



窗口 Fourier 变换反演公式的级数表示

献给陆善镇教授 75 华诞

孙文昌

南开大学数学科学学院, 天津 300071
E-mail: sunwch@nankai.edu.cn

收稿日期: 2013-08-30; 接受日期: 2013-10-05

国家自然科学基金 (批准号: 11371200) 和教育部博士点基金 (批准号: 20120031110023) 资助项目

摘要 本文研究连续窗口 Fourier 变换的反演公式. 与经典的积分重构公式不同, 本文证明当窗函数满足合适的条件时, 窗口 Fourier 变换的反演公式可以表示为一个离散级数. 此外, 本文还研究这一重构级数的逐点收敛及其在 Lebesgue 空间的收敛性. 对于 L^2 空间, 本文给出重构级数收敛的充分必要条件.

关键词 窗口 Fourier 变换 短时 Fourier 变换 反演公式

MSC (2010) 主题分类 42A38, 42C15

1 引言

Fourier 变换是时频分析的基本工具, 广泛应用于偏微分方程、声学、光学和信号处理等很多领域. 给定 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 它的 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\omega} dx,$$

其中上式右端的积分在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛并在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛.

Fourier 变换能够很好地刻画信号的频率特征, 但几乎不能提供信号在时域上的任何信息. 此外, Fourier 变换是一种“整体分析”, 为了知道信号所含某个频率分量的大小, 我们需要知道信号在整个时间域上的值. 在应用中, 经常需要分析信号在特定时间的频率成分. 例如, 在音乐和语音信号分析中, 人们所关心的是什么时候演奏什么音符, 发出什么样的音节; 对地震波的记录中, 人们关心的是在什么位置出现什么样的反射波; 图像分析的边缘检测关心的是信号突变部分的位置等. 为了分析信号的局部特征, 在 Fourier 分析的基本变换函数 $e^{-ix\omega}$ 之前乘以一个时间上有限或在无穷远处迅速衰减的窗函数 $g(x)$, 然后用它们作分析工具, 这就是窗口 Fourier 变换. 具体来说, 信号 $f(x)$ 关于窗函数 $g(x)$ 的窗口 Fourier 变换 (也称为短时 Fourier 变换) 定义为

$$(V_g f)(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x-t)} e^{-ix\omega} dx.$$

容易验证, 当 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 且 $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ 时, $V_g f$ 有定义, 其中 $p, p' \geq 1$ 且 $1/p + 1/p' = 1$.

英文引用格式: Sun W C. Inversion of the continuous windowed Fourier transform using discrete series (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 545–557, doi: 10.1360/N012013-00123

窗口 Fourier 变换是现代时频分析中的常用工具, 广泛应用于通讯理论、量子力学、信号和图像处理等很多领域. 有关这方面的介绍可参见文献 [1-5].

反演公式是窗口 Fourier 变换理论和应用中经常遇到的基本问题. 为了从窗口 Fourier 变换重构原始信号, 经典的解决方案是计算一个二重积分

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\|g\|_2^2} \iint_{\mathbb{R}^2} (V_g f)(t, \omega) g(x-t) e^{ix\omega} dt d\omega, \quad (1.1)$$

这里我们假定 $g \in L^2(\mathbb{R})$. 可以证明文献 [4], 上述积分在 $L^2(\mathbb{R})$ 和其他一些常见函数空间收敛. 把重构公式 (1.1) 离散化, 我们得到它的 Riemann 和表示. 对于适当的窗函数, 当采样密度充分大时, 重构公式 (1.1) 的 Riemann 和收敛到原始信号 [6-9].

另一个重构原始信号的方法是滤波器组求和法 [10, 11]. 设窗函数 $g(x)$ 在某个 x_0 处不为 0, 则

$$f(x) = \frac{1}{2\pi g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} (V_g f)(x - x_0, \omega) e^{ix\omega} d\omega. \quad (1.2)$$

可以证明, 当 $1 < p < \infty$ 时, 对每个 $f \in L^p(\mathbb{R})$, 上述积分在 $L^p(\mathbb{R})$ 中收敛并在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛 [11].

把 (1.2) 中的积分离散化, 我们得到 Riemann 和

$$R_{g,b} f(x) := \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (V_g f)(x - x_0, kb) e^{ikbx}, \quad b > 0. \quad (1.3)$$

文献 [12] 证明了, 当窗函数满足适当条件时, $R_{g,b}$ 依算子范数收敛. 在介绍具体结果之前, 先给出 Wiener 空间的定义.

给定常数 $a > 0$, $\mathbb{R}$ 上所有满足条件

$$\|f\|_{W;a} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f \cdot \chi_{[na, na+a)}\|_{\infty} < \infty$$

的可测函数构成的空间称为 Wiener 空间, 记为 $W(\mathbb{R})$. 可以证明, $W(\mathbb{R})$ 与 a 的选取无关, 不同的 a 对应于等价的范数 [1, 第 187 页].

对于 $L^2(\mathbb{R})$ 空间, 我们有以下结论.

