首都师范大学学报(自然科学版)
第 41 卷　第 6 期　Journal of Capital Normal University　No. 6
2020 年 12 月　(Natural Science Edition)　Dec. ,2020

基于“以学为中心”理念的格林公式的探究式教学*

景慧丽　刘　华

(火箭军工程大学基础部,陕西 西安　710025)

摘要:格林公式是多元函数微积分学中一个非常重要的公式,具有重要的理论价值和应用价值.本文结合相关教学实践,对“格林公式”这一部分内容进行了探究式教学.

关键词:高等数学;探究式教学;格林公式

中图分类号:O143　**DOI**:10.19789/j.1004-9398.2020.06.012

0　引　言

格林公式是《高等数学》课程中的一个重点内容也是一个难点内容[1],从形式上建立了平面有界闭区域上的二重积分和区域边界上的第二类平面曲线积分之间的联系,实质揭示的是函数在区域内部的取值规律和区域边界上的取值规律之间的联系,具有重要的理论价值和应用价值.其在多元函数积分学中最重要的应用之一是计算第二类平面曲线积分.但是在教学中大部分学生甚至是复习考研的学生使用格林公式时经常出错,甚至都不知道格林公式的使用条件.这是因为一方面格林公式确实是比较抽象,另一方面传统讲授法都是先复习牛顿—莱布尼茨公式[2],再给出平面区域的分类及其边界曲线的正向定义,然后直接给出格林定理及其证明,最后再应用格林公式,所以大部分学生既记不住格林公式,更不理解格林公式的使用条件.为了帮助学生理解和熟记格林公式,并能正确地运用格林公式计算第二类平面曲线积分,笔者结合多年的教学实践,对这部分内容进行了探究式教学.

1　格林公式的教学过程

(1)强调联系性,提出问题,进行探索.

首先强调高等数学课程中许多知识体系都是相关联的,并举例加以说明,激发学生的兴趣,然后强调归纳总结在数学学习过程中的重要性,并提出 3 个问题让学生进行归纳总结:到目前为止,以《高等数学》[1-2]所学过的被积函数是二元函数的积分类型有哪些?实质是什么?计算方法是什么?学生讨论、总结完,进行纠正、补充和完善:二重积分和第二类平面曲线积分的实质都是特殊乘积和式的极限,最终都是转化为定积分来计算的.并给出具体的例子加以说明:当 D 是 X - 型域时(图 1),$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$;当曲线 L 是 D 的逆时针方向的边界线时(图 1),$\oint_L P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P[x,\varphi_1(x)]\,\mathrm{d}x - \int_a^b P[x,\varphi_2(x)]\,\mathrm{d}x$.

启发学生思考:有界闭区域 D 上的二重积分和其边界曲线 L 上的曲线积分之间是否存在着联系?又该如何进行分析?其实只要认真观察上述 2 个计算式子,会发现其中的玄机.一方面对学生的结论给予肯定、鼓励,另一方面引导学生继续探

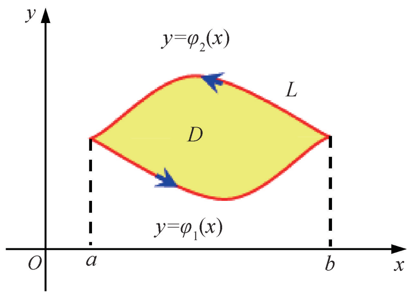

图 1　X - 型域

收稿日期:2019-05-06

*2018 年火箭军工程大学教学成果奖培育项目;高等学校大学数学教学研究与发展中心教学改革项目(CMC20160405)

索:二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ 最终是区间 $[a,b]$ 上的定积分,曲线积分 $\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b P[x,\varphi_1(x)]\mathrm{d}x - \int_a^b P[x,\varphi_2(x)]\mathrm{d}x$ 也是区间 $[a,b]$ 上的定积分,积分区间一样,如果被积函数之间存在着关系,那么这 2 类积分之间就存在着联系,基于以上观察和分析,不妨把二次积分 $\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ 进行化简.要进行化简也就意味着对内层积分需要利用牛顿—莱布尼茨公式,这就要求被积函数 $f(x,y)$ 关于变量 y 的原函数存在,这里不妨设为 $g(x,y)$,即 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = f(x,y)$,则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_a^b \left\{g[x,\varphi_2(x)] - g[x,\varphi_1(x)]\right\}\mathrm{d}x = \int_a^b g[x,\varphi_2(x)]\mathrm{d}x - \int_a^b g[x,\varphi_1(x)]\mathrm{d}x.$$

推导到这里,很容易发现并能总结出其间的关系,即:若令 $g(x,y) = P(x,y)$,则

$$-\iint\limits_{D} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P(x,y)\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

