.31}$$

其中 $c_4=\frac{\tilde{c}^2}{\nu}+\frac{\tilde{c}^2\|\psi\|^2}{\nu}+1+|h|^2$. 对 (3.31) 在 $[0,r]$ 上应用 Gronwall 不等式, 可得

$$|y(r)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2\leqslant \mathrm{e}^{\int_0^r \tilde{c}_4(L_2^2(\vartheta_{s-t}\omega)+|z(\vartheta_{s-t}\omega)|^2+1)ds}(|y(0)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2). \tag{3.32}$$

在 (3.32) 中取 $r=t$, 有

$$|y(t,\vartheta_{-t}\omega,\sigma,y_0(\vartheta_{-t}\omega))|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2\leqslant \mathrm{e}^{\int_{-t}^0 \tilde{c}_4(L_2^2(\vartheta_s\omega)+|z(\vartheta_s\omega)|^2+1)ds}(|y(0)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2).$$

证毕. □

令 $y(r)=v_1(r,\vartheta_{-t}\omega,\sigma_1,v_0^1(\vartheta_{-t}\omega))-v_2(r,\vartheta_{-t}\omega,\sigma_2,v_0^2(\vartheta_{-t}\omega))$ $(r\geqslant 0)$ 是 (3.25) 的具有初值 $y(0)=v_0^1(\vartheta_{-t}\omega)-v_0^2(\vartheta_{-t}\omega)$ 的解. 记 $y_{1,m}(r)=P_my(r)$, $y_{2,m}(r)=Q_my(r)$, 其中 $P_m$ 由 (2.41) 给出, 则 $y(r)=y_{1,m}(r)+y_{2,m}(r)$. 接下来估计 $y_{2,m}(t)$.

**引理 3.6** 对 $t\geqslant 0$, $\omega\in\Omega$ 和 $m\in\mathbb{N}$, 存在随机变量 $\bar{C}_0(\omega)\geqslant 0$ 使得对任意 $\{\sigma_i\}\times\{v_0^j(\vartheta_{-t}\omega)\}\in\mathbb{B}(\vartheta_{-t}\omega)$, $j=1,2$, 有

$$\begin{aligned}|y_{2,m}(t)|&=|Q_m\phi(t,\vartheta_{-t}\omega,\sigma_1,v_0^1(\vartheta_{-t}\omega))-Q_m\phi(t,\vartheta_{-t}\omega,\sigma_2,v_0^2(\vartheta_{-t}\omega))|\\&\leqslant(\mathrm{e}^{-\frac{\nu\lambda_1}{4}t}+G(\lambda_m)\mathrm{e}^{\int_{-t}^0\bar{C}_0(\vartheta_s\omega)ds})(|v_0^1(\vartheta_{-t}\omega)-v_0^2(\vartheta_{-t}\omega)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2)^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{3.33}$$

其中

$$G(\lambda_m)=\sqrt{\frac{\tilde{c}_6(1+\sqrt{\lambda_m})}{(\frac{3}{2}(\nu\lambda_m-\frac{\nu\lambda_1}{2}))^{\frac{2}{3}}}+\frac{\tilde{c}_6(1+\sqrt{\lambda_m})}{(\nu\lambda_m-\frac{\nu\lambda_1}{2})}}.$$

**证明** 在 $H$ 中取内积 $((3.25), y_{2,m}(r))$, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_{2,m}(r)|^2+\nu\|y_{2,m}(r)\|^2+\langle B(v_1(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi, v_1(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle\\&\quad-\langle B(v_2(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi, v_2(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle\\&\qquad=(g(x,\widetilde{\sigma_1}(r))-g(x,\widetilde{\sigma_2}(r)), y_{2,m}(r)).\end{aligned}\tag{3.34}$$