命题 1.1 [12, 定理 1.21] 设 g 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数并且 $\hat{g} \in W(\mathbb{R})$, 则

(i) $R_{g,b} f$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上有定义并且

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \|R_{g,b} f - 2\pi \overline{g(x_0)} f\|_{L^2} = 0; \quad (1.4)$$

(ii) 进一步, 若 $\hat{g}$ 局部 Riemann 可积, 则

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \|R_{g,b} - 2\pi \overline{g(x_0)} \cdot I\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 0. \quad (1.5)$$

上述命题中关于 $\hat{g}$ 局部 Riemann 可积的假设是必要的. 下面是一个反例.

例 1.2 设 E 是 $[0, 1]$ 中具有正测度的疏集. 令 $\hat{g} = \chi_E$, 则 g 连续, $\hat{g} \in W(\mathbb{R})$ 并且

$$\liminf_{b \rightarrow 0^+} \|R_{g,b} - 2\pi \overline{g(0)} \cdot I\|_{L^2 \rightarrow L^2} > 0.$$

具体证明可参见文献 [12].

对于 $R_{g;b}$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中的收敛性, 我们有以下结论.

命题 1.3 [12, 定理 1.3] 设窗函数 g 满足条件下列条件之一:

- (i) $g \in W(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ 并且 $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$;
- (ii) g 在 $\mathbb{R}$ 上局部绝对连续并且 $g, g' \in L^1(\mathbb{R})$,

则 $R_{g;b}$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 上有定义并且

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \|R_{g;b} - 2\pi \overline{g(x_0)} \cdot I\|_{L^p \rightarrow L^p} = 0, \quad 1 < p < \infty.$$

本文中, 我们考虑以下问题:

问题 1.1 给定常数 $x_0 \in \mathbb{R}, b > 0$. 令

$$(S_{N;b}f)(x) = \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k=-N}^N (V_g f)(x - x_0, kb) e^{ikbx}.$$

当 g 满足什么条件以及在什么意义下有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_{N;b}f)(x) = f(x).$$

我们证明, 当 g 满足适当的光滑和衰减条件并且 $f \in L^p(\mathbb{R}), 1 < p < \infty$ 时, 上述极限在几乎处处收敛以及 $L^p(\mathbb{R})$ 中范数收敛的意义下成立, 其证明用到著名的 Carleson-Hunt 定理和极大函数理论.

本文结构如下: 第 2 节简要介绍证明逐点收敛所用到的极大函数理论; 第 3 节证明 $S_{N;b}f$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 空间的收敛性, 特别地, 对于 $p = 2$, 我们给出 $S_{N;b}f$ 收敛的充分必要条件.

2 极大函数与逐点收敛

极大函数法是调和分析中证明逐点收敛的常用方法^[13, 14]. 为保持完整, 我们给出下述命题的一个证明.

命题 2.1 设 $\{\Lambda_n : n > 0\}$ 是 $L^p(X)$ 到 $L^q(Y)$ 的一列有界线性算子, 其中 X 和 Y 是 $\mathbb{R}$ 的子集, $p, q \geq 1$ 为常数. 设存在常数 C 使得

$$\left\| \sup_{n \geq 1} |(\Lambda_n f)(y)| \right\|_{L^q(Y)} \leq C \|f\|_{L^p(X)}, \quad \forall f \in L^p(X),$$

并且对 $L^p(X)$ 的某个稠密子集 $\mathcal{F}$ 中的每个函数 f 和任意 $y \in Y$, $\{(\Lambda_n f)(y) : n \geq 1\}$ 收敛, 则对任何 $f \in L^p(X)$, $\{(\Lambda_n f)(y) : n \geq 1\}$ 在 Y 上几乎处处收敛.

证明 固定某个 $f \in L^p(X)$. 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在某个 $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ 使得

$$\|f - \tilde{f}\|_{L^p(X)} < \varepsilon.$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Lambda_n \tilde{f})(x) = \tilde{f}(x), \quad \forall x \in X,$$

所以,

$$\limsup_{n, m \rightarrow \infty} |(\Lambda_n \tilde{f})(x) - (\Lambda_m \tilde{f})(x)| = 0, \quad \forall x \in X.$$

因此,

$$\begin{aligned}
 & \left\| \limsup_{n,m \rightarrow \infty} |(\Lambda_n f)(x) - (\Lambda_m f)(x)| \right\|_{L^p(X)} \\
 & \leq \left\| \limsup_{n \rightarrow \infty} |(\Lambda_n(f - \tilde{f}))(x)| \right\|_{L^p(X)} + \left\| \limsup_{n,m \rightarrow \infty} |(\Lambda_n \tilde{f})(x) - (\Lambda_m \tilde{f})(x)| \right\|_{L^p(X)} \\
 & \quad + \left\| \limsup_{m \rightarrow \infty} |(\Lambda_m(f - \tilde{f}))(x)| \right\|_{L^p(X)} \\
 & \leq 2 \left\| \sup_{n \geq 1} |(\Lambda_n(f - \tilde{f}))(x)| \right\|_{L^p(X)} \\
 & \leq 2C \|f - \tilde{f}\|_{L^p(X)} \\
 & < 2C\varepsilon.
 \end{aligned}$$

由 ε 的任意性得

$$\left\| \limsup_{n,m \rightarrow \infty} |(\Lambda_n f)(x) - (\Lambda_m f)(x)| \right\|_{L^p(X)} = 0.$$

所以, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Lambda_n f)(x)$ 在 X 上几乎处处存在. $\square$

3 窗口 Fourier 变换的反演公式

本节研究 $S_{N;b}f$ 在各种函数空间的收敛性. 首先, 我们介绍一些预备结果. 下面是关于窗口 Fourier 变换的一个恒等式, 其证明可参见文献 [5, 引理 3.1.1].

