

# 含分数阶导数阻尼的线性振动系统的稳定性

王在华<sup>①②\*</sup>, 胡海岩<sup>②</sup>

① 解放军理工大学理学院应用数学与物理系, 南京 211101;

② 南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016

\* E-mail: [zhwang@nuaa.edu.cn](mailto:zhwang@nuaa.edu.cn)

收稿日期: 2009-07-13; 接受日期: 2009-09-14

国家杰出青年科学基金(批准号: 10825207)、国家自然科学基金重点项目(批准号: 10532050)和全国优秀博士学位论文作者专项基金(编号: 200430)资助项目

**摘要** 我们讨论了两部分内容: 含分数阶导数阻尼的单自由度线性振动系统的稳定性和受分数阶状态反馈控制的线性振动系统的闭环稳定性. 首先从稳定性分析的角度研究了线性振动系统的阻尼表示, 严格证明了介于 0 和 2 之间的任意分数阶导数项都可以起到阻尼作用. 进而又研究了采用分数阶控制器来调节线性振动系统的闭环稳定性, 给出了确定控制增益的一般步骤使闭环系统具有渐近稳定性, 得到了分数阶对稳定性增益区域的影响规律. 和经典的速度反馈只能调节阻尼的大小不同, 分数阶状态反馈不仅可以调节阻尼力, 也调节弹性恢复力. 稳定性切换是我们理论分析的主要思路和方法, 研究表明, 它是研究含分数阶导数动力系统稳定性的一种普遍有效的方法.

**关键词**

振动系统  
分数阶导数  
稳定性  
稳定性切换

具有质量  $m$ 、阻尼系数  $c$ 、弹性系数  $k$  的单自由度线性振动系统满足运动微分方程:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t), \quad (1)$$

其中  $y(t)$  表示位移,  $-c\dot{y}(t)$  为黏性阻尼力,  $-ky(t)$  是弹性恢复力,  $f(t)$  是外激励. 这个模型应用非常广泛, 是振动力学的基础. 1984 年, Bagley 和 Torvik<sup>[1]</sup> 在研究浸入 Newton 流体中的刚性板的运动时提出了如下含分数阶导数的力学模型:

$$A\ddot{y}(t) + B_0 D^{3/2} y(t) + Cy(t) = f(t), \quad (2)$$

其中  ${}_0 D^{3/2} y(t)$  是分数阶导数, 用于表征阻尼力. 正是由于 Bagley 和 Torvik 等人的系列工作<sup>[1-5]</sup>, 分数微积分引起了工程技术人员越来越多的关注, 特别是在

黏弹性理论<sup>[6-12]</sup>中得到了成功的应用. 分数阶导数与分数阶积分的最基本特征是记忆效应, 其演化与过去历史有关, 因而对描述具有记忆特征的阻尼材料(如磁流变液等)的本构关系是一种恰当的数学工具. 对 Bagley 和 Torvik 提出的力学模型作推广, 考察如下单自由度线性振动系统自由振动的微分方程:

$$m\ddot{y}(t) + c_0 D^\alpha y(t) + ky(t) = 0, \quad (3)$$

其中  $m, c, k$  仍分别代表质量、“阻尼系数”和弹性系数. 分数阶导数有多种定义<sup>[13-15]</sup>, 其中 Riemann-Liouville 分数阶导数、Caputo 分数阶导数是两种应用最广泛的定义, 前者对求分数阶导数的函数的要求低, 因而广泛应用于问题的描述; 后者由于其 Laplace 变换公式和整数阶导数的 Laplace 变换公式具有相同的形式,

**引用格式:** 王在华, 胡海岩. 含分数阶导数阻尼的线性振动系统的稳定性. 中国科学 G 辑, 2009, 39(10): 1495—1502

Wang Z H, Hu H Y. Stability of a linear oscillator with damping force of fractional-order derivative. Sci China Ser G, doi: 10.1007/s11433-009-0291-y