类似于 (2.46)–(2.48), 有

$$\begin{aligned}&\langle B(v_1(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi, v_1(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle\\&\quad-\langle B(v_2(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi, v_2(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle\\&\qquad=\langle B(y(r), v_1(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle+\langle B(v_2(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi, y(r)), y_{2,m}(r)\rangle,\end{aligned}\tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}&|\langle B(y(r), v_1(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi), y_{2,m}(r)\rangle|\\&\quad\leqslant\frac{4\tilde{c}^2\sqrt{\lambda_m}(1+\|\psi\|^2)}{\nu\sqrt{\lambda_1}}(L_2^2(\vartheta_{r-t}\omega)+|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^2)|y|^2\\&\qquad+\frac{64\tilde{c}^4(1+\|\psi\|^4)}{\nu^3\lambda_1}(L_2^4(\vartheta_{r-t}\omega)+|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^4)|y|^2+\frac{\nu}{4}\|y_{2,m}\|^2,\end{aligned}\tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}&|\langle B(v_2(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi, y(r)), y_{2,m}(r)\rangle|\\&\quad=|\langle B(v_2(r)+z(\vartheta_{r-t}\omega)\psi, y_{2,m}(r)), y(r)\rangle|\\&\quad\leqslant\frac{4\tilde{c}^2\sqrt{\lambda_m}(1+\|\psi\|^2)}{\nu\sqrt{\lambda_1}}(L_2^2(\vartheta_{r-t}\omega)+|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^2)|y|^2\\&\qquad+\frac{64\tilde{c}^4(1+\|\psi\|^4)}{\nu^3\lambda_1}(L_2^4(\vartheta_{r-t}\omega)+|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^4)|y|^2+\frac{\nu}{4}\|y_{2,m}\|^2,\end{aligned}\tag{3.37}$$

$$(g(x,\widetilde{\sigma_1}(r))-g(x,\widetilde{\sigma_2}(r)), y_{2,m})\leqslant\frac{|h|^2}{\nu\lambda_1}\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2+\frac{\nu\lambda_1}{4}|y_{2,m}|^2.\tag{3.38}$$

记 $\tilde{c}_5=4(\frac{4\tilde{c}^2(1+\|\psi\|^2)}{\nu\sqrt{\lambda_1}}+\frac{64\tilde{c}^4(1+\|\psi\|^4)}{\nu^3\lambda_1})$. 从 (2.42) 和 (3.34)–(3.38) 可以推出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|y_{2,m}(r)|^2\leqslant&-\nu\lambda_m|y_{2,m}(r)|^2+\tilde{c}_5(\sqrt{\lambda_m}(L_2^2(\vartheta_{r-t}\omega)+|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^2)+L_2^4(\vartheta_{r-t}\omega)+|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^4)|y(r)|^2\\&+\frac{2|h|^2}{\nu\lambda_1}\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2+\frac{\nu\lambda_1}{2}|y_{2,m}(r)|^2.\end{aligned}\tag{3.39}$$

将 (3.32) 代入到 (3.39), 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|y_{2,m}(r)|^2\leqslant&-\nu\lambda_m|y_{2,m}(r)|^2+\tilde{c}_5(\sqrt{\lambda_m}(L_2^2(\vartheta_{r-t}\omega)+|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^2)+L_2^4(\vartheta_{r-t}\omega)+|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^4)\\&\times\mathrm{e}^{\int_0^r\tilde{c}_4(L_2^2(\vartheta_{s-t}\omega)+|z(\vartheta_{s-t}\omega)|^2+1)ds}(|y(0)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2)\\&+\frac{2|h|^2}{\nu\lambda_1}\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2+\frac{\nu\lambda_1}{2}|y_{2,m}(r)|^2.\end{aligned}\tag{3.40}$$

令 $\tilde{c}_6=\tilde{c}_5+\frac{2|h|^2}{\nu\lambda_1}$, 则由 (3.40) 推出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|y_{2,m}(r)|^2\leqslant&\left(\frac{\nu\lambda_1}{2}-\nu\lambda_m\right)|y_{2,m}(r)|^2+\tilde{c}_6(1+\sqrt{\lambda_m})[(L_2^2(\vartheta_{r-t}\omega)+|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^2+L_2^4(\vartheta_{r-t}\omega)\\&+|z(\vartheta_{r-t}\omega)|^4)\mathrm{e}^{\int_0^r\tilde{c}_4(L_2^2(\vartheta_{s-t}\omega)+|z(\vartheta_{s-t}\omega)|^2+1)ds}+1](|y(0)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2).\end{aligned}\tag{3.41}$$