命题 3.1 对任何 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, 有

$$(V_g f)(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} (V_{\hat{g}} \hat{f})(\omega, -x) e^{-ix\omega}.$$

Zak 变换是时频分析中的常用工具. 给定 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 它的 Zak 变换定义为

$$(Zf)(x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) e^{-ik\omega}.$$

可以证明, Zak 变换是 $L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2([0, 1] \times [-\pi, \pi])$ 的等距变换. 下面的结果表明, 一个函数的 Zak 变换可以用它的 Fourier 变换的 Zak 变换来表示.

命题 3.2 [15, 引理 6.2] 设 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 对几乎所有的 $(x, \omega) \in \mathbb{R}^2$, 有

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) e^{-ik\omega} = e^{ix\omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2k\pi) e^{i2k\pi x}. \quad (3.1)$$

3.1 紧支集 L^p 函数的重构公式

Fourier 级数的逐点收敛性是调和分析中一个深刻的经典结果. Carleson [16] 证明了 $L^2[-\pi, \pi]$ 中函数的 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上几乎处处收敛. Hunt [17] 把这一结果推广到 $L^p[-\pi, \pi]$ 空间, $1 < p < \infty$. Kenig 和 Tomas [18] 证明了 $L^p(\mathbb{R})$ 上的 Fourier 积分有类似的结论. 这里我们引用文献 [13] 中的一个结果.

命题 3.3 [13, 定理 3.6.15] 对 $N \geq 1$, 定义

$$D_N(x) = \frac{\sin(2N+1)x/2}{\sin x/2},$$

则对任何 $1 < p < \infty$, 存在常数 C_p , 使得对任何 $f \in L^p[-\pi, \pi]$,

$$\left\| \sup_{N \geq 1} |(f * D_N)(x)| \right\|_{L^p[-\pi, \pi]} \leq C_p \|f\|_{L^p[-\pi, \pi]}.$$

由上述命题立刻得到以下推论.

推论 3.4 对任何 $f \in L^p[-\Omega, \Omega]$, 我们有

$$\left(\frac{\pi}{\Omega} \right)^p \int_{-\Omega}^{\Omega} \sup_{N \geq 1} \left| \int_{-\Omega}^{\Omega} f(y) D_N \left(\frac{\pi}{\Omega} (x - y) \right) dy \right|^p dx \leq C_p^p \int_{-\Omega}^{\Omega} |f(x)|^p dx.$$

证明 由命题 3.3, 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sup_{N \geq 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f \left(\frac{\Omega}{\pi} y \right) D_N(x - y) dy \right|^p dx \leq C_p^p \int_{-\pi}^{\pi} \left| f \left(\frac{\Omega}{\pi} x \right) \right|^p dx.$$

作一个简单的变量替换 $(x, y) \rightarrow (\pi x / \Omega, \pi y / \Omega)$ 即可得到待证结论. □

下面是命题 3.3 的另一个推论.

推论 3.5 设 $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2$, 则对任何 $b > 0$, 我们有

$$\int_{-\pi/b}^{\pi/b} \sup_{N \geq 1} \left| \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikbx} \right|^2 dx \leq \frac{C_2^2}{2\pi b} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2,$$

其中 C_2 与命题 3.3 中的常数相同.

证明 令 $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikbx}$, 则 $f \in L^2[-\pi/b, \pi/b]$ 并且

$$c_k = \frac{b}{2\pi} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} f(x) e^{-ikbx} dx.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \sup_{N \geq 1} \left| \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikbx} \right|^2 dx &= \frac{b^2}{4\pi^2} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \sup_{N \geq 1} \left| \sum_{k=-N}^N \int_{-\pi/b}^{\pi/b} f(y) e^{-ikby} e^{ikbx} dy \right|^2 dx \\ &\leq \frac{C_2^2}{4\pi^2} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} |f(x)|^2 dx \quad (\text{推论 3.4}) \\ &= \frac{C_2^2}{2\pi b} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \end{aligned}$$

证毕. □

下面我们来证明, 对于合适的 f , 当 N 趋于无穷时, $S_{N;b}f$ 一致收敛到 f .