该结论是正确的,且等式(1)成立的条件为 D 是 X - 型域,L 是 D 的逆时针方向的边界线.紧接着,提出下面 3 个思考问题:等式(1)中是否存在着一定的规律呢?存在还是不存在?该如何入手进行分析呢?其实,这 3 个问题的重点和难点就是“如何分析”,这个“如何分析”不是一朝一夕就能学会的,需要慢慢培养和实践的,另外,高等数学课程的教学目标之一就是培养学生分析问题的能力,所以在课堂教学中,教师要有意识地去培养学生分析问题的能力.通过分析方法的传输来培养学生分析问题的能力.可是这样讲解的无论是二重积分还是第二类平面曲线积分,都是由 2 部分组成的,1 个是积分域,另 1 个是被积函数.要分析式(1)中是否存着规律,不妨就从这两方面分别入手进行分析.分析过程最好结合几何图形,这样更直观,学生更容易理解,正如华罗庚先生所言:“数与形,本是相倚依,焉能分作两边飞.数缺形时少知觉,形少数时难入微.数形结合百般好,隔离分家万事非.”[3]分析后,让学生自己把所分析得到的规律总结出来,因为数学语言的表达能力也是学生学习数学所必须具备的能力.这个“规律”很重要,是继续探索的基础,所以把其描述如下:一个二元函数在一个平面有界闭区域 D 内部的取值即二重积分 $\iint\limits_{D} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可以用其“原函数”沿 D 的边界曲线 L 上的曲线积分值即 $\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x$ 来表示.明确“原函数”并不是多元函数微分学中二元函数的原函数,而是二元函数关于某个变量的原函数.

总结规律后,提出问题:$\iint\limits_{D} \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 能不能用 D 的边界上的曲线积分表示?让学生思考、讨论并进行大胆猜想.

(2)大胆猜想,进行验证.

由于学生数学素养不同,接受新事物的能力也不同,所以存在猜想“五花八门”或“瞎猜胡猜”的现象.因此,强调“猜想”要建立在一定基础知识之上,通过观察、分析和实验等合情猜想.对猜想进行验证是让学生寻找方法对自己的猜想进行验证.最后进行总结,可以类比式(1)的获得过程,即把二重积分转化成定积分试试,并带领学生共同推导验证:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_c^d P[\Psi_2(y),y]\mathrm{d}y - \int_c^d P[\Psi_1(y),y]\mathrm{d}y = \int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}y - \int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}y.$$

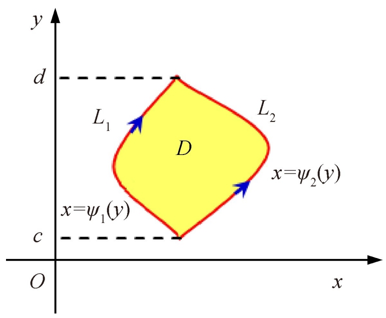

图 2 Y - 型域

由图 2 可知,有向曲线弧 L_1 是顺时针方向,有向曲线弧 L_2 是逆时针方向,为了研究问题的方便性以及统一性(与 D 是 X - 型域的情况统一),这里取逆时针方向为正方向,则 $\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}y = -\int_{L_1^-} P(x,y)\mathrm{d}y$.因此可得等式

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P(x,y)\,\mathrm{d}y\,, \qquad (2)$$

其中 L 是 D 的逆时针方向的边界曲线.

这个等式与大部分学生的猜想是不同的,是通过让学生总结式(2)成立的条件这种方法来解决学生的疑惑的. 接下来需要把式(2)中的函数 $P(x,y)$ 换成 $Q(x,y)$, 并没有直接替换,这是由于教材中第二类平面曲线积分的定义[1]是以 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x$、$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 形式给的,数学符号不要乱用,最好与教材符号保持一致,所以把式(2)中的函数 $P(x,y)$ 换成 $Q(x,y)$, 即得等式

$$\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \qquad (3)$$

显然式(1)和(3)相加就是常用形式的格林公式,但是如果直接让式(2)相加,学生就会产生疑惑:为什么要相加? 相加有什么意义呢? 基于以上考虑,需先回忆第二类平面曲线积分的物理背景,然后了解其常见形式是 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 观察式(1)和(3),会发现 2 式右端相加刚好是 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. 此时,提出问题:2 式能相加吗? 相加的条件是什么? 通过对上述问题的解答,并经过归纳总结就得到了下面的结论:

当区域 D 既是 $X-$ 型域又是 $Y-$ 型域, L 是 D 的逆时针方向的边界线时,等式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \qquad (4)$$

成立.

其实式(4)就是特殊单连通区域上的格林公式. 即由平面上的有界闭区域并不都是这么特殊引出单连通区域和复连通区域的概念. 这样就解决了学生的疑惑——为什么要讲这个概念,学生更容易理解和接受新知识.

(3)单、复连通区域及曲线正向见面.