对 (3.41) 在 $[0,t]$ 上应用 Gronwall 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
|y_{2,m}(t)|^2 \leqslant{} & \mathrm{e}^{-\frac{\nu\lambda_1}{2}t}|y_{2,m}(0)|^2 \\
& + \int_0^t \mathrm{e}^{(\frac{\nu\lambda_1}{2}-\nu\lambda_m)(t-l)}\tilde{c}_6(1+\sqrt{\lambda_m})(L_2^2(\vartheta_{l-t}\omega)+|z(\vartheta_{l-t}\omega)|^2+L_2^4(\vartheta_{l-t}\omega)+|z(\vartheta_{l-t}\omega)|^4) \\
& \times \mathrm{e}^{\int_0^l \tilde{c}_4(L_2^2(\vartheta_{s-t}\omega)+|z(\vartheta_{s-t}\omega)|^2+1)ds}(|y(0)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2)dl \\
& + \tilde{c}_6\int_0^t \mathrm{e}^{(\frac{\nu\lambda_1}{2}-\nu\lambda_m)(t-l)}(1+\sqrt{\lambda_m})(|y(0)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2)dl \\
\leqslant{} & \mathrm{e}^{-\frac{\nu\lambda_1}{2}t}(|y(0)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2)+(|y(0)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2)\mathrm{e}^{\int_{-t}^0 \tilde{c}_4(L_2^2(\vartheta_s\omega)+|z(\vartheta_s\omega)|^2+1)ds} \\
& \times \int_{-t}^0 \mathrm{e}^{(\nu\lambda_m-\frac{\nu\lambda_1}{2})l}\tilde{c}_6(1+\sqrt{\lambda_m})(L_2^2(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^2+L_2^4(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^4)dl \\
& + \tilde{c}_6(1+\sqrt{\lambda_m})(|y(0)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2)\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{(\nu\lambda_m-\frac{\nu\lambda_1}{2})l}dl. \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

注意到下式成立:

$$\begin{aligned}
& \int_{-t}^0 \mathrm{e}^{(\nu\lambda_m-\frac{\nu\lambda_1}{2})l}\tilde{c}_6(1+\sqrt{\lambda_m})(L_2^2(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^2+L_2^4(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^4)dl \\
& \leqslant \tilde{c}_6(1+\sqrt{\lambda_m})\bigg(\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{\frac{3}{2}(\nu\lambda_m-\frac{\nu\lambda_1}{2})l}dl\bigg)^{\frac{2}{3}}\bigg(\int_{-t}^0 (L_2^2(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^2+L_2^4(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^4)^3dl\bigg)^{\frac{1}{3}} \\
& \leqslant \frac{\tilde{c}_6(1+\sqrt{\lambda_m})}{(\frac{3}{2}(\nu\lambda_m-\frac{\nu\lambda_1}{2}))^{\frac{2}{3}}}\mathrm{e}^{\int_{-t}^0 16(L_2^6(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^6+L_2^{12}(\vartheta_l\omega)+|z(\vartheta_l\omega)|^{12})dl}. \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

令 $2\tilde{c}_7=\tilde{c}_4+16$, $G(\lambda_m)=\sqrt{\frac{\tilde{c}_6(1+\sqrt{\lambda_m})}{(\frac{3}{2}(\nu\lambda_m-\frac{\nu\lambda_1}{2}))^{\frac{2}{3}}}+\frac{\tilde{c}_6(1+\sqrt{\lambda_m})}{\nu\lambda_m-\frac{\nu\lambda_1}{2}}}$ $(\xrightarrow{m\to\infty}0)$ 和

$$\bar{C}_0(\omega)=\tilde{c}_7(L_2^2(\omega)+|z(\omega)|^2+L_2^6(\omega)+|z(\omega)|^6+L_2^{12}(\omega)+|z(\omega)|^{12}+1),$$

则由 (3.42) 和 (3.43) 可推出

$$|y_{2,m}(t)|^2 \leqslant (\mathrm{e}^{-\frac{\nu\lambda_1}{2}t}+G^2(\lambda_m)\mathrm{e}^{\int_{-t}^0 2\bar{C}_0(\vartheta_s\omega)ds})(|y(0)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2).$$