引理 3.6 设 Ω 和 b 是正常数且满足 $\Omega b \leq \pi$, $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, f 连续, $\text{supp } f \subset [-\Omega, \Omega]$ 并且 $\hat{f} \in W(\mathbb{R})$, 则有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq \Omega} |f(x) - (S_{N;b}f)(x)| = 0. \quad (3.2)$$

从而,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_{N;b}f\|_{L^p[-\Omega, \Omega]} = 0.$$

证明 在 (3.1) 中以 $f(2\pi \cdot /b)$ 代替 f , 有

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(y + kb) e^{i(y+kb)x} = \frac{2\pi}{b} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(x + \frac{2n\pi}{b}\right) e^{-i2\pi ny/b}, \quad \text{a.e.}$$

所以, 对几乎所有的 $x \in [-\Omega, \Omega]$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(y + kb) e^{i(y+kb)x} = \frac{2\pi}{b} f(x), \quad \text{a.e. } y \in \mathbb{R}.$$

由命题 3.1,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N}^N (V_g f)(x - x_0, kb) e^{ikbx} &= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} (V_{\hat{g}} \hat{f})(kb, x_0 - x) e^{ix_0 kb} \\ &= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \overline{\hat{g}(y - kb)} e^{iyx} e^{-ix_0(y - kb)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y + kb) e^{i(y+kb)x} \overline{\hat{g}(y)} e^{-ix_0 y} dy. \end{aligned} \quad (3.3)$$

所以,

$$f(x) - \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k=-N}^N (V_g f)(x - x_0, kb) e^{ikbx} = \frac{b}{4\pi^2 g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} \sum_{|k| > N} \hat{f}(y + kb) e^{i(y+kb)x} \overline{\hat{g}(y)} e^{ix_0 y} dy.$$

因为上式左端关于 x 连续, 所以,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k=-N}^N (V_g f)(x - x_0, kb) e^{ikbx} \right| &= \left\| f - \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k=-N}^N (V_g f)(\cdot - x_0, kb) e^{ikb\cdot} \right\|_{\infty} \\ &\leq \frac{b}{4\pi^2 |g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} \sum_{|k| > N} |\hat{f}(y + kb)| \cdot |\hat{g}(y)| dy. \end{aligned}$$

注意到 $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ 并且 $\sum_{|k| > N} |\hat{f}(y + kb)| \leq 2\|\hat{f}\|_{W;b}$, 由控制收敛定理可知结论成立. $\square$

下面给出本小节的主要结果.

定理 3.7 设 $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. 对任何 $0 < b \leq \pi/\Omega$, $f \in L^p[-\Omega, \Omega]$, $1 < p < \infty$, 我们有

$$f(x) = \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (V_g f)(x - x_0, kb) e^{ikbx} \chi_{[-\Omega, \Omega]}(x), \quad (3.4)$$

其中上式右端级数在 $L^p[-\Omega, \Omega]$ 中收敛并在 $[-\Omega, \Omega]$ 上几乎处处收敛.

证明 对任何 $f \in L^p[-\Omega, \Omega]$, 由 (3.3) 得

$$\begin{aligned} (S_{N;b} f)(x) &= \frac{b}{4\pi^2 g(x_0)} \sum_{k=-N}^N \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y + kb) e^{i(y+kb)x} \overline{\hat{g}(y)} e^{-ix_0 y} dy \\ &= \frac{b}{4\pi^2 g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=-N}^N \hat{f}_y(kb) e^{i(y+kb)x} \overline{\hat{g}(y)} e^{-ix_0 y} dy, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中 $f_y(x) = f(x)e^{-ixy}$. 由 Minkovski 不等式,

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{N \geq 1} |(S_{N;b}f)(x)| \right\|_{L^p[-\Omega, \Omega]} &\leq \frac{b}{4\pi^2|g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} \left\| \sup_{N \geq 1} \left| \sum_{k=-N}^N \hat{f}_y(kb)e^{ikbx} \right| \right\|_{L^p[-\Omega, \Omega]} |\hat{g}(y)| dy \\ &\leq \frac{b}{4\pi^2|g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} \left\| \sup_{N \geq 1} \left| \sum_{k=-N}^N \hat{f}_y(kb)e^{ikbx} \right| \right\|_{L^p[-\pi/b, \pi/b]} |\hat{g}(y)| dy \\ &\leq \frac{C_p}{4\pi^2|g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} \|f_y\|_{L^p[-\pi/b, \pi/b]} \cdot |\hat{g}(y)| dy \quad (\text{推论 3.4}) \\ &= \frac{C_p \|\hat{g}\|_1}{4\pi^2|g(x_0)|} \|f\|_{L^p[-\Omega, \Omega]}, \quad N \geq 1. \end{aligned}$$

所以, $S_{N;b}$ 关于 N 一致有界.

另一方面, 由引理 3.6, 当 $f \in C_c^\infty[-\Omega, \Omega]$ 时, $S_{N;b}f$ 在 $L^p[-\Omega, \Omega]$ 中收敛到 f . 因为 $C_c^\infty[-\Omega, \Omega]$ 在 $L^p[-\Omega, \Omega]$ 中稠密, 所以, 对任何 $f \in L^p[-\Omega, \Omega]$, (3.4) 中级数在 $L^p[-\Omega, \Omega]$ 中收敛到 f .

