



压电复合材料层合矩形板的高维混沌动力学研究[†]

张伟*, 高美娟, 姚明辉, 姚志刚

北京工业大学机电学院, 北京 100124

* E-mail: sandyzhang0@yahoo.com

[†] 廖世俊编委推荐

收稿日期: 2009-05-04; 接受日期: 2009-06-17

国家杰出青年科学基金(批准号: 10425209)、国家自然科学基金重点项目(批准号: 10372020)、国家自然科学基金(批准号: 10872010)和北京市属市管高等学校人才强教计划(编号: PHRIHLB)资助项目

摘要 我们应用规范形理论和能量-相位法研究了在横向载荷、面内载荷、压电激励联合作用下压电复合材料层合矩形板的复杂动力学。首先, 基于压电复合材料层合矩形板的六维平均方程, 利用规范形理论化简得到较为简单的规范形。然后, 应用能量-相位法研究了六维非线性系统的全局分叉和多脉冲混沌动力学。研究结果发现, 在压电复合材料层合矩形板的非线性振动中, 存在同宿分叉和 Shilnikov 型的多脉冲混沌运动现象。最后, 用数值方法研究了压电复合材料层合矩形板的非线性动力学行为, 数值结果同样发现压电复合材料层合矩形板能够产生多脉冲混沌运动现象。

关键词

压电复合材料层合板
规范形
能量-相位法
数值模拟
跳跃轨道
混沌运动

在工程领域中, 压电材料是一种新型功能材料, 可以作为作动器和传感器。随着压电复合材料层合板在工程领域中特别是在航空航天工程领域中的广泛应用, 对压电复合材料层合板的非线性动力学、分叉和混沌动力学性质的研究占据了主要地位。近期, 压电复合材料层合板也被用于可变体结构或可变体机翼^[1-4]。在这种可变体机翼中, 压电复合材料层合板结构有可能产生大振幅的振动, 导致压电复合材料层合板结构的非线性振动, 从而降低结构的稳定性和可控性。因此, 研究压电复合材料结构的非线性振动、分叉和混沌动力学行为具有重要的理论意义和工程应用价值。

迄今为止, 国内外学者对复合材料层合板结构进行了研究, 并且取得了大量研究成果。Pai 和 Nayfeh^[5]考虑了几何非线性, 提出了一种研究弹性复合材料

层合板的非线性动力学理论。Bhimaraddi^[6]研究了有缺陷的反对称角铺设复合材料层合板非线性大幅振动。Shukla 等人^[7]给出了一种近似解析方法, 用来研究复合材料层合板的非线性动力学响应。Ye 等人^[8,9]研究了参数激励作用下四边简支对称和反对称铺设的复合材料层合矩形薄板的非线性动力学。Lee 和 Reddy 等人^[10]研究了在机械和热载荷联合作用下, 复合材料层合板的非线性动力学响应。Zhang 等人^[11]研究了含有参数激励的四边简支矩形薄板的全局分叉和混沌动力学。Zhu 等人^[12]研究了损伤率对复合材料层合薄板瞬态非线性动力学的影响。Abe 等人^[13]研究了 1:1 内共振情况下层合板的非线性动力学响应。Hao 等人^[14]分析了功能梯度材料板的非线性振动、分叉和混沌动力学性质。近期, Zhang 等人^[15]建立了在横向载荷、纵向参数激励, 横向压电参数激励作用下

引用格式: 张伟, 高美娟, 姚明辉, 等. 压电复合材料层合矩形板的高维混沌动力学研究. 中国科学 G 辑, 2009, 39(8): 1105—1115

Zhang W, Gao M J, Yao M H, et al. Higher-dimensional chaotic dynamics of a composite laminated piezoelectric rectangular plate. Sci China Ser G, doi: 10.1007/s11433-009-0225-8

的四边简支的压电复合材料层合板系统的非线性控制方程, 研究了系统的周期和混沌运动现象。

对高维系统的全局分叉和混沌动力学研究是科学和工程领域中非常重要的课题. Melnikov^[16]在研究保守系统的同宿轨线和异宿轨线受扰动发生分裂后, 为了度量分裂后稳定流形与不稳定流形之间的距离, 提出了一种解析摄动方法, 后来被称为Melnikov方法. 在过去的 20 年里, 对高维非线性系统的全局分叉和混沌动力学的研究取得了一定的研究成果. Wiggins^[17]应用Melnikov方法研究了四维系统在 3 种不同扰动情况下的几何结构和混沌动力学性质. Haller和Wiggins^[18]结合高维Melnikov方法、几何奇异摄动理论和不变流形纤维丛理论建立了一种能量-相位准则, 研究在共振情形下一类扰动是完全可积系统的单脉冲同宿轨道. Haller和Wiggins^[19]进一步发展了能量-相位法, 研究了有阻尼受迫非线性 Schrödinger 方程多脉冲同宿轨道的存在性. Haller和Wiggins^[20]研究了三自由度Hamilton系统的多脉冲同宿轨道和异宿轨道. Haller^[21]结合Li和McLaughlin的研究结果探索了受扰动Schrödinger方程多脉冲同宿轨道的存在性. Haller^[22]研究了有阻尼概周期激励的两个耦合非线性Schrödinger方程, 证明了不变圆环面存在Shilnikov同宿轨道. Haller^[23]总结了上述研究成果, 撰写了关于能量-相位法的专著, 系统地证明和论述了用于研究高维非线性系统多脉冲轨道的能量-相位法。

随后, 能量-相位法被广泛地应用到工程领域来分析一些实际问题的同宿分叉、异宿分叉和多脉冲混沌动力学. Malhotra等人^[24]用能量-相位法研究了参数激励的柔性旋转非对称盘的全局动力学. Yao和Zhang^[25,26]改进了能量-相位法, 并利用耗散系统的能量-相位法分别研究了非平面运动悬臂梁非线性振动的异宿多脉冲轨道和混沌动力学、参数激励作用下粘弹性传动带的同宿多脉冲轨道和混沌动力学. Yao和Zhang^[27]应用能量-相位法研究了参数激励与外激励共同作用下薄板的异宿多脉冲分叉. 最近, Zhang和Yao^[28]总结并比较了能量-相位法与广义Melnikov方法, 并用这两种方法分别分析了非平面运动悬臂梁非线性振动的同宿分叉和多脉冲混沌动力学。

高维非线性系统复杂动力学理论的研究是一项

具有挑战性的工作, 至今仍然处于国际学术研究的前沿. 迄今为止, 对压电复合材料层合矩形板的全局分叉和混沌动力学的研究还是很少有学者涉猎的. 在本文中, 我们首次研究了在横向载荷、面内载荷和压电激励联合作用下压电复合材料层合矩形板结构的 Shilnikov 型多脉冲混沌动力学. 应用规范形理论化简得到较为简单的规范形. 在此基础上, 应用能量-相位法研究了六维压电复合材料层合矩形板的全局分叉和 Shilnikov 型多脉冲混沌动力学性质. 理论分析表明在压电复合材料层合矩形板有非线性振动中, 存在同宿分叉和 Shilnikov 型多脉冲混沌动力学. 同时, 利用数值模拟方法研究了压电复合材料层合矩形板的非线性动力学特性, 数值结果表明在压电复合材料层合矩形板中存在着多脉冲跳跃轨道和混沌运动。

1 动力学方程和规范形理论

考虑如图 1 所示的四边简支压电复合材料层合板^[15,29]. 板的长、宽和高分别是 a , b 和 h . 压电复合材料层合板是由纤维增强复合材料和压电材料间隔正交对称铺设 n 层而成的. 直角坐标系 $Oxyz$ 位于压电复合材料层合板的对称平面内. 设 u_1 , u_2 和 u_3 分别表示板上任意一点在 x , y 和 z 轴方向上的位移, u_0 , v_0 和 w_0 分别表示板中面上任意一点在 x , y 和 z 轴方向上的位移. 压电复合材料层合板在 $x=0$ 处沿 y 轴方向, $y=0$ 处沿 x 轴方向受面内激励 $q_0+q_x\cos\Omega_1t$ 和 $q_1+q_y\cos\Omega_2t$ 作用, 在 z 轴方向受横向简谐激励 $q\cos\Omega_3t$ 作用, 压电激励的形式考虑为简谐激励 $E_3=E_z\cos(\Omega_4t)$.