证毕. □

**引理 3.7** 对任意 $\omega\in\Omega$ 和 $\{\sigma_j\}\times\{v_0^j(\vartheta_{-t}\omega)\}\in\mathbb{B}(\vartheta_{-t}\omega)$, $j=1,2$, 存在随机变量 $\bar{C}_1(\omega)\geqslant 0$ 和 $(k+m)$- 维投影 $\mathbb{P}_{k+m}:\mathbb{T}^k\times H\to\mathbb{T}^k\times H_m$, $\{\sigma\}\times\{x\}\to\{\sigma\}\times\{P_mx\}$, 使得

$$\begin{aligned}
& \|\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\{\sigma_1\}\times\{v_0^1(\vartheta_{-t}\omega)\}-\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\{\sigma_2\}\times\{v_0^2(\vartheta_{-t}\omega)\}\|_{\mathbb{X}} \\
& \quad \leqslant \mathrm{e}^{\int_{-t}^0 \bar{C}_1(\vartheta_s\omega)ds}(|v_0^1(\vartheta_{-t}\omega)-v_0^2(\vartheta_{-t}\omega)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.44) \\
& \|(I_{\mathbb{X}}-\mathbb{P}_{k+m})\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\{\sigma_1\}\times\{v_0^1(\vartheta_{-t}\omega)\}-(I_{\mathbb{X}}-\mathbb{P}_{k+m})\pi(t,\vartheta_{-t}\omega)\{\sigma_2\}\times\{v_0^2(\vartheta_{-t}\omega)\}\|_{\mathbb{X}} \\
& \quad =|y_{2,m}(t)| \\
& \quad \leqslant (\mathrm{e}^{-\frac{\nu\lambda_1}{4}t}+G(\lambda_m)\mathrm{e}^{\int_{-t}^0 \bar{C}_1(\vartheta_s\omega)ds})(|v_0^1(\vartheta_{-t}\omega)-v_0^2(\vartheta_{-t}\omega)|^2+\|\sigma_1-\sigma_2\|_{\mathbb{T}^k}^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

其中 $\bar{C}_1(\omega)=\tilde{c}_8(L_2^2(\omega)+|z(\omega)|^2+L_2^6(\omega)+|z(\omega)|^6+L_2^{12}(\omega)+|z(\omega)|^{12}+1)$.

**证明** 由引理 3.5 和 3.6 可直接推出. 证毕. □

接下来证明期望 $\mathrm{E}[\bar{C}_1(\omega)]$ 和 $\mathrm{E}[\bar{C}_1^2(\omega)]$ 的有界性.

**引理 3.8** 令 $\alpha > \max\{(96c_0)^{\frac{2}{3}}, (\frac{16c_0}{\nu\lambda_1})^2\}$, 则 $0 \leqslant \mathrm{E}[\bar{C}_1(\omega)], \mathrm{E}[\bar{C}_1^2(\omega)] < \infty$.

**证明** 由于

$$\begin{aligned}
&\bar{C}_1^2(\omega) \leqslant \tilde{c}_9(L_2^4(\omega) + |z(\omega)|^4 + L_2^{12}(\omega) + |z(\omega)|^{12} + L_2^{24}(\omega) + |z(\omega)|^{24} + 1),\\
&L_2^{24}(\omega) \leqslant \tilde{c}_{10}\left(1 + \max_{-1\leqslant s\leqslant 0}|z(\vartheta_s\omega)|^{48} + \int_{-1}^{0}|z(\vartheta_s\omega)|^{48}ds + L_1^{24}(\omega)\right),\\
&L_1^{24}(\omega) \leqslant \tilde{c}_{11}(1 + \mathrm{e}^{\int_{-1}^{0}96c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds} + K_0^{48}(\omega)),
\end{aligned}$$

根据 (2.56) 和 (2.9), 只需证明 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\int_{-1}^{0}96c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds}] < \infty$ 和 $\mathrm{E}[K_0^{48}(\omega)] < \infty$. 根据 (2.8) 和 $\alpha > (96c_0)^{\frac{2}{3}}$, 有 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\int_{-1}^{0}96c_0|z(\vartheta_s\omega)|ds}] \leqslant \mathrm{e}^{\frac{96c_0}{\sqrt{\alpha}}}$. 由 (2.57) 可知 $\mathrm{E}[K_0^{48}(\omega)] < \infty$. 证毕. □

下面给出本节的主要结果.