再次利用 $C_c^\infty[-\Omega, \Omega]$ 在 $L^p[-\Omega, \Omega]$ 中的稠密性, 由 (3.2) 和命题 2.1 可得 (3.4) 中级数在 $[-\Omega, \Omega]$ 上几乎处处收敛. 证毕. $\square$

3.2 平方可积函数的重构公式

本小节研究当 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 时 $S_{N;b}f$ 的收敛性.

首先我们证明, 对于好函数, $(S_{N;b}f)(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 f .

引理 3.8 设 $b > 0$ 为常数, g 连续, $\hat{g} \in W(\mathbb{R})$ 并且 $g(x_0 + 2k\pi/b) = 0, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. 当 $f \in C_c(\mathbb{R})$ 并且 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ 时, 我们有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - (S_{N;b}f)(x)| = 0. \quad (3.6)$$

证明 令

$$G(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(y - kb)e^{ix_0(y - kb)}.$$

因为 $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, G 在 $\mathbb{R}$ 上有定义并且 $G \in L^1[0, b]$. 另一方面, 注意到

$$\begin{aligned} \int_0^b G(y)e^{i2n\pi y/b} dy &= \int_0^b \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(y - kb)e^{ix_0(y - kb)} e^{i2n\pi y/b} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y)e^{ix_0 y} e^{i2n\pi y/b} dy \\ &= 2\pi g\left(x_0 + \frac{2n\pi}{b}\right) \\ &= 0, \quad n \neq 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

我们有

$$G(y) = \frac{2\pi g(x_0)}{b}, \quad \text{a.e.}$$

由 (3.3) 得

$$\sum_{k=-N}^N (V_g f)(x - x_0, kb)e^{ikbx} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{iyx} \sum_{k=-N}^N \overline{\hat{g}(y - kb)} e^{-ix_0(y - kb)} dy. \quad (3.8)$$

于是,

$$f(x) - (S_{N;b}f)(x) = \frac{b}{4\pi^2 g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{iyx} \sum_{|k|>N} \overline{\hat{g}(y-kb)} e^{-ix_0(y-kb)} dy. \quad (3.9)$$

所以,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - (S_{N;b}f)(x)| \leq \frac{b}{4\pi^2 |g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)| \sum_{|k|>N} |\hat{g}(y-kb)| dy.$$

因为 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ 并且 $\sum_{|k|>N} |\hat{g}(y-kb)| \leq 2\|g\|_{W;b}$, 由控制收敛定理可知结论成立. $\square$

下面给出 $S_{N;b}f$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上收敛的充分必要条件.

定理 3.9 设 $b > 0$ 为常数, $g \in L^2(\mathbb{R})$ 是连续函数并且 $\hat{g} \in W(\mathbb{R})$, 则以下两条等价:

(i) 对任何 $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (V_g f)(x - x_0, kb) e^{ikbx}, \quad (3.10)$$

上式右端级数在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛并在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛;

(ii) $g(x_0 + 2k\pi/b) = 0, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

注 3.10 当 g 可微并且 $\text{supp } g \subset [x_0 - \Omega, x_0 + \Omega]$ 时, g 满足定理 3.9 的条件, 其中 $0 < \Omega < 2\pi/b$, 其证明见注 3.15.

证明 先证 (ii) $\Rightarrow$ (i). 由 Parseval 恒等式和 (3.9) 可得

$$\|f - S_{N;b}f\|_2^2 = \frac{1}{8\pi^3 |g(x_0)|^2} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2 b \sum_{|k|>N} |\overline{\hat{g}(y-kb)} e^{-ix_0(y-kb)}|^2 dy.$$

因为 $\hat{g} \in W(\mathbb{R})$, 所以, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(y-kb)| \leq 2\|\hat{g}\|_{W;b}, \forall y \in \mathbb{R}$. 由控制收敛定理,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_{N;b}f\|_2 = 0.$$

这就证明了 L^2 中的范数收敛.

下证逐点收敛性. 固定某个 $n \in \mathbb{Z}$, 由 (3.3),

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{N \geq 1} |(S_{N;b}f)(x)| \right\|_{L^2[(2n-1)\pi/b, (2n+1)\pi/b]} \\ & \leq \frac{b}{4\pi^2 |g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} \left\| \sup_{N \geq 1} \left| \sum_{k=-N}^N \hat{f}(y+kb) e^{i(y+kb)x} \right| \right\|_{L^2[(2n-1)\pi/b, (2n+1)\pi/b]} |\hat{g}(y)| dy \\ & = \frac{b}{4\pi^2 |g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} \left\| \sup_{N \geq 1} \left| \sum_{k=-N}^N \hat{f}(y+kb) e^{i(y+kb)(\cdot + 2n\pi/b)} \right| \right\|_{L^2[-\pi/b, \pi/b]} |\hat{g}(y)| dy \\ & = \frac{b}{4\pi^2 |g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} \left\| \sup_{N \geq 1} \left| \sum_{k=-N}^N \hat{f}(y+kb) e^{ikb \cdot} \right| \right\|_{L^2[-\pi/b, \pi/b]} |\hat{g}(y)| dy \\ & \leq \frac{C_2 b^{1/2}}{(2\pi)^{5/2} |g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(y+kb)|^2 \right)^{1/2} |\hat{g}(y)| dy \quad (\text{推论 3.5}) \\ & \leq \frac{C_2 b^{1/2}}{(2\pi)^{5/2} |g(x_0)|} \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(y+kb)|^2 |\hat{g}(y)| dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(y)| dy \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{C_2(b\|\hat{g}_1\|_1)^{1/2}}{(2\pi)^{5/2}|g(x_0)|} \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(y - kb)| dy \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{C_2(2b\|\hat{g}\|_1\|\hat{g}\|_{W;b})^{1/2}}{4\pi^2|g(x_0)|} \|f\|_2,
\end{aligned}$$