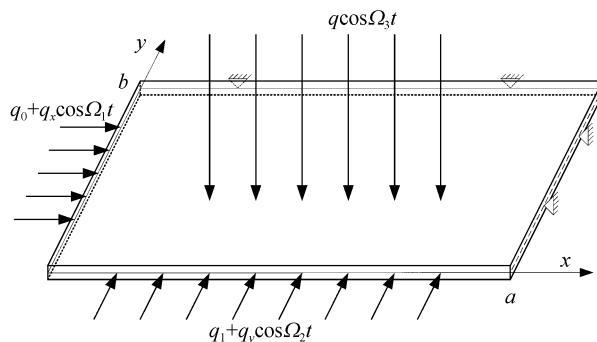


图1 压电复合材料层合板模型

根据Reddy的高阶剪切变形理论,应用Hamilton原理和Galerkin离散,我们得到压电复合材料层合矩形板无量纲形式的非线性动力学方程为^[30]

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + \varepsilon \mu_1 \dot{w}_1 + \omega_1^2 w_1 + \varepsilon (a_2 \cos \Omega_1 t + a_3 \cos \Omega_2 t \\ + a_4 \cos \Omega_4 t) w_1 + \varepsilon a_5 w_1^2 w_2 + \varepsilon a_6 w_1^2 w_3 + \varepsilon a_7 w_2^2 w_1 \\ + \varepsilon a_8 w_2^2 w_3 + \varepsilon a_9 w_3^2 w_1 + \varepsilon a_{10} w_3^2 w_2 + \varepsilon a_{11} w_3^3 \\ + \varepsilon a_{12} w_2^3 + \varepsilon a_{13} w_1^3 + \varepsilon a_{14} w_1 w_2 w_3 = \varepsilon f_1 \cos \Omega_3 t, \quad (1a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_2 + \varepsilon \mu_2 \dot{w}_2 + \omega_2^2 w_2 + \varepsilon (b_2 \cos \Omega_1 t + b_3 \cos \Omega_2 t \\ + b_4 \cos \Omega_4 t) w_2 + \varepsilon b_5 w_1^2 w_2 + \varepsilon b_6 w_1^2 w_3 + \varepsilon b_7 w_2^2 w_1 \\ + \varepsilon b_8 w_2^2 w_3 + \varepsilon b_9 w_3^2 w_1 + \varepsilon b_{10} w_3^2 w_2 + \varepsilon b_{11} w_3^3 \\ + \varepsilon b_{12} w_2^3 + \varepsilon b_{13} w_1^3 + \varepsilon b_{14} w_1 w_2 w_3 = \varepsilon f_2 \cos \Omega_3 t, \quad (1b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_3 + \varepsilon \mu_3 \dot{w}_3 + \omega_3^2 w_3 + \varepsilon (d_2 \cos \Omega_1 t + d_3 \cos \Omega_2 t \\ + d_4 \cos \Omega_4 t) w_3 + \varepsilon d_5 w_1^2 w_2 + \varepsilon d_6 w_1^2 w_3 + \varepsilon d_7 w_2^2 w_1 \\ + \varepsilon d_8 w_2^2 w_3 + \varepsilon d_9 w_3^2 w_1 + \varepsilon d_{10} w_3^2 w_2 + \varepsilon d_{11} w_3^3 \\ + \varepsilon d_{12} w_2^3 + \varepsilon d_{13} w_1^3 + \varepsilon d_{14} w_1 w_2 w_3 = \varepsilon f_3 \cos \Omega_3 t. \quad (1c) \end{aligned}$$

应用多尺度方法,我们得到压电复合材料层合矩形板在 1:2:4 内共振情形下的六维平均方程为^[30]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2} a_1 x_1 - \frac{1}{2} \sigma_1 x_2 - \frac{1}{4} (a_2 + a_3 + a_4) x_2 \\ + a_7 x_2 (x_3^2 + x_4^2) + a_9 x_2 (x_5^2 + x_6^2) + \frac{3}{2} a_{13} x_2 (x_1^2 + x_2^2) \\ + \frac{1}{2} a_{14} (-x_1 x_3 x_4 + x_2 x_4 x_6 + x_1 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_5), \quad (2a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = -\frac{1}{2} a_1 x_2 + \frac{1}{2} \sigma_1 x_1 - \frac{1}{4} (a_2 + a_3 + a_4) x_1 \\ - a_7 x_1 (x_3^2 + x_4^2) - a_9 x_1 (x_5^2 + x_6^2) - \frac{3}{2} a_{13} x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ - \frac{1}{2} a_{14} (x_2 x_3 x_6 - x_2 x_4 x_5 + x_1 x_3 x_5 + x_1 x_4 x_6), \quad (2b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = -\frac{1}{2} b_1 x_3 - \frac{1}{4} \sigma_2 x_4 + \frac{1}{2} b_5 x_4 (x_1^2 + x_2^2) \\ + \frac{1}{4} b_6 (x_1^2 x_6 - 2 x_1 x_2 x_5 - x_2^2 x_6) \\ + \frac{1}{2} b_{10} x_4 (x_5^2 + x_6^2) + \frac{3}{4} b_{12} x_4 (x_3^2 + x_4^2), \quad (2c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = -\frac{1}{2} b_1 x_4 + \frac{1}{4} \sigma_2 x_3 - \frac{1}{2} b_5 x_3 (x_1^2 + x_2^2) \\ + \frac{1}{4} b_6 (x_2^2 x_5 - 2 x_1 x_2 x_6 - x_1^2 x_5) \\ - \frac{1}{2} b_{10} x_3 (x_5^2 + x_6^2) - \frac{3}{4} b_{12} x_3 (x_3^2 + x_4^2), \quad (2d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 = -\frac{1}{2} d_1 x_5 - \frac{1}{8} \sigma_3 x_6 + \frac{1}{8} d_5 (x_4 x_1^2 - x_4 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3) \\ + \frac{1}{4} d_6 x_6 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{4} d_8 x_6 (x_3^2 + x_4^2) \\ + \frac{3}{8} d_{11} x_6 (x_5^2 + x_6^2), \quad (2e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6 = -\frac{1}{2} d_1 x_6 + \frac{1}{8} \sigma_3 x_5 + \frac{1}{8} d_5 (x_3 x_1^2 - x_3 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_4) \\ - \frac{1}{4} d_6 x_5 (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{4} d_8 x_5 (x_3^2 + x_4^2) \\ - \frac{3}{8} d_{11} x_5 (x_5^2 + x_6^2) + f, \quad (2f) \end{aligned}$$

这里 $f = f_3$.

注意到平均方程(2)具有复杂的非线性项,还不能直接利用能量-相位法研究其复杂的非线性动力学特性.因此,我们考虑利用规范形理论去化简平均方程(2),使得化简后的非线性系统与原系统拓扑等价.