因而在控制理论中广泛采用. 本文研究分数阶线性振动系统的稳定性, 采用 Caputo 分数阶导数定义是合适的. 对于实数  $\alpha$ , 记  $[\alpha]$  为不超过  $\alpha$  的最大整数,  $m = [\alpha] + 1$ , 则函数  $x(t)$  的  $\alpha$  阶 Caputo 导数为

$${}_0 D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - m)} \int_0^t \frac{x^{(m)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha + 1 - m}}, \quad (4)$$

其中  $\Gamma(z)$  为 Gamma 函数, 定义为

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (\operatorname{Re}(z) > 0),$$

满足  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ . 对方程作无量纲化处理, 令

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad t = \omega t', \quad x(t') = y(\omega t'), \quad \mu = c\omega^\alpha/k,$$

为方便起见, 仍记  $t'$  为  $t$ , 那么上述微分方程简化为

$$\ddot{x}(t) + \mu {}_0 D^\alpha x(t) + x(t) = 0, \quad (\mu > 0), \quad (5)$$

若分数阶导数项具有阻尼力的耗散作用, 则系统(1)的总能量  $E = (\dot{x}^2 + x^2)/2$  应随着时间增大而逐渐衰减为零, 从而使平衡点  $x(t)=0$  (或者说, 方程的零解)渐近稳定. 当  $\alpha$  退化为 0 和 2 时, 该平衡点是临界稳定的. 因此, 我们要问: 当  $0 < \alpha < 2$  时, 系统(1)的平衡点是否对  $\mu > 0$  都具有渐近稳定性?

另一方面, 对于不稳定的振动系统, 或者对诸如机械臂等具有极弱阻尼的系统来说, 即使其平衡点是渐近稳定的, 也可能需要施加控制使闭环系统具有更好的稳定性或其它控制性能. 在各种控制策略中, PID 控制由于具有明确的物理意义、参数调整方便、实现简单、结果可靠等优点而成为众多技术领域的主导控制策略. 基于分数微积分的发展, Podlubny 提出了分数阶  $PI^\lambda D^\mu$  控制器理论<sup>[13]</sup>, 并得到了应用<sup>[13,16-20]</sup>. 这种控制器的主要优点是: 由整数阶的微分/积分器到分数阶的微分/积分器扩展了控制器设计的范围; 分数阶微分器具有记忆功能, 使得系统的历史信息对其现在和未来都产生影响, 因而可提高控制精度, 且对控制增益的变化有更好的鲁棒性. 文献<sup>[21]</sup>提出了分数阶差分状态反馈的概念, 并证明了分数(非整数)阶差分状态反馈控制具有最佳的稳定性. 若对单自由度线性振动系统

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\dot{x}(t) + x(t) = 0 \text{ (无量纲化方程),}$$

施加  $PD^\alpha$  反馈控制  $u = -\gamma x(t) - \mu {}_0 D^\alpha x(t)$ , 则闭环系

统的微分方程为

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\dot{x}(t) + x(t) = -\gamma x(t) - \mu {}_0 D^\alpha x(t), \quad (6)$$

以下将确定, 当  $0 < \alpha < 2$  时, 对哪些  $\gamma$  和  $\mu$  值, 闭环系统的平衡点是渐近稳定的?

方程(5)和(6)都是含分数阶导数的微分方程, 常被称为分数阶微分方程<sup>[13-15]</sup>. 对这类微分方程, 人们已经提出了 (Lyapunov 意义下) 稳定性的多种判据, 如特征根分析法<sup>[22,23]</sup>、轨道积分计算判别法<sup>[24,25]</sup>、Nuquist 图示法<sup>[26]</sup>等. 如果  $\mu$  的值或者  $\gamma$  与  $\nu$  的值给定, 那么这些稳定性条件很容易得到验证. 对于本文关心的问题,  $\mu$  或者  $\gamma$  与  $\nu$  是待定参数, 这些稳定性判据无法直接给出各参数的稳定性取值范围. 事实上, 这类问题也属于分数阶动力系统的鲁棒稳定性研究范畴, 目前结果还相当少<sup>[27]</sup>. 本文将采用稳定性切换思想分别解决上述两个问题.