其中 C_2 为命题 3.3 中定义的常数.

由引理 3.8, 当 $f \in C_c(\mathbb{R})$ 并且 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ 时, $(S_{N;b}f)(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛于 $f(x)$. 由命题 2.1, 极限 $\lim_{N \rightarrow \infty} (S_{N;b}f)(x)$ 在 $[(2n-1)\pi/b, (2n+1)\pi/b]$ 上几乎处处存在. 由 n 的任意性可知结论成立.

下证 (i) $\Rightarrow$ (ii). 对任何 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 我们有

$$(S_{N;b}f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{iyx} \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k=-N}^N \overline{\hat{g}(y - kb)} e^{-ix_0(y - kb)} dy.$$

所以,

$$\|S_{N;b}f - f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2 \left| \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k=-N}^N \overline{\hat{g}(y - kb)} e^{-ix_0(y - kb)} - 1 \right|^2 dy.$$

因为 $\hat{g} \in W(\mathbb{R})$, 由控制收敛定理得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k=-N}^N \overline{\hat{g}(y - kb)} e^{-ix_0(y - kb)} - 1 \right|^2 dy = 0.$$

因此,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k=-N}^N \overline{\hat{g}(y - kb)} e^{-ix_0(y - kb)} - 1 \right| = 0, \quad \text{a.e.}$$

于是,

$$g\left(x_0 + \frac{2n\pi}{b}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^b \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(y - kb) e^{ix_0(y - kb)} e^{i2n\pi y/b} dy = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

证毕. □

3.3 L^p 空间上的重构公式

为研究 $S_{N;b}f$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 空间上的收敛性, 我们需要窗函数 g 满足较强的条件.

首先, 我们引入关于 Fourier 积分的 Carleson-Hunt 定理.

命题 3.11 ^[19, 定理 11.3.3] 设 $A > 0$, $1 < p < \infty$, 定义

$$(T_A f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\sin A(x - y)}{\pi(x - y)} dy, \quad f \in L^p(\mathbb{R}), \quad (3.11)$$

则 T_A 是 $L^p(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子并且存在常数 C_p 使得

$$\left\| \sup_{A>0} |(T_A f)(x)| \right\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

为证明 $S_{N;b}f$ 的收敛性, 我们需要关于 Fourier 乘子的一个结果.

命题 3.12 ^[20, 命题 3.8] 设 h 是 $\mathbb{R}$ 上有界变差函数, $(Tf)^\wedge = h \cdot \hat{f}$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, 则 T 可以延拓为 $L^p(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子并且

$$\|Tf\|_p \leq C_p V_h \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}),$$

其中 $1 < p < \infty$, V_h 是 h 在 $\mathbb{R}$ 上的全变差, C_p 为仅依赖于 p 的常数.

与前面几节类似, 首先研究 $S_{N;b}f$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 的某个稠密子集上的收敛性.

引理 3.13 设 $b > 0$ 为常数, $g(x+x_0) = 2h(x)(\sin bx/2)/x$, 其中 h 为连续函数且 $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$, 则对任何 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_{N;b}f\|_p = 0, \quad 1 < p < \infty.$$

证明 因为 $g(x+x_0) = 2h(x)(\sin bx/2)/x$, 所以,

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega x_0} \int_{-b/2}^{b/2} \hat{h}(\omega - t) dt = e^{-i\omega x_0} \int_{\omega-b/2}^{\omega+b/2} \hat{h}(t) dt. \quad (3.12)$$

因此, $\hat{g} \in W(\mathbb{R})$.