显而易见,平均方程(2)具有一个平凡解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. 平凡解所对应的特征方程为

$$\begin{aligned} \left(\lambda^2 + a_1 \lambda + \frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{4} \sigma_1^2 - f_0^2 \right) \left(\lambda^2 + b_1 \lambda + \frac{1}{4} b_1^2 + \frac{1}{16} \sigma_2^2 \right) \\ \times \left(\lambda^2 + d_1 \lambda + \frac{1}{4} d_1^2 + \frac{1}{64} \sigma_3^2 \right) = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{4} \sigma_1^2 - f_0^2, \\ \Delta_2 &= \frac{1}{4} b_1^2 + \frac{1}{16} \sigma_2^2, \\ \Delta_3 &= \frac{1}{4} d_1^2 + \frac{1}{64} \sigma_3^2 \end{aligned} \quad (4)$$

当下列条件

$$\mu = 0, \quad \Delta_1 = 0 \quad (5)$$

被满足时,方程(2)同时存在一对双零特征值和两对纯虚特征值

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm \frac{1}{4} \sigma_2 i, \quad \lambda_{5,6} = \pm \frac{1}{8} \sigma_3 i. \quad (6)$$

令 $\sigma_1 = 2(\bar{\sigma}_1 + f_0)$, $f_0 = -1/2$, 把 $\bar{\sigma}_1$, μ 和 f 作为开折参数. 利用Maple程序^[31,32]对平均方程(2)进行计算,得到具有参数的规范形为

$$\dot{y}_1 = -\mu y_1 + (1 - \bar{\sigma}_1) y_2, \quad (7a)$$

$$\dot{y}_2 = \bar{\sigma}_1 y_1 - \mu y_2 - \frac{3}{2} a_{13} y_1^3 - a_7 y_1 (y_3^2 + y_4^2)$$

$$-a_9 y_1 (y_5^2 + y_6^2), \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 = & -\mu y_3 - \frac{1}{4} \sigma_2 y_4 + \frac{3}{4} b_{12} y_4 (y_3^2 + y_4^2) \\ & + \frac{1}{2} b_{10} y_4 (y_5^2 + y_6^2) + \frac{1}{2} b_5 y_1^2 y_4, \end{aligned} \quad (7c)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_4 = & \frac{1}{4} \sigma_2 y_3 - \mu y_4 - \frac{3}{4} b_{12} y_3 (y_3^2 + y_4^2) \\ & - \frac{1}{2} b_{10} y_3 (y_5^2 + y_6^2) - \frac{1}{2} b_5 y_1^2 y_3, \end{aligned} \quad (7d)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_5 = & -\mu y_5 - \frac{1}{8} \sigma_3 y_6 + \frac{3}{8} d_{11} y_6 (y_5^2 + y_6^2) \\ & + \frac{1}{4} d_8 y_6 (y_3^2 + y_4^2) + \frac{1}{4} d_6 y_1^2 y_6, \end{aligned} \quad (7e)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_6 = & \frac{1}{8} \sigma_3 y_5 - \mu y_6 - \frac{3}{8} d_{11} y_5 (y_5^2 + y_6^2) \\ & - \frac{1}{4} d_8 y_6 (y_3^2 + y_4^2) - \frac{1}{4} d_6 y_1^2 y_5 + f. \end{aligned} \quad (7f)$$

为了便于利用能量-相位法分析系统的非线性动力学性质, 在下面的分析中, 我们将系统(7)的后面 4 个方程的坐标从直角坐标形式转换为极坐标形式, 令

$$\begin{aligned} y_3 &= I_1 \cos \theta_1, \quad y_4 = I_1 \sin \theta_1, \\ y_5 &= I_2 \cos \theta_2, \quad y_6 = I_2 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (8)$$

同时, 在阻尼和激励项中引入小扰动参数:

$$\mu \rightarrow \varepsilon \mu, \quad \mu_2 \rightarrow \varepsilon \mu_2, \quad f \rightarrow \varepsilon f. \quad (9)$$

因此, 系统(7)可以写成具有扰动项的规范形, 其形式如下:

$$\dot{u}_1 = \frac{\partial H}{\partial u_2} + \varepsilon g^{u_1} = \alpha u_2, \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 = & -\frac{\partial H}{\partial u_1} + \varepsilon g^{u_2} \\ = & -\mu_1 u_1 + \eta_1 u_1^3 - \alpha_1 u_1 I_1^2 - \alpha_2 u_1 I_2^2 - \varepsilon \mu_2 u_2, \end{aligned} \quad (10b)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\partial H}{\partial \theta_1} + \varepsilon g^{I_1} = -\varepsilon \mu I_1, \quad (10c)$$

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\theta}_1 = & -\frac{\partial H}{\partial I_1} + \varepsilon g^{\theta_1} \\ = & \frac{1}{4} \sigma_2 I_1 - \eta_2 I_1^3 - \alpha_3 I_1 I_2^2 - \alpha_1 u_1^2 I_1, \end{aligned} \quad (10d)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\partial H}{\partial \theta_2} + \varepsilon g^{I_2} + \varepsilon f \sin \theta_2 = -\varepsilon \mu I_2 + \varepsilon f \sin \theta_2, \quad (10e)$$

$$\begin{aligned} I_2 \dot{\theta}_2 = & -\frac{\partial H}{\partial I_2} + \varepsilon g^{\theta_2} + \varepsilon f \cos \theta_2 \\ = & \frac{1}{8} \sigma_3 I_2 - \eta_3 I_2^3 - \alpha_3 I_2 I_1^2 - \alpha_2 u_1^2 I_2 + \varepsilon f \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (10f)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 方程(10)的未扰动系统是完全可以积的 Hamilton 系统, 其 Hamilton 函数为

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \alpha u_2^2 + \frac{1}{2} \mu_1 u_1^2 - \frac{1}{4} \eta_1 u_1^4 \\ & + \frac{1}{2} (\alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_2^2) u_1^2 - \frac{1}{8} \sigma_2 I_1^2 + \frac{1}{4} \eta_2 I_1^4 \\ & + \frac{1}{2} \alpha_3 I_1^2 I_2^2 - \frac{1}{16} \sigma_3 I_2^2 + \frac{1}{4} \eta_3 I_2^4, \end{aligned} \quad (11)$$

方程(10)的扰动项分别为

$$\begin{aligned} g^{u_1} &= 0, \quad g^{u_2} = -\mu_2 u_2, \quad g^{I_1} = -\mu I_1, \quad g^{\theta_1} = 0, \\ g^{I_2} &= -\mu I_2 + f \sin \theta_2, \quad g^{\theta_2} = f \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (12)$$

2 能量-相位法

在本节中, 我们主要扩展能量-相位法, 并利用扩展后的能量-相位法分析压电复合材料层合矩形板的 Shilnikov 型多脉冲混沌动力学。

2.1 未扰动系统的动力学

在方程(10)中, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 由于在后面 4 维方程中有 $\dot{I}_1 = 0$ 和 $\dot{I}_2 = 0$, 所以在前面 2 维系统中变量 I_1 和 I_2 可以作为参数来考虑. 在此情况下, 系统(10)的前面 2 个方程与后面 4 个方程可以解耦, 因此, 前面 2 个方程可以写成如下形式:

$$\dot{u}_1 = \alpha u_2, \quad (13a)$$

$$\dot{u}_2 = -\mu_1 u_1 + \eta_1 u_1^3 - \alpha_1 u_1 I_1^2 - \alpha_2 u_1 I_2^2 - \varepsilon \mu_2 u_2, \quad (13b)$$

其中 Hamilton 函数为

$$H_1(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \alpha u_2^2 + \frac{1}{2} (\mu_1 + \alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_2^2) u_1^2 - \frac{1}{4} \eta_1 u_1^4. \quad (14)$$

当满足条件 $\mu_1 + \alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_2^2 < 0$, $\eta_1 < 0$ 和 $\alpha > 0$ 时, 方程(13)可以产生同宿分叉。

在由 $\mu_1 + (\alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_2^2) = 0$ 所定义的分叉曲线上, 零解 $(u_1, u_2) = (0, 0)$ 经过 pitchfork 分叉可以分为 3 个解, 即 $q_0 = (0, 0)$ 和 $q_{\pm}(I_1, I_2) = (\pm B, 0)$, 这里 $B = \sqrt{[\mu_1 - (\alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_2^2)] / \eta_1}$. 经过分析计算, 我们可知不动点 q_0 是鞍点。