## 1 振动系统的稳定性分析

当  $\alpha=1$  时, 方程(5)是经典单自由度线性振动系统的无量纲方程. 只要  $\mu > 0$ , 方程零解是渐近稳定的. 因此, 以下假定  $\alpha \neq 1$ , 研究方程(5)的渐近稳定性, 并给出物理解释.

### 1.1 基于稳定性切换的特征根分析

首先设  $\alpha$  为有理数:  $\alpha = k/n = k\beta$ , 且  $0 < \alpha < 2$ , 那么  $1 \leq k < 2n, k \neq n$ . 此时, 方程(5)可写成如下递归型分数阶微分方程:

$${}_0 D^{2n\beta} x(t) + \mu {}_0 D^{k\beta} x(t) + x(t) = 0. \quad (7)$$

按通常的做法, 对方程(7)作 Laplace 变换可得到形如  $s^{2n\beta} + \mu s^{k\beta} + 1 = 0$  的特征方程. 本文采用文献<sup>[28]</sup>中的做法, 定义分数阶指数函数:

$$\hat{e}_\beta^{\lambda t} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{j\beta}}{\Gamma(j\beta+1)} = E_\beta(\lambda t^\beta), \quad (8)$$

其中  $E_\beta(\lambda t^\beta)$  为 Mittag-Leffler 函数, 则

$${}_0 D^\beta \hat{e}_\beta^{\lambda t} = \lambda \hat{e}_\beta^{\lambda t},$$

假设分数阶微分方程(5)具有  $\hat{e}_\beta^{\lambda t}$  形式的特解, 那么  $\lambda$  必

是下述多项式  $p(\lambda)$  的根:

$$p(\lambda) = \lambda^{2n} + \mu \lambda^k + 1, \quad (9)$$

特征根  $s$  和  $\lambda$  之间的关系是  $\lambda = s^\beta$ . 以下称  $p(\lambda)$  为方程(5)或(7)的特征多项式(特征函数),  $p(\lambda)$  的根为方程(5)或(7)的特征根.

记  $\lambda_j, (j=1, 2, \dots, 2n)$  为  $p(\lambda)$  的所有根, 利用 Mittag-Leffler 函数的渐近公式<sup>[13]</sup>可以证明: 方程(5)的零解渐近稳定的充分必要条件是所有特征根皆满足<sup>[22~24, 26]</sup>:

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\beta\pi}{2} = \frac{\pi}{2n}. \quad (10)$$

很明显, 如果  $\mu$  的值给定, 那么条件(10)很容易得到验证. 然而, 本文中的  $\mu$  是未知参数, 要了解  $p(\lambda)$  的根是实根还是复根、有多少实根和复根、各根分布在什么地方等问题绝非易事, 难以直接检验条件(10). 本节采用稳定性切换思想来检验这个条件.

稳定性切换思想的关键是利用特征根  $\lambda$  对“阻尼系数” $\mu$  的连续依赖性. 事实上, 视特征根  $\lambda$  为  $\mu$  的函数, 由隐函数求导法则有

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = -\frac{\partial p}{\partial \mu} / \frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

于是, 只要  $\mu$  满足  $\partial p / \partial \lambda \neq 0$ , 即  $\lambda$  不是重根, 那么特征根  $\lambda$  不仅连续依赖  $\mu$ , 而且关于  $\mu$  是可导函数, 其导函数也是连续的. 当  $p(\lambda)$  有重根时, 由多项式结式理论知,  $p(\lambda)$  和  $p'(\lambda)$  的 Sylvester 结式必为零, 这是一个关于  $\mu$  的多项式方程  $S(\mu) = 0$ . 当  $S(\mu) = 0$  且  $p(\lambda)$  有重根时, 并不意味着特征根不连续, 只是对应的不同特征根曲线相交. 这表明, 在稳定性分析中, 不需要区别  $p(\lambda)$  是否有重根. 由于  $\lambda$  连续依赖  $\mu$ , 随着  $\mu$  的变化, 特征根由式(10)定义的复平面稳定性区域进入不稳定区域, 或者由不稳定区域进入稳定区域, 必须跨过稳定区域的边界:

$$\arg(\lambda) = \pm \frac{\pi}{2n}, \quad (11)$$

因此, 为确定方程(5)的零解稳定性, 令  $\lambda = re^{\pm i\pi/(2n)}$ , ( $r > 0, i^2 = -1$ ), 分离  $p(\lambda) = 0$  的实部与虚部得

$$\begin{cases} -r^{2n} + \mu r^k \cos \frac{k\pi}{2n} + 1 = 0, \\ \pm \mu r^k \sin \frac{k\pi}{2n} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

由于  $1 \leq k < 2n, k \neq n, r > 0$ , 所以方程(12)有解当且仅当  $\mu = 0$ . 这表明, 对所有  $\mu > 0$ , 方程(5)零解的稳定性保持不变.

当  $\mu = 0$  时, 由  $\lambda^{2n} = -1 = e^{i(\pi+2j\pi)}$  求得  $p(\lambda)$  的  $2n$  个根为

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \cos \frac{(2j+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(2j+1)\pi}{2n}, \\ \bar{\lambda}_j &= \cos \frac{(2j+1)\pi}{2n} - i \sin \frac{(2j+1)\pi}{2n}, \end{aligned}$$

其中  $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . 除了  $\lambda_0$  和  $\bar{\lambda}_0$  在稳定性区域边界外, 其余各根都在稳定性区域内, 因此, 只需确定当  $\mu$  由 0 变大到一个充分小的正数  $\varepsilon$  时,  $\lambda_0$  和  $\bar{\lambda}_0$  是否进入稳定性区域.

为此, 令  $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon(a + bi) + o(\varepsilon)$ , 那么由  $p(\lambda) = 0$  得

$$\begin{aligned} \lambda_0^{2n} + 2n\lambda_0^{2n-1}\varepsilon(a + bi) + o(\varepsilon), \\ + \varepsilon(\lambda_0^k + k\lambda_0^{k-1}\varepsilon(a + bi) + o(\varepsilon)) + 1 = 0, \end{aligned}$$

利用  $\lambda_0^{2n} + 1 = 0$ , 上式可简化为

$$2n\lambda_0^{2n-1}(a + bi) + \lambda_0^k \approx 0,$$

分离其实部和虚部可得关于  $a, b$  的线性方程组:

$$\begin{cases} 2n \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} a - 2n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n} b + \cos \frac{k\pi}{2n} = 0, \\ 2n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n} a + 2n \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} b + \sin \frac{k\pi}{2n} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

解之得

$$a = \frac{1}{2n} \cos \frac{(k+1)\pi}{2n}, \quad b = \frac{1}{2n} \sin \frac{(k+1)\pi}{2n}.$$

于是原来位于稳定区域边界上的根  $\lambda_0$  变为

$$\begin{aligned} \lambda &\approx \cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n} \\ &+ \frac{\varepsilon}{2n} \left( \cos \frac{(k+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(k+1)\pi}{2n} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

由  $\sin \frac{k\pi}{2n} > 0$  可知:

$$\sin \frac{(k+1)\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n} > \cos \frac{(k+1)\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{2n},$$

另外  $\cos \frac{\pi}{2n} > 0$ , 所以对充分小的正数  $\varepsilon$ , 特征根  $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon(a + bi) + o(\varepsilon)$  必满足稳定性条件:

$$\begin{aligned} |\arg(\lambda)| &\approx \arctan \frac{2n \sin \frac{\pi}{2n} + \varepsilon \sin \frac{(k+1)\pi}{2n}}{2n \cos \frac{\pi}{2n} + \varepsilon \cos \frac{(k+1)\pi}{2n}} \\ &> \arctan \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\cos \frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2n}, \end{aligned} \quad (15)$$

因此, 对所有  $\mu > 0$ , 稳定性条件(10)总是满足的, 从而方程(5)的零解是渐近稳定的.