**定理 3.2** 假设 (B) 和 $\alpha > \max\{(96c_0)^{\frac{2}{3}}, (\frac{16c_0}{\nu\lambda_1})^2\}$ 成立, 则联合连续的非自治随机动力系统 $\{\phi(t,\omega,\sigma)\}_{t\geqslant 0,\omega\in\Omega,\sigma\in\mathbb{T}^k}$ 存在 $\mathcal{D}$- 随机一致指数吸引子 $\{\mathcal{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$, 且具有如下性质:

(i) $\{\mathcal{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 是随机紧集;

(ii) 存在正数 $m_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\dim_f \mathcal{K}(\omega) \leqslant \frac{2(k+m_1)\ln(\frac{\sqrt{k+m_1}}{G(\lambda_{m_1})}+1)}{\ln\frac{4}{3}}, \quad \forall\omega\in\Omega;$$

(iii) 对任意 $\omega \in \Omega$ 和 $B \in \mathcal{D}$, 存在随机变量 $\check{T}(\omega,\mathbb{B}) \geqslant 0$ 和 $\check{b}(\omega) > 0$, 使得

$$\sup_{\sigma\in\mathbb{T}^k}\mathrm{dist}_H(\phi(t,\vartheta_{-t}\omega,\theta_{-t}\sigma)B(\vartheta_{-t}\omega), \mathcal{K}(\omega)) \leqslant \check{b}(\omega)\mathrm{e}^{-\frac{\nu\lambda_1\ln\frac{4}{3}}{128\ln 2}t}, \quad t \geqslant \check{T}(\omega,\mathbb{B}),$$

其中 $\mathbb{B} = \mathbb{T}^k \times B$.

**证明** 在 (3.44) 的右端和 (3.45) 中取 $t = \frac{32\ln 2}{\nu\lambda_1}$. 根据引理 3.8 知,

$$\zeta = \frac{2048(\ln 2)^2}{(\nu\lambda_1)^2}\mathrm{E}[\bar{C}_0^2(\omega)] + \frac{256(\ln 2)^2}{\nu\lambda_1}\mathrm{E}[\bar{C}_0(\omega)] < \infty.$$

由于 $G(\lambda_m) \xrightarrow{m\to+\infty} 0$, 可以选择充分大的 $m = m_1$ 使得 $2G(\lambda_{m_1}) \leqslant \min\{\frac{1}{16}, \mathrm{e}^{-\frac{2}{\ln\frac{3}{2}}\zeta}\}$. 由 (b1)–(b3)、引理 3.7 和定理 3.1 可知定理 3.2 成立. 证毕. □

## 参考文献


1 Eden A, Foias C, Nicolaenko B, et al. Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations. Chichester: John Wiley & Sons, 1994

2 Carvalho A N, Sonner S. Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: Theoretical results. Commun Pure Appl Anal, 2013, 12: 3047–3071

3 Carvalho A N, Sonner S. Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: Properties and applications. Commun Pure Appl Anal, 2014, 13: 1141–1165

4 Czaja R, Efendiev M. Pullback exponential attractors for nonautonomous equations. Part I: Semilinear parabolic problems. J Math Anal Appl, 2011, 381: 748–765

5 Langa J A, Miranville A, Real J. Pullback exponential attractors. Discrete Contin Dyn Syst, 2010, 26: 1329–1357

6 Zhao M, Zhou S. Pullback and uniform exponential attractors for nonautonomous Boussinesq lattice system. Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg, 2015, 25: 1550100

7 Abdallah A Y. Uniform exponential attractors for first order non-autonomous lattice dynamical systems. J Differential Equations, 2011, 251: 1489–1504

8 Abdallah A Y. Asymptotic dynamics of second order nonautonomous systems on infinite lattices. Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg, 2016, 26: 1650003

9 Abdallah A Y. Uniform exponential attractors for non-autonomous Klein-Gordon-Schrödinger lattice systems in weighted spaces. Nonlinear Anal, 2015, 127: 279–297

10 Zhou S, Han X. Uniform exponential attractors for non-autonomous KGS and Zakharov lattice systems with quasiperiodic external forces. Nonlinear Anal, 2013, 78: 141–155

11 Zhou S, Zhao M. Uniform exponential attractor for second order lattice system with quasi-periodic external forces in weighted space. Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg, 2014, 24: 1450006

12 Shirikyan A, Zelik S. Exponential attractors for random dynamical systems and applications. Stoch Partial Differ Equ Anal Comput, 2013, 1: 241–281

13 Caraballo T, Sonner S. Random pullback exponential attractors: General existence results for random dynamical systems in Banach spaces. Discrete Contin Dyn Syst, 2017, 37: 6383–6403

14 Zhou S. Random exponential attractor for cocycle and application to non-autonomous stochastic lattice systems with multiplicative white noise. J Differential Equations, 2017, 263: 2247–2279