系统(13)的一对同宿轨道方程的表达式为

$$u_1 = \pm \sqrt{\frac{2\varepsilon_1}{\delta_1}} \operatorname{sech}(\sqrt{\alpha\varepsilon_1}t), \quad (15a)$$

$$u_2 = \mp \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\sqrt{\alpha\delta_1}} \operatorname{th}(\sqrt{\alpha\varepsilon_1}t) \operatorname{sech}(\sqrt{\alpha\varepsilon_1}t). \quad (15b)$$

在六维空间 $(u_1, u_2, I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$ 中, 流形 M 定义为

$$M = \left\{ (u, I, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^2 \mid u = q_0, I \in \mathbf{U}, \right. \\ \left. 0 < \theta_1 \leq 2\pi, 0 < \theta_2 \leq 2\pi \right\}, \quad (16)$$

它是一个四维的正规双曲不变流形, 如图 2 所示, 这里 $I = (I_1, I_2)^T$ 和 $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T$. 流形 M 具有五维稳定流形 $W^s(M)$ 和不稳定流形 $W^u(M)$, $W^s(M)$ 和 $W^u(M)$ 重合形成五维同宿流形 Γ , 可以表示为

$$\Gamma = \left\{ (u, I, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^2 \mid u = (u_1, u_2), \right. \\ \left. I \in \mathbf{U}, 0 < \theta_1 \leq 2\pi, 0 < \theta_2 \leq 2\pi \right\}, \quad (17)$$

在流形 M 上考虑方程(10)的后 4 维未扰动系统的动力学性质:

$$\dot{I}_1 = 0, \quad (18a)$$

$$I_1 \dot{\theta}_1 = -\frac{\partial H}{\partial I_1} = D_{I_1} H(q_0, I) \\ = \frac{1}{4} \sigma_2 I_1 - \eta_2 I_1^3 - \alpha_3 I_1 I_2^2 - \alpha_1 u_1^2 I_1, \quad (18b)$$

$$\dot{I}_2 = 0, \quad (18c)$$

$$I_2 \dot{\theta}_2 = -\frac{\partial H}{\partial I_2} = D_{I_2} H(q_0, I)$$

$$= \frac{1}{8} \sigma_3 I_2 - \eta_3 I_2^3 - \alpha_3 I_2 I_1^2 - \alpha_2 u_1^2 I_2. \quad (18d)$$

如果我们能够找到非零向量 $n = (n_1, n_2)$, 使得条件 $\langle D_{I_i} H(q_0, I), n \rangle = 0$ 成立, 则此情况被称之为共振情形^[20]. 根据Haller和Wiggins所获得的结果^[19], 如果条件 $D_{I_1} H(q_0, I) \neq 0$ 和 $D_{I_2} H(q_0, I) \neq 0$ 同时成立, 其中 $I = (I_1, I_2)^T$, 则 $I = \text{constant}$ 是具有两个参数的两维圆环. 如果 $D_{I_1} H(q_0, I) = 0$ 和 $D_{I_1} H(q_0, I) = 0$ 同时成立, 则 $I = \text{constant}$ 是不动点圆环. 我们令使 $D_{I_i} H(q_0, I) = 0$ 成立的共振 $I = (I_1, I_2)^T \in \mathbf{U}$ 值为 $I_r = (I_{1r}, I_{2r})$.

我们考虑下列情况

$$D_{I_1} H(q_0, I_r) = \frac{1}{4} \sigma_2 - \eta_2 I_{1r}^2 - \alpha_3 I_{2r}^2 - \alpha_1 u_1^2 = 0, \quad (19a)$$

$$D_{I_2} H(q_0, I_r) = \frac{1}{8} \sigma_3 - \eta_3 I_{2r}^2 - \alpha_3 I_{1r}^2 - \alpha_2 u_1^2 = 0. \quad (19b)$$

根据方程(19), 我们得到共振值为

$$I_{1r} = \sqrt{\frac{\sigma_3 \alpha_2 - 2\sigma_2 \eta_3}{8\alpha_3^2 - 8\eta_2 \eta_3}}, \quad I_{2r} = \sqrt{\frac{2\sigma_3 \alpha_3 - \sigma_3 \eta_2}{\alpha_3^2 - 8\eta_2 \eta_3}}. \quad (20)$$

在共振情形下, 即 $D_{I_i} H(q_0, I_r) = 0$, 我们得到系统的两个相位漂移角分别为

$$\Delta \theta_1(I_r) = \theta_1(+\infty, I_r, \theta_{10}) - \theta_2(-\infty, I_r, \theta_{10}) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} [D_{I_1} H(u, I_r) - D_{I_1} H(q_0, I_r)] dt \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} -\alpha_1 u_1^2 dt = -\frac{4\alpha_1 \sqrt{\alpha\varepsilon_1}}{\alpha\delta_1}, \quad (21a)$$

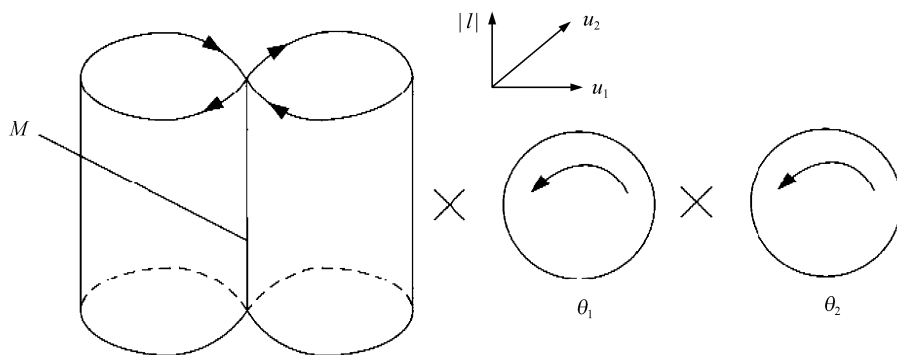


图 2 六维空间流形 M 的几何结构

$$\begin{aligned}\Delta\theta_2(I_r) &= \theta_2(+\infty, I_r, \theta_{20}) - \theta_2(-\infty, I_r, \theta_{20}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [D_{I_2}H(u, I_r) - D_{I_2}H(q_0, I_r)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\alpha_2 u_1^2 dt = -\frac{4\alpha_2\sqrt{\alpha\varepsilon_1}}{\alpha\delta_1}.\end{aligned}\quad (21b)$$

2.2 扰动系统动力学

下面我们考虑在整个六维空间上系统的非线性动力学性质. 分析扰动系统的动力学和小扰动对于流形 M 的影响. 我们知道在充分小的扰动下, 流形 M 的稳定流形和不稳定流形是不变的. 在小扰动下, 不动点 q_0 仍然是鞍点, 此时 M_ε 充分接近 M , 因此, M_ε 可以写成

$$\begin{aligned}M_\varepsilon &= \{(u, I, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1 \mid u = q_{0\varepsilon}, \\ &I \in \mathbf{U}, 0 < \theta_1 \leq 2\pi, 0 < \theta_2 \leq 2\pi\}.\end{aligned}\quad (22)$$

限制在流形 M_ε 上, 我们在共振值 I_{1r} 和 I_{2r} 附近研究系统(10)的复杂动力学. 在四维空间 $(u_1, u_2, I_2, \theta_2)$ 中, 我们知道

$$\begin{aligned}M_1 &= \{(u, I_2, \theta_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \times \mathbf{S}^1 \mid u = q_0, \\ &I_2 \in [I_{21}, I_{22}], 0 < \theta_2 \leq 2\pi\}\end{aligned}\quad (23)$$

是一个二维的法向双曲不变流形. 在六维相空间 $(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2)$ 中, 令 I_1 在区间 $\mathbf{U}_1 = [I_{1r} - \varepsilon, I_{1r} + \varepsilon] \subset [I_{11}, I_{12}]$ 中改变, 并且 $\theta_1 \in (0, 2\pi]$, 我们可以得到四维法向双曲不变流形如下:

$$M \equiv \mathbf{U}_1 \times \mathbf{S}^1 \times M_1, \quad (24)$$

其中 $I_1 \in \mathbf{U}_1$, $\theta_1 \in (0, 2\pi]$.