设 $\text{supp } f \subset [-\Omega, \Omega]$, 其中 $\Omega > 0$. 由 (3.6) 得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_{N;b}f\|_\infty = 0.$$

由控制收敛定理,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(f - S_{N;b}f) \cdot \chi_{[-2\Omega, 2\Omega]}\|_p = 0. \quad (3.13)$$

另一方面, 记

$$K(x, y) = \frac{2\|h\|_\infty}{|y - x|},$$

则有

$$\begin{aligned} (S_{N;b}f)(x) &= \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k=-N}^N \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{g(y-x+x_0)} e^{-ikby} e^{ikbx} dy \\ &= \frac{b}{2\pi g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{g(y-x+x_0)} D_N(b(y-x)) dy \\ &= \frac{b}{2\pi g(x_0)} \int_{|y| \leq \Omega} f(y) \overline{h(y-x)} \frac{\sin(2N+1)b(y-x)/2}{(y-x)/2} dy. \end{aligned}$$

所以,

$$|(S_{N;b}f)(x)| \leq \frac{b}{2\pi|g(x_0)|} \int_{|y| \leq \Omega} |f(y)| K(y-x) dy.$$

由 Minkovski 不等式,

$$\begin{aligned} &\left(\int_{|x| \geq 2\Omega} \left| \int_{|y| \leq \Omega} K(x, y) |f(y)| dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{|y| \leq \Omega} |f(y)| \left(\int_{|x| \geq 2\Omega} |K(x, y)|^p dx \right)^{1/p} dy \\ &\leq 2\|h\|_\infty \int_{|y| \leq \Omega} |f(y)| \left(\int_{|x| > 2\Omega} \frac{dx}{|x-y|^p} \right)^{1/p} dy \end{aligned}$$

$$= M_p \|f\|_1 \leq M_p (2\Omega)^{1/p'} \|f\|_p,$$

其中 M_p 为常数, $1/p + 1/p' = 1$. 再次利用控制收敛定理得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(f - S_{N;b}f) \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus [-2\Omega, 2\Omega]}\|_p = 0. \quad (3.14)$$

合并 (3.13) 和 (3.14) 可知结论成立. $\square$

下面给出本文的主要结果.

定理 3.14 设 $b > 0$ 为常数, 窗函数 g 满足 $g(x + x_0) = 2h(x)(\sin bx/2)/x$, 其中 h 为连续函数并且 $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$, 则对任何 $1 < p < \infty$,

$$f(x) = \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (V_g f)(x - x_0, kb) e^{ikbx}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}), \quad (3.15)$$

其中上式右端级数在 $L^p(\mathbb{R})$ 中收敛并在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛.

证明 由已知, 当 $1 < p < \infty$ 时, $g \in L^p(\mathbb{R})$. 因此, $V_g f$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有定义. 另一方面, 由 (3.12) 可知, $\hat{g} \in W(\mathbb{R})$.

对任何 $f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R})$, 我们有

$$\begin{aligned} (S_{N;b}f)(x) &= \frac{b}{2\pi g(x_0)} \sum_{k=-N}^N \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{g(y-x+x_0)} e^{-ikby} dy e^{ikbx} \\ &= \frac{b}{2\pi g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{g(y-x+x_0)} D_N(b(y-x)) dy \\ &= \frac{b}{2\pi g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{h(y-x)} \frac{\sin(2N+1)b(y-x)/2}{(y-x)/2} dy \\ &= \frac{b}{4\pi^2 g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \int_{-(2N+1)b/2}^{(2N+1)b/2} \overline{\hat{h}(\omega-t)} dt. \end{aligned} \quad (3.16)$$

所以,

$$(S_{N;b}f)^{\wedge} = \hat{h}_1 \hat{f}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

其中

$$\hat{h}_1(\omega) = \frac{b}{2\pi g(x_0)} \int_{-(2N+1)b/2}^{(2N+1)b/2} \overline{\hat{h}(\omega-t)} dt = \frac{b}{2\pi g(x_0)} \int_{\omega-(2N+1)b/2}^{\omega+(2N+1)b/2} \overline{\hat{h}(t)} dt$$

的全变差不超过 $b\|\hat{h}\|_1/(\pi|g(x_0)|)$. 由命题 3.12, 存在不依赖于 N 的常数 $C_{p,b,h}$, 使得

$$\|S_{N;b}f\|_p \leq C_{p,b,h} \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}), \quad N \geq 1,$$

即 $S_{N;b}$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 上一致有界. 另一方面, 由引理 3.13, 当 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 时, $S_{N;b}f$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 上收敛于 f . 因为 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中稠密, 所以, 对任何 $f \in L^p(\mathbb{R})$, $S_{N;b}f$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中收敛于 f .

下证逐点收敛性. 固定某个 $t \in \mathbb{R}$, 定义算子 M_t 为

$$(M_t f)(x) = f(x) e^{-itx}.$$

当 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 时, 由 (3.16) 得

$$(S_{N;b}f)(x) = \frac{b}{4\pi^2 g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \int_{\omega-(2N+1)b/2}^{\omega+(2N+1)b/2} \overline{\hat{h}(t)} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{b}{4\pi^2 g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{h}(t)} dt \int_{t-(2N+1)b/2}^{t+(2N+1)b/2} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\
 &= \frac{b}{4\pi^2 g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{h}(t)} dt \int_{-(2N+1)b/2}^{(2N+1)b/2} \hat{f}(\omega+t) e^{i\omega x} e^{itx} d\omega \\
 &= \frac{b}{2\pi g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{h}(t)} (M_{-t} T_{(2N+1)b/2} M_t f)(x) dt,
 \end{aligned}$$