如果  $\alpha$  为实数, 可取其为有理数序列的极限. 由于在有理数情形,  $\mu > 0$  保证了方程(5)零解的稳定性, 从而当  $0 < \alpha < 2$  且  $\mu > 0$  时, 方程(1)的零解是渐近稳定的.

## 1.2 物理解释

上述分析表明, 当  $0 < \alpha < 2$ ,  $\mu > 0$  时, 方程(5)的零解是渐近稳定的, 因而分数阶导数项  $-\mu {}_0 D^\alpha x(t)$  的确具有阻尼力的耗散作用, 使得线性振动系统的能量随时间增大而逐渐衰减为零.

事实上, 当  $0 < \alpha < 2$  时, 方程(5)的零解稳定性对所有  $\mu > 0$  保持一致, 因而只需考虑  $0 < \mu \ll 1$  的情形. 方程(5)描述的振动系统的能量函数为

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2,$$

对其求导得功函数:

$$\dot{E} = (\ddot{x} + x)\dot{x} = -\mu \dot{x} {}_0 D^\alpha x(t), \quad (16)$$

对于充分小的  $\mu > 0$ , 除一个相位差外, 方程(5)的解可表示为  $x(t) \approx A \sin t$ . 由短时间记忆原理<sup>[13]</sup>可知, 对充分大的时间  $t$  有:  ${}_0 D^\alpha x(t) \approx {}_\infty D^\alpha x(t)$ . 因此,

$${}_\infty D^\alpha \sin t = \sin \left( t + \frac{\alpha\pi}{2} \right),$$

$$\dot{E} \approx -\mu A^2 \cos t \sin \left( t + \frac{\alpha\pi}{2} \right), \quad (17)$$

这就是说, 功函数是一个慢变的周期函数, 因而可以在  $[0, 2\pi]$  内的平均值代替, 即

$$\begin{aligned} \dot{E} &\approx -\frac{\mu A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \sin \left( t + \frac{\alpha\pi}{2} \right) dt \\ &= -\frac{\mu A^2}{2} \sin \frac{\alpha\pi}{2}, \end{aligned} \quad (18)$$

当  $0 < \alpha < 2$  时皆有  $\dot{E} < 0$ , 因而系统能量随时间增大而逐渐衰减为零, 也就是说, 对充分小的  $\mu > 0$ , 方程(5)的零解是渐近稳定的.

## 2 振动控制系统的稳定性分析

本节我们研究在分数阶  $PD^\alpha$  控制  $u = -\gamma x(t) - \nu {}_0 D^\alpha x(t)$ ,  $0 < \alpha < 2$ , 作用下闭环系统(6)的零解稳定性, 其中对无控制时系统的稳定性没有要求, 即其中的阻尼系数  $2\xi$  可以取负数.

### 2.1 闭环系统稳定性

在分数阶  $PD^\alpha$  控制  $u = -\gamma x(t) - \nu {}_0 D^\alpha x(t)$  作用下, 闭环系统方程为

$$\ddot{x}(t) + 2\xi \dot{x}(t) + x(t) = -\gamma x(t) - \nu {}_0 D^\alpha x(t). \quad (19)$$

此系统方程可转化为如下递归型分数阶微分方程:

$$\begin{aligned} {}_0 D^{2n\beta} x(t) + 2\xi {}_0 D^{n\beta} x(t) + \nu {}_0 D^{k\beta} x(t) \\ + (1 + \gamma)x(t) = 0, \quad (1 \leq k < 2n, k \neq n), \end{aligned} \quad (20)$$

对应的特征多项式为

$$p(\lambda) = \lambda^{2n} + 2\xi \lambda^n + \nu \lambda^k + 1 + \gamma, \quad (21)$$