此外, 我们可以在六维空间 $(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2)$ 中, 固定 $I_1 = I_{1r} \in \mathbf{U}_1$, 并令 $\theta_1 \in (0, 2\pi]$, 我们可以定义一个横截面, 并且在共振值 I_{2r} 附近和四维空间 $(u_1, u_2, I_2, \theta_2)$ 中考虑系统的动力学性质. 然后让 I_1 取遍区间 $\mathbf{U}_1 = [I_{1r} - \varepsilon, I_{1r} + \varepsilon] \subset [I_{11}, I_{12}]$ 中的每一个值, 这样我们就可以得到系统在整个六维空间 $(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2)$ 中的动力学性质.

我们引入如下尺度变换:

$$I_2 = I_{2r} + \sqrt{\varepsilon}\eta, \quad \tau = \sqrt{\varepsilon}t. \quad (25)$$

将方程(25)代入方程(10c)和(10d), 得到

$$\eta' = -\mu I_{2r} + f \sin \theta_2 - \sqrt{\varepsilon}\mu\eta, \quad (26a)$$

$$\theta_2' = -2I_{2r}\eta_3\eta - \sqrt{\varepsilon}\left[\eta_3\eta^2 - \frac{f \cos \theta_2}{I_{2r}}\right], \quad (26b)$$

这里“'”表示对时间尺度 τ 求导.

方程(26)的未扰动部分是 Hamilton 系统, 其 Hamilton 函数为

$$h(\eta, \theta_2) = -\mu I_{2r}\theta_2 - f \cos \theta_2 + I_{2r}\eta_3\eta^2. \quad (27)$$

我们得到方程(26)未扰动部分的奇点如下:

$$p_0(\eta_c, \theta_{2c}) = \left(0, \arcsin \frac{\mu I_{2r}}{f}\right), \quad (28a)$$

$$p_1(\eta_s, \theta_{2s}) = \left(0, \pi - \arcsin \frac{\mu I_{2r}}{f}\right). \quad (28b)$$

当满足条件 $2I_{2r}\eta_3 f \cos \theta_2 \neq 0$ 时, 奇点 p_1 是鞍点, 而奇点 p_0 是中心点.

对于充分小的扰动 ε ($\varepsilon > 0$), 如果满足下列条件:

$$\mu I_{2r} + f \sin \theta_2 > 0, \quad (29)$$

则中心点 p_0 变为稳定焦点.

2.3 能量差分函数

为了揭示在压电复合材料层合矩形板非线性振动中多脉冲同宿轨道的存在性, 我们应用能量-相位法^[18-23]研究系统在受到扰动后, n 脉冲轨道的起跳点和着陆点之间的能量差来判断系统是否存在 Shilnikov 型多脉冲轨道.

我们得到能量差分函数^[23]如下:

$$\begin{aligned}\Delta^n h(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) &= h(\theta_1 + n\Delta\theta_1) - h(\theta_1) - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \langle DH, g \rangle \Big|_{u^i(t)} dt \\ &= h(\theta_1 + n\Delta\theta_1) - h(\theta_1) \\ &\quad - n \int_A \left[\frac{d}{du_1} g^{u_1}(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{du_2} g^{u_2}(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) \right] du_1 du_2 \\ &\quad - n \int_{\partial A} g^I d\theta,\end{aligned}\quad (30)$$

这里

$$\begin{aligned}h(\theta_2 + n\Delta\theta_2) - h(\theta_2) &= -\mu I_{2r}\Delta\theta_2 - f [\cos(\theta_2 + n\Delta\theta_2) - \cos \theta_2],\end{aligned}\quad (31)$$

A 表示在子空间 (u_1, u_2) 中由一对同宿轨道所围成的区域, ∂A 是区域 A 的边界, $\Delta\theta_2$ 是系统的相位漂移角.

能量差分函数包含系统(10)的未扰动部分的相位信息和扰动部分的能量信息, 并且给出了 n 脉冲轨道的起跳点和着陆点之间的首阶能量差.

方程(30)的第三项表示在未扰动空间 (u_1, u_2) 的同宿轨道所围成的区域中进行积分, 我们获得

$$\begin{aligned} & \int_A \left[\frac{d}{du_1} g^{u_1}(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{d}{du_2} g^{u_2}(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) \right] du_1 du_2 \\ & = \int_A (-\mu_2) du_1 du_2. \end{aligned} \quad (32)$$

将方程(15)代入方程(32), 得到

$$\begin{aligned} & -\mu_2 \int_A du_1 du_2 \\ & = -4\mu_2 \int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\delta_1}}} \left[\mp \frac{\sqrt{2}\varepsilon_1}{\sqrt{\alpha\delta_1}} \operatorname{th}(\sqrt{\alpha\varepsilon_1}t) \operatorname{sech}(\sqrt{\alpha\varepsilon_1}t) \right] du_1 \\ & = -\frac{8\mu_2\varepsilon_1^2}{\sqrt{\alpha\delta_1}} \int_0^{+\infty} \operatorname{th}^2(\sqrt{\alpha\varepsilon_1}t) \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha\varepsilon_1}t) d(\sqrt{\alpha\varepsilon_1}t) \\ & = -\frac{2\mu_2\varepsilon_1}{3\alpha_2} \Delta\theta_2. \end{aligned} \quad (33)$$

我们可以将方程(30)的第四项改写成如下形式:

$$-n \int_{\partial A} g^I d\theta = -ng^I \Delta\theta = n\mu I_{1r} \Delta\theta_1 + n\mu I_{2r} \Delta\theta_2. \quad (34)$$

将方程(31), (33)和(34)代入方程(30), 我们可以得到能量差分函数的表达式:

$$\begin{aligned} & \Delta^n h(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) \\ & = 2f \sin\left(\theta_2 + \frac{n}{2} \Delta\theta_2\right) \sin\left(\frac{n}{2} \Delta\theta_2\right) \\ & \quad - \frac{4n\mu\varepsilon_1}{3\alpha_2} \Delta\theta_2 - \frac{4n\mu\alpha_1 I_{1r} \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\alpha}\delta_1} \\ & = 2f \sin\left(\theta_2 + \frac{n}{2} \Delta\theta_2\right) \sin\left(\frac{n}{2} \Delta\theta_2\right) \\ & \quad - \left(\frac{4nf\varepsilon_1}{3\alpha_2} \Delta\theta_2 + \frac{4nf\alpha_1 I_{1r} \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\alpha}\delta_1} \right) d, \end{aligned} \quad (35)$$

这里我们定义耗散因子为 $d = \mu/f$, 它给出了阻尼与激励振幅之间的关系.