在单、复连通区域的概念后,提出 2 个问题让学生思考、猜想:一般单连通区域和复连通区域上式(4)是否成立? 如果 L 是 D 的顺时针方向的边界线,式(4)还成立吗? 由此引出曲线正向的概念,这样就避免了一开始就给出该概念的突兀性. 到此,所有准备工作完成,接下来就是证明式(4)在一般单连通区域及复连通区域上也是成立的.

(4)借助已知来研究未知,获取格林公式.

借助已知来研究未知是最常用的数学思想方法. 数学研究问题的方法一般是从特殊到一般、从简单到复杂,引导学生很自然地想到先证明一般单连通区域的情形,启发学生把一般的转化成特殊的,这样很容易地完成此类区域的证明过程. 对于复连通区域的证明,类比一般单连通区域的证明方法,把复连通区域转化成一般单连通区域来证明. 但是部分学生不知道如何转化,是通过实物演示的方法来辅助分析的. 另外,根据教学经验,部分学生会用大区域减去小区域这种错误的方法进行证明,因此用了故意出错的策略.

至此,实质已经完成了格林公式的证明过程了,但是还没有直接给出定理,因为格林公式成立的条件既是重点又是难点,为了使学生深刻领会这些条件,先提出问题:式(4)成立的前提是 2 个积分 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 和 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 都必须存在,那么,这 2 个积分存在的充分条件是什么? 这个充分条件之前学过的,学生很容易回答上来. 然后又提出问题:一阶偏导数连续与函数连续之间是什么关系? 这样学生通过解答这 2 个问题自己就能总结出格林公式成立的条件之一: $P(x,y)$ 或 $Q(x,y)$ 在 L 所围区域 D 内具有一阶连续偏导数. 最后提出 2 个思考问题:非封闭曲线能围成闭区域吗? 当 L 的方向取为反方向时, $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的值有何变化? 通过这种问题——探究的方式,学生就会自己总结出式(4)成立的另外 2 个条件:曲线 L 封闭和 L 取正向. 这样其实就得到了格林公式成立的所有条件. 最后,总结条件和结论,得到了格林定理. 到此,告诉学生式(4)就是赫赫有名的格林公式,这样不但帮助学生理解、识记了公式,而且还让学生体会到了自己获取知识的喜悦感和自豪感.

(5)揭示格林公式的本质,类比推广.

获得格林公式后,让学生从被积函数和积分域 2 个方面思考、总结公式所蕴含规律,从而揭示格林公式的本质. 并让学生把格林公式和牛顿—莱布尼茨公式作比较,从而得到 2 个公式之间的关系,最后再类比这 2 个公式的本质,把这种思想推广到空间,这样既拓展了学生的知识又为后面的教学内容奠定了基础.

(6)应用格林公式,加深理解.

为了加深对格林公式的理解,精选下面的

例题[4]:

$$\int_L (e^x \sin y - my)\,dx + (e^x \cos y - m)\,dy,$$

其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = ax(a > 0)$ 的正向.

通过思考、讨论该题目的求解方法,然后给出 2 种方法对比求解:方法 1 是把该曲线积分直接转化成定积分求解;方法 2 是利用格林公式求解.通过比较,体会格林公式在简化第二类平面曲线积分计算的简单之美.基于上述例题,又提出下面 2 个问题,探索求解方法:如果 L 是从点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周,那么又该如何计算上述曲线积分?如果 L 不变,如何计算 $\int_L \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)dx + 2y\,dy}{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2y^2}$?这种从简单到复杂、由浅入深、层层递进的教学策略符合学生的认知规律,使学生更容易理解和接受新知识.

2　结束语

格林公式的探究式教学还原了知识的创建过程,融入了数学思想方法,有利于提升学生的数学素养.需要注意的是,在探究式教学中,教师是学生探索活动的设计者和探索过程中的引导者,如,在格林公式的教学中,式(1)的获得是探究式教学的关键和基础,运用了从特殊引导学生发现规律的策略.所以,要想充分发挥好探究式教学的优势,教师必须提高自身素质、熟悉教学内容、了解教学对象,这样才能充分发挥好自己的主导作用.

参 考 文 献

[1] 同济大学应用数学系.高等数学(下)[M].7 版.北京:高等教育出版社,2014:195 +205.

[2] 同济大学应用数学系.高等数学(上)[M].7 版.北京:高等教育出版社,2014:240.

[3] 熊惠民.数学思想方法通论[M].北京:科学出版社,2010:25.

[4] 张天德,蒋晓芸.Б П 吉米多维奇高等数学习题精选精解[M].济南:山东科学技术出版社,2010:344.

Inquiry Teaching of Green's Formula Based on "Learning-Centered"

JING Huili　LIU Hua

(Department of Basic Courses, Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi　710025)

Abstract: Green's formula is a very important formula in the calculus, which has important theoretical and practical value. According to teaching practice, the article carried on the inquiry teaching to Green's formula.

Keywords: advanced mathematics; inquiry teaching; Green's formula