15 Wang Z, Zhou S. Random attractor and random exponential attractor for stochastic non-autonomous damped cubic wave equation with linear multiplicative white noise. Discrete Contin Dyn Syst, 2018, 38: 4767–4817

16 Zhou S. Random exponential attractor for stochastic reaction-diffusion equation with multiplicative noise in $\mathbb{R}^3$. J Differential Equations, 2017, 263: 6347–6383

17 Cui H, Langa J A. Uniform attractors for non-autonomous random dynamical systems. J Differential Equations, 2017, 263: 1225–1268

18 Chepyzhov V V, Vishik M I. Attractors for Equations of Mathematical Physics. Providence: Amer Math Soc, 2002

19 Wang B. Sufficient and necessary criteria for existence of pullback attractors for non-compact random dynamical systems. J Differential Equations, 2012, 253: 1544–1583

20 Babin A V. Attractors of Navier-Stokes equations. In: Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, vol. II. Amsterdam: North-Holland, 2003, 169–222

21 Constantin P, Foias C. Navier-Stokes Equations. Chicago: University of Chicago Press, 1988

22 Fabrie P, Miranville A. Exponential attractors for nonautonomous first-order evolution equations. Discrete Contin Dyn Syst, 1998, 4: 225–240

23 Li Y, Wu H, Zhao T. Necessary and sufficient conditions for the existence of exponential attractors for semigroups, and applications. Nonlinear Anal, 2012, 75: 6297–6305

24 Ma Q, Wang S, Zhong C. Necessary and sufficient conditions for the existence of global attractors for semigroups and applications. Indiana Univ Math J, 2002, 51: 1541–1559

25 Brzeźniak Z, Caraballo T, Langa J A, et al. Random attractors for stochastic 2D-Navier-Stokes equations in some unbounded domains. J Differential Equations, 2013, 255: 3897–3919

26 Cui H, Freitas M M, Langa J A. Squeezing and finite dimensionality of cocycle attractors for 2D stochastic Navier-Stokes equation with non-autonomous forcing. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2018, 23: 1297–1324

27 Crauel H, Flandoli F. Attractors for random dynamical systems. Probab Theory Related Fields, 1994, 100: 365–393

28 Crauel H, Debussche A, Flandoli F. Random attractors. J Dynam Differential Equations, 1997, 9: 307–341

29 Flandoli F, Langa J A. Determining modes for dissipative random dynamical systems. Stoch Stoch Rep, 1999, 66: 1–25

30 Flandoli F, Schmalfuß B. Random attractors for the 3d stochastic Navier-Stokes equation with multiplicative white noise. Stochastics, 1996, 59: 21–45

31 Kloeden P E, Langa J A. Flattening, squeezing and the existence of random attractors. Proc R Soc A Math Phys Eng Sci, 2007, 463: 163–181

32 Wang B. Periodic random attractors for stochastic Navier-Stokes equations on unbounded domains. Electron J Differential Equations, 2012, 2012: 1–18

33 Arnold L. Random Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag, 2013

34 Robinson J C. Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors. Cambridge: Cambridge University Press, 2001

35 Caraballo T, Kloeden P E, Schmalfuß B. Exponentially stable stationary solutions for stochastic evolution equations

and their perturbation. Appl Math Optim, 2004, 50: 183–207
36 Fan X. Attractors for a damped stochastic wave equation of Sine-Gordon type with sublinear multiplicative noise. Stoch Anal Appl, 2006, 24: 767–793
37 Foias C, Manley O, Rosa R, et al. Navier-Stokes Equations and Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press, 2001

# Random pullback and uniform exponential attractors for stochastic non-autonomous Navier-Stokes equations

Zongfei Han & Shengfan Zhou

**Abstract** We first prove the existence of a random pullback exponential attractor for the 2D Navier-Stokes equation with additive noise and non-autonomous forcing. Then, we introduce the definition and existence conditions of a random uniform exponential attractor for a jointly continuous non-autonomous random dynamical system, and prove the existence of a random uniform exponential attractor for the 2D Navier-Stokes equation with additive noise and quasi-periodic external forces.

**Keywords** random pullback exponential attractor, random uniform exponential attractor, non-autonomous random dynamical system, Navier-Stokes equation

**MSC(2020)** 37L55, 35B41, 35B40

**doi: 10.1360/SCM-2019-0805**