为了判断在压电复合材料层合矩形板非线性振动中是否存在多脉冲轨道, 首先, 我们需要寻找能量差分函数 $\Delta^n h$ 的零点. 因此, 求解方程 $\Delta^n h = 0$, 得到如下等式:

$$\begin{aligned} & \sin\left(\theta_2 + \frac{n}{2} \Delta\theta_2\right) \\ & = \frac{12n\mu\alpha_1\alpha_2 I_{1r} \sqrt{\varepsilon_1} + 4n\mu\varepsilon_1\delta_1 \sqrt{\alpha}\Delta\theta_2}{6\alpha_2\delta_1 f \sqrt{\alpha} \sin\left(\frac{n}{2} \Delta\theta_2\right)}. \end{aligned} \quad (36)$$

根据方程(36), 我们可以得到耗散因子的上确界为

$$|d| < d_{\max} = \left| \frac{6\alpha_2\delta_1 \sqrt{\alpha} \sin\left(\frac{n}{2} \Delta\theta_2\right)}{n 12\alpha_1\alpha_2 I_{1r} \sqrt{\varepsilon_1} + 4\varepsilon_1\delta_1 \sqrt{\alpha}\Delta\theta_2} \right|. \quad (37)$$

因为耗散因子 d 中的阻尼很小, 所以 $d < 1$. 因此, 我们得到最大脉冲数的上确界为

$$n < n_{\max} = \left| \frac{1}{d} \frac{6\alpha_2\delta_1 \sqrt{\alpha}}{12\alpha_1\alpha_2 I_{1r} \sqrt{\varepsilon_1} + 4\varepsilon_1\delta_1 \sqrt{\alpha}\Delta\theta_2} \right|. \quad (38)$$

显而易见, 最大脉冲数的上确界 $n_{\max}$ 与耗散因子 d 成反比关系.

在下面分析中, 我们确定能量差分函数的横截零点. 定义一个包含所有横截零点的集合:

$$\begin{aligned} & Z_-^n = \left\{ (\eta, \theta_2) \mid \Delta^n h(\theta_2) = 0, D_{\theta_2} \Delta^n h(\theta_2) \neq 0 \right\} \\ & \theta_2 = \left\{ \theta_{2,1}^n, \theta_{2,2}^n \right\} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

耗散能量差分函数 $\Delta^n h(\theta_2)$ 的横截零点由下面方程给出:

$$\theta_2 + \frac{n}{2} \Delta\theta_2 = 2m\pi + (-1)^m \alpha, \quad (40)$$

这里 $m \in \mathbb{Z}$, 并且

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{12n\mu\alpha_1\alpha_2 I_{1r} \sqrt{\varepsilon_1} + 4n\mu\varepsilon_1\delta_1 \sqrt{\alpha}\Delta\theta_2}{6\alpha_2\delta_1 f \sqrt{\alpha} \sin\left(\frac{n}{2} \Delta\theta_2\right)} \right). \quad (41)$$

对任意满足条件 $n\Delta\theta_2 \neq 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 的整数 n , 在区间 $\theta_2 = \left\{ \theta_{2,1}^n, \theta_{2,2}^n \right\} \in [-\pi/2, \pi/2]$ 上, 能量差分函数有两个零点:

$$\theta_{2,1}^n = \left[-\frac{n}{2} \Delta \theta_2 + \alpha \right] \bmod 2\pi, \quad (42a)$$

$$\theta_{2,2}^n = \left[-\pi - \frac{n}{2} \Delta \theta_2 - \alpha \right] \bmod 2\pi. \quad (42b)$$

为了把 (η, θ_2) 空间中的内轨道进行分类, 我们利用每一条轨道都只有唯一的一个能量函数与其相对应的特性. 因此, 与同宿轨道相对应的能量函数用 $\bar{h}_0$ 表示, 与焦点相对应的能量函数用 $\bar{h}_\infty$ 来表示, 与同宿轨道连接区域内的任意一条周期轨道相对应的能量函数用 $\bar{h}_n$ 表示. 根据方程(27), 我们得到能量函数序列:

$$\begin{aligned} \bar{h}_0 &= h(\eta_s, \theta_{2s}) \\ &= f \left[-d_1 I_{2r} (\pi - \arcsin(I_{2r} d)) - \sqrt{1 - d_1^2 I_{2r}^2} \right], \end{aligned} \quad (43a)$$

$$\bar{h}_n = \min [h(\eta_s, \theta_{2s}), h(\eta_c, \theta_{2c})], \quad (43b)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_\infty &= h(\eta_c, \theta_{2c}) \\ &= f \left[-d_1 I_{2r} (\arcsin(I_{2r} d)) + \sqrt{1 - d_1^2 I_{2r}^2} \right]. \end{aligned} \quad (43c)$$

从方程(43), 我们可以发现在能量函数序列中存在 $\bar{h}_0 < \bar{h}_n < \bar{h}_\infty$ 的关系, 也就是说, 沿着轨道趋近于焦点的方向, 能量是逐渐增加的.

2.4 Shilnikov 型同宿轨道

在文献[18~23]中, Haller和Wiggins研究了在慢变流形 M_ε 上同宿于内轨线的多脉冲轨道的存在性问题. 在耗散扰动情形下, 在慢变流形 M_ε 上并不存在这样的内周期轨道, 并且中心奇点变成双曲焦点或鞍-焦点. 在下面的分析中, 我们研究在整个六维相空间中Shilnikov型多脉冲轨道的存在性问题. 当存在扰动时, Shilnikov型多脉冲轨道渐近趋近于鞍-焦点, 会导致系统出现Smale马蹄意义下的混沌运动. 为了确定Shilnikov型多脉冲轨道的存在性, 我们把Haller^[23]的研究结果应用到下面的分析中.

首先, 我们需要证明在 (η, θ_2) 相空间中 Hamilton 函数 $h(\eta, \theta_2)$ 有一个非退化零点. 我们知道系统有一个中心点 $p_0 = (0, \arcsin(\mu I_{2r} / f))$, 由于耗散因子定义为 $d = \mu / f$, 所以中心点又可以改写成为 $p_0(d) = (0, \arcsin(d I_{2r}))$. 因此, 中心点是系统的一

个非退化零点.

其次, 在六维相空间 $(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2)$ 中, 我们需要计算能量差分函数在中心点 $p_0(0, 0, I_{1r}, \theta_1, \eta_c, \theta_{2c})$ 处的零解, 即

$$\Delta^n h(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) \Big|_{p_0} = 0. \quad (44)$$

化简方程(44), 得到

$$\sqrt{1 - d^2 I_{2r}^2} (\cos(n \Delta \theta_2) - 1) = d \Phi, \quad (45)$$

这里

$$\Phi = I_{2r} \sin(n \Delta \theta_2) + \frac{4n \alpha_1 I_{1r} \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\alpha} \delta_1} + \frac{4n \varepsilon_1}{3 \alpha_2} \Delta \theta_2. \quad (46)$$

根据方程(46), 我们得到耗散因子为

$$d = \frac{\cos(n \Delta \theta_2) - 1}{\sqrt{\Psi}}, \quad (47)$$

这里

$$\Psi = I_{2r}^2 (\cos(n \Delta \theta_2) - 1)^2 + \Phi^2. \quad (48)$$

因为方程(47)只有对非零的耗散因子才成立, 即要求下列条件成立:

$$\Delta \theta_2 \neq \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad \Psi > 0. \quad (49)$$

同时, 能量差分函数还需要满足非退化条件 $D_d \Delta^n h(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) \Big|_{p_0} \neq 0$, 即

$$D_d \left[\sqrt{1 - d^2 I_{2r}^2} (\cos(n \Delta \theta_2) - 1) - d \Phi \right] \neq 0. \quad (50)$$

反之, 对能量差分函数微分后, 有下述等式成立:

$$d I_{2r}^2 (\cos(n \Delta \theta_2) - 1) = \sqrt{1 - d^2 I_{2r}^2} \Phi. \quad (51)$$

经过简单的计算可以知道, 在方程(49)的条件下, 方程(45)和(51)是不能同时满足的, 也就是说在条件(49)成立的情况下, 选择适当的参数后, 方程(44)和(50)能够同时满足, 即能量差分函数存在着简单的零点.