方程(19)的零解处于临界稳定的条件是

$$|\arg(\lambda)| = \frac{\pi}{2n}. \quad (22)$$

因此, 同样令  $\lambda = re^{\pm i\pi/(2n)}$ , ( $r > 0$ ), 分离  $p(\lambda) = 0$  的实部和虚部得到:

$$\begin{cases} -r^{2n} + \nu r^k \cos \frac{k\pi}{2n} + 1 + \gamma = 0, \\ \pm \left( 2\xi r^n + \nu r^k \sin \frac{k\pi}{2n} \right) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

所以  $p(\lambda) = 0$  有解的条件是如下方程:

$$r^{2n} + 2\xi r^n \cot \frac{k\pi}{2n} - 1 - \gamma = 0 \quad (24)$$

有正解. 记  $\Delta = \left( \xi \cot \frac{k\pi}{2n} \right)^2 + (1 + \gamma)$ , 由二次代数方程求根公式得

$$r^n = -\xi \cot \frac{k\pi}{2n} \pm \sqrt{\Delta},$$

因此,  $r$  取正数当且仅当下列条件之一成立:

(i)  $\Delta \geq 0$  且  $1 + \gamma > 0$ . 此时

$$r^n = -\xi \cot \frac{k\pi}{2n} + \sqrt{\Delta} > 0;$$

(ii)  $\Delta \geq 0$  且  $1 + \gamma < 0$  以及  $\xi \cot \frac{k\pi}{2n} < 0$ . 此时

$$r^n = -\xi \cot \frac{k\pi}{2n} - \sqrt{\Delta} > 0.$$

一旦得到  $r$  的一个正解, 由(23)式中的第二式即可得  $\nu$  的值:

$$\hat{\nu} = -\frac{2\xi r^{n-k}}{\sin \frac{k\pi}{2n}}. \quad (25)$$

由于  $r$  含有增益  $\gamma$ , 所以公式(25)式给出了临界增益对  $\gamma$  的一种显式依赖关系, 在  $(\gamma, \nu)$ -平面画出一条曲线将  $\gamma \geq -1$  或  $\gamma \geq -\left( \xi \cot \frac{k\pi}{2n} \right)^2 - 1$  定义的半平面

划分成若干区域, 在每个区域内, 闭环系统(19)平衡点的稳定性保持不变, 在其中任取一对增益值, 用数值方法即可检验相应的特征根是否都在稳定区域内, 从而确定在该区域内的稳定性.

如果  $0 < \alpha < 1$ ,  $1 + \gamma > 0$ , 则  $k < n$ . 由(25)式可知, 随着  $\gamma$  增大, 临界增益  $\hat{\nu}$  的值减小, 这表示稳定性

增益区域比 PD 控制的稳定性增益区域要扩大; 而当  $1 < \alpha < 2$  时,  $k > n$ , 于是随着  $\gamma$  增大 ( $1 + \gamma > 0$ ), 临界增益  $\hat{\nu}$  的值增大, 这表示稳定性增益区域比 PD 控制的稳定性增益区域要减小. 因此, 从稳定性增益区域大小的角度看, 宜采用  $PD^\alpha$  控制, 其中  $0 < \alpha < 1$ .

对反馈增益  $\gamma$  和  $\nu$ , 如果任意固定其中一个而让另一个变化, 则闭环系统(19)式平衡点的稳定性最多发生一次切换.

**例 1** 当  $\xi = 0.1$ ,  $\alpha = 1/2$  时, 闭环系统方程(19)为

$$\ddot{x}(t) + 0.2\dot{x}(t) + x(t) = -\gamma x(t) - \nu {}_0D^{1/2}x(t). \quad (26)$$

上式可写成如下递归型分数阶微分方程:

$${}_0D^{4\alpha}x(t) + 0.2{}_0D^{2\alpha}x(t) + \nu {}_0D^\alpha x(t) + (1 + \gamma)x(t) = 0,$$

其特征多项式为

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 0.2\lambda^2 + \nu\lambda + 1 + \gamma,$$

临界稳定的条件是  $|\arg(\lambda)| = \frac{\alpha\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ , 因此, 令

$\lambda = re^{\pm i\pi/4}$ , ( $r > 