其中算子 $T_{(2N+1)b/2}$ 由 (3.11) 定义. 因为 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中稠密, 所以,

$$(S_{N;b}f)(x) = \frac{b}{2\pi g(x_0)} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{h}(t)} (M_{-t} T_{(2N+1)b/2} M_t f)(x) dt, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}).$$

由 Minkovski 不等式,

$$\begin{aligned}
 \left\| \sup_{N \geq 1} |(S_{N;b}f)(x)| \right\|_p &\leq \frac{b}{2\pi |g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(t)| \left\| \sup_{N \geq 1} |(M_{-t} T_{(2N+1)b/2} M_t f)(x)| \right\|_p dt \\
 &= \frac{b}{2\pi |g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(t)| \left\| \sup_{N \geq 1} |(T_{(2N+1)b/2} M_t f)(x)| \right\|_p dt \\
 &\leq \frac{b}{2\pi |g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(t)| C_p \|M_t f\|_p dt \quad (\text{命题 3.11}) \\
 &= \frac{b}{2\pi |g(x_0)|} \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(t)| C_p \|f\|_p dt \\
 &= \frac{b C_p \|\hat{h}\|_1}{2\pi |g(x_0)|} \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

另一方面, 由引理 3.8, 当 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 时, $(S_{N;b}f)(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$. 由命题 2.1 可知结论成立. $\square$

注 3.15 当 g 可微并且 $\text{supp } g \subset [x_0 - \Omega, x_0 + \Omega]$ 时 g 满足定理 3.14 的条件, 其中 $0 < \Omega < 2\pi/b$.

事实上, 令 $h(x) = xg(x+x_0)/(2\sin bx/2)$, 则 h 是紧支集连续可微函数, 从而, $h, h' \in L^2(\mathbb{R})$. 因此,

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|} \cdot (1+|\omega|)\hat{h}(\omega) \in L^1(\mathbb{R}).$$

由 (3.12) 可知, $\hat{g} \in W(\mathbb{R})$.

参考文献

- 1 Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2003
- 2 Chui C. An Introduction to Wavelets. Boston, MA: Academic Press Inc, 1992
- 3 Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: SIAM, 1990
- 4 Feichtinger H G, Strohmer T. Gabor Analysis and Algorithms: Theory and Applications. Boston: Birkhäuser, 1998
- 5 Gröchenig K. Foundations of Time-Frequency Analysis. Boston: Birkhäuser, 2001
- 6 Feichtinger H G, Weisz F. Inversion formulas for the short-time Fourier transform. J Geom Anal, 2006, 16: 507–521
- 7 Feichtinger H G, Weisz F. Gabor analysis on Wiener amalgams. Sampl Theory Signal Image Process, 2007, 6: 129–150
- 8 Sun W. Asymptotic properties of Gabor frame operators as sampling density tends to infinity. J Funct Anal, 2010, 258: 913–932
- 9 Weisz F. Inversion of the short-time Fourier transform using Riemannian sums. J Fourier Anal Appl, 2007, 13: 357–368
- 10 Allen J B, Rabiner L R. A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis. IEEE, 1977, 65: 1558–1564
- 11 Sun W. Inversion formula for the windowed Fourier transform. Math Nachr, 2012, 285: 914–921

- 12 Sun X, Sun W. Inversion formula for the windowed Fourier transform, II. *Adv Comput Math*, 2013, 38: 21–34
- 13 Grafakos L. *Classical Fourier Analysis*. New York: Springer, 2008
- 14 Stein E M. *Harmonic Analysis*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993
- 15 Benedetto J J, Heil C, Walnut D F. Differentiation and the Balian-Low theorem. *J Fourier Anal Appl*, 1995, 1: 355–402
- 16 Carleson L. On convergence and growth of partial sumas of Fourier series. *Acta Math*, 1966, 116: 135–157
- 17 Hunt R A. On the Convergence of Fourier series. In: *Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues*. Carbondale, Ill: Southern Illinois University Press, 1968
- 18 Kenig C, Tomas P. Maximal operators defined by Fourier multipliers. *Studia Math*, 1980, 68: 79–83
- 19 Grafakos L. *Mordern Fourier Analysis*. New York: Springer, 2009
- 20 Duoandikoetxea J. *Fourier Analysis*. Providence, RI: Amer Math Soc, 2001

Inversion of the continuous windowed Fourier transform using discrete series

SUN WenChang

Abstract We study the inversion formula for the continuous windowed Fourier transform. Different from the classical ones where a single or double integral is involved, we show that for a large class of window functions, a function can be reconstructed from its continuous windowed Fourier transform with a discrete series. Moreover, we show that the series is convergent almost everywhere on $\mathbb{R}$ as well as in $L^p(\mathbb{R})$ if the function to be reconstructed is. In particular, for the case of $p = 2$, we give a necessary and sufficient condition for the series to be convergent to the original function.

Keywords windowed Fourier transforms, short-time Fourier transforms, inversion formula

MSC(2010) 42A38, 42C15

doi: 10.1360/N012013-00123