最后, 要确保从慢变流形上起跳的 n 脉冲轨道的着陆点要落在 $p_{0\varepsilon}(d)$ 的吸引域内. 由于脉冲的落点位于点 $(0, \theta_{2c}(d) + n \Delta \theta_2)$ 附近, 我们考虑区间 $[-\pi/2, 3\pi/2]$ 上的一点 $\theta_2^n(d)$, 这一点距离落点有 $2k\pi$ 长度, 我们有

$$\theta_2^n(d) = \theta_{2s}(d) + [\theta_{2c}(d) + n \Delta \theta_2 - \theta_{2s}(d)] \bmod 2\pi, \quad (52)$$

这里

$$\theta_{2s}(d) = \pi - \arcsin(dI_{2r}), \quad (53a)$$

$$\theta_{2c}(d) = \arcsin(dI_{2r}). \quad (53b)$$

为了验证距离落点有 $2k\pi$ 长度的点平移 $2k\pi$ 后, 是否距离区域 $[-\pi/2, 3\pi/2]$ 上的鞍点很近, 我们给出如下分析. 如果 $\theta_2^n(d) > \theta_{2s}(d)$, 由于相图具有对称性 $\theta \rightarrow \theta - 2\pi$, 我们重新定义 $\theta_2^n(d)$ 为 $\theta_2(d) - 2\pi$. 如果点 $\theta_2^n(d)$ 的能量大于鞍点的能量, 即满足下列能量关系:

$$h(0, \theta_2^n(d)) > h(0, \theta_{2s}(d)), \quad (54)$$

将方程(53a)代入方程(27), 可以得到下列条件:

$$\cos(\theta_2^n(d)) - \cos(\theta_{2s}(d)) > dI_{2r}(\theta_2^n(d) - \theta_{2s}(d)). \quad (55)$$

因此, 对于充分小的扰动 $\varepsilon(\varepsilon > 0)$, 脉冲的着陆点将位于鞍-焦点 $p_{0\varepsilon}(d)$ 的吸引域内, 系统将产生 Shilnikov 型多脉冲混沌运动.

3 数值模拟

本节我们利用四阶 Runge-Kutta 法对平均方程(2)

进行数值模拟分析, 利用相图、波形图和频谱图来描述在横向载荷、面内载荷和压电激励联合作用下压电复合材料层合矩形板的非线性动力学行为, 进一步验证我们前面的理论分析结果.

我们选取初始条件和参数分别为 $x_1 = 0.9$, $x_2 = 0.32$, $x_3 = 0.4$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 0.5$, $x_6 = 0.12$, $\mu = 0.5$, $\sigma_1 = 7.02$, $\sigma_2 = 0.26$, $\sigma_3 = 0.92$, $a_2 = 20.3$, $a_3 = 15.1$, $a_4 = 21.2$, $a_7 = 25.3$, $a_9 = -3$, $a_{13} = 17.3$, $a_{14} = -31.2$, $b_5 = -3.6$, $b_6 = 5$, $b_{10} = 34.5$, $b_{12} = -6.4$, $d_5 = 27.1$, $d_6 = -34.6$, $d_8 = -17.8$, $d_{11} = 27$.

图 3 给出了当横向激励 $f = 67.4$ 时, 压电复合材料层合矩形板产生多脉冲混沌运动. 图 3(a)和(b)分别表示在相空间 (x_1, x_2, x_3) 和 (x_4, x_5, x_6) 中的三维相图, 图 3(c)表示 x_1 的频谱图. 从图 3(a)和(b)我们发现在压电复合材料层合矩形板的非线性振动中能够产生轨道跳跃和多脉冲混沌运动.

图 4 给出了改变横向激励到 $f = 72.4$, 其他参数与图 3 相同时, 压电复合材料层合矩形板的轨道跳跃现

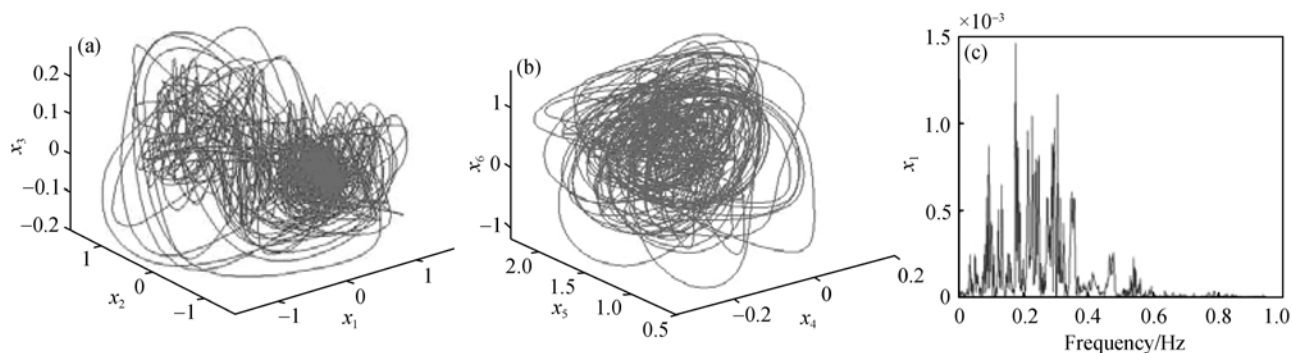


图 3 当 $f = 67.4$ 时, 压电复合材料层合板的混沌运动

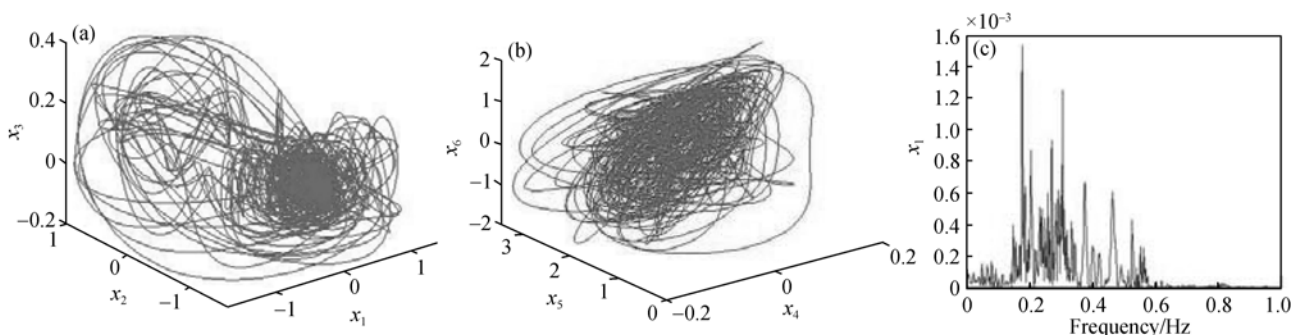


图 4 当 $f = 72.4$ 时, 压电复合材料层合板的混沌运动

象的多脉冲混沌运动.

4 结论

目前, 对高维非线性系统复杂动力学的理论研究仍然是国内外科学研究的前沿课题. 在本文中, 我们首次研究了在横向载荷、面内载荷、压电激励联合作用下压电复合材料层合矩形板的多脉冲混沌动力学. 在 1:2:4 内共振的情况下, 我们获得了六维平均方程. 考虑六维平均方程存在一对双零特征值和两对纯虚特征值的情况, 应用规范形理论对六维平均方程进行化简, 我们得到较为简单的规范形. 在此基础上, 我们应用能量-相位法研究了六维压电复合材料层合矩形板平均系统的非线性动力学特性. 在六维相空间 $(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2)$ 中定义一个横截面

$I_1 = I_{1r} \in \mathbf{U}_1$ 和 $\theta_1 \in (0, 2\pi]$, 在共振值 I_{2r} 附近研究系统在四维相空间 $(u_1, u_2, I_2, \theta_2)$ 中的非线性动力学特性, 然后让 I_1 取遍区间 $\mathbf{U}_1 = [I_{1r} - \varepsilon, I_{1r} + \varepsilon] \subset [I_{11}, I_{12}]$ 中的每一个值, 我们能够得到在整个六维相空间 $(u_1, u_2, I_1, \theta_1, I_2, \theta_2)$ 中系统的非线性动力学特性. 引入二维慢变流形, 我们发现在一定条件下系统能够产生同宿分叉, 在小扰动情况下, 系统存在 Shilnikov 型多脉冲轨道, 多脉冲轨道是从不变流形的鞍-焦点出发, 经过 n 个脉冲跳跃以后, 落点回到鞍-焦点的收敛域内.

为了验证理论分析结果的正确性, 我们利用四阶 Runge-Kutta 法进行数值模拟, 数值模拟结果表明, 在一定的参数条件下, 压电复合材料层合矩形板能够产生跳跃轨道和多脉冲混沌运动.

参考文献

- 1 Vos R, Barrett R, Breuker R D, et al. Post-buckled precompressed elements: A new class of control actuators for morphing wing UAVs. *Smart Mater Struct*, 2007, 16(3): 919—926 [\[DOI\]](#)
- 2 Barbarino S, Ameduri S, Pecora R. Wing chamber control architectures based on SMA: Numerical investigations. In: *Proceedings of the International Conference on Smart Materials and Nanotechnology in Engineering*. Bellingham WA: SPIE, 2007, 64231E
- 3 Gandhi F, Anusonti-Inthra P. Skin design studies for variable camber morphing airfoils. *Smart Mater Struct*, 2008, 17(1): 015—025
- 4 Mattioni F, Weaver P M, Friswell M I. Multistable composite plates with piecewise variation of lay-up in the planform. *Int J Solids Struct*, 2009, 46(1): 151—164 [\[DOI\]](#)
- 5 Pai P F, Nayfeh A H. A nonlinear composite plate theory. *Nonlinear Dyn*, 1991, 2(6): 445—477 [\[DOI\]](#)
- 6 Bhimaraddi A. Large amplitude vibrations of imperfect antisymmetric angle-ply laminated plates. *J Sound Vib*, 1999, 162(3): 457—470 [\[DOI\]](#)
- 7 Shukla K K, Chen J M, Huang J H. Nonlinear dynamic analysis of composite laminated plates containing spatially oriented short fibers. *Int J Solids Struct*, 2004, 41(2): 365—384 [\[DOI\]](#)
- 8 Ye M, Lu J, Zhang W, et al. Local and global nonlinear dynamics of a parametrically excited rectangular symmetric cross-ply laminated composite plate. *Chaos Soliton Fract*, 2005, 26(1): 195—213 [\[DOI\]](#)
- 9 Ye M, Sun Y H, Zhang W, et al. Nonlinear oscillations and chaotic dynamics of an antisymmetric cross-ply composite laminated rectangular thin plate under parametric excitation. *J Sound Vib*, 2005, 287(4-5): 723—758 [\[DOI\]](#)
- 10 Lee S J, Reddy J N. Nonlinear response of laminated composite plates under thermomechanical loading. *Int J Nonlinear Mech*, 2005, 40(7): 971—985 [\[DOI\]](#)
- 11 Zhang W, Song C Z, Ye M. Further studies on nonlinear oscillations and chaos of a rectangular symmetric cross-by laminated plate under parametric excitation. *Int J Bifurcat Chaos*, 2006, 16(2): 325—347 [\[DOI\]](#)
- 12 Zhu L F, Chattopadhyay A, Goldberg R K. Nonlinear transient response of strain rate dependent composite laminated plates using multiscale simulation. *Int J Solids Struct*, 2006, 43(9): 2602—2630 [\[DOI\]](#)
- 13 Abe A, Kobayashi Y, Yamada G. Nonlinear dynamic behaviors of clamped laminated shallow shells with one-to-one internal resonance. *J Sound Vib*, 2007, 304(3-5): 957—968 [\[DOI\]](#)
- 14 Hao Y X, Chen L H, Zhang W, et al. Nonlinear oscillations, bifurcations and chaos of functionally graded materials plate. *J Sound Vib*, 2008, 312(4-5): 862—892 [\[DOI\]](#)
- 15 Zhang W, Yao Z G, Yao M H. Periodic and chaotic dynamics of composite laminated piezoelectric rectangular plate with one-to-two

- internal resonance. *Sci China Ser E-Tech Sci*, 2009, 52(3): 731—742[DOI]
- 16 Melnikov V K. On the stability of the center for time periodic perturbation. *Trans Moscow Math Soc*, 1963, 12: 1—17
 - 17 Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamics Systems*. New York: Springer-Verlag, 1990
 - 18 Haller G, Wiggins S. Orbits homoclinic to resonances: the Hamiltonian case. *Phys D*, 1993, 66(3-4): 298—346[DOI]
 - 19 Haller G, Wiggins S. Multi-pulse jumping orbits and homoclinic trees in a modal truncation of the damped-forced nonlinear Schrödinger equation. *Phys D*, 1995, 85(3): 311—347[DOI]
 - 20 Haller G, Wiggins S. Geometry and chaos near resonant equilibria of 3-DOF Hamiltonian systems. *Phys D*, 1996, 90(4): 319—365[DOI]
 - 21 Haller G. Multi-dimensional homoclinic jumping and the discretized NLS equation. *Commun Math Phys*, 1998, 193(1): 1—46[DOI]
 - 22 Haller G. Homoclinic jumping in the perturbed nonlinear Schrödinger equation. *Commun Pure Appl Math*, 1999, II : 1—47
 - 23 Haller G. *Chaos Near Resonance*. New York: Springer-Verlag, 1999
 - 24 Malhotra N, Namachchivaya N Sri, McDonald R J. Multi-pulse orbits in the motion of flexible spinning discs. *J Nonlinear Sci*, 2002, 12(1): 1—26[DOI]
 - 25 Yao M H, Zhang W. Multi-pulse Shilnikov orbits and chaotic dynamics in nonlinear non-planar motion of a cantilever beam. *Int J Bifurcat Chaos*, 2005, 15(12): 3923—3952[DOI]
 - 26 Yao M H, Zhang W. Multi-pulse homoclinic orbits and chaotic dynamics in motion of parametrically excited viscoelastic moving belt. *Int J Nonlinear Sci Num*, 2005, 6: 37—45
 - 27 Yao M H, Zhang W. Shilnikov-type multipulse orbits and chaotic dynamics of a parametrically and externally excited rectangular thin plate. *Int J Bifurcat Chaos*, 2007, 17(3): 851—875[DOI]
 - 28 Zhang W, Yao M H. Theories of multi-pulse global bifurcations for high-dimensional systems and applications to cantilever beam. *Int J Mod Phys B*, 2008, 22(24): 4089—4141[DOI]
 - 29 Zhang W, Yao Z G, Chen L H, et al. Periodic and chaotic oscillations of laminated composite piezoelectric rectangular plate with 1:3 internal resonance. In: *Proceedings of the ASME 2007 International Mechanical Engineering longress & Exposition (IMECE2007-4Z698)*, Seattle, USA. New York: ASME, 2007, 1893—1901
 - 30 Yao Z G. *Studies on complicated nonlinear dynamics and control of composite laminated piezoelectric structures*. Doctor Dissertation. Beijing: Beijing University of Technology, 2009
 - 31 Zhang W, Wang F X, Zu J W. Computation of normal forms for high dimensional nonlinear systems and application to nonplanar nonlinear oscillations of a cantilever beam. *J Sound Vib*, 2004, 278(4-5): 949—974[DOI]
 - 32 Chen Y, Zhang W. Computation of the third order normal form for six-dimensional nonlinear dynamical systems. *J Dyn Cont*, 2004, 2: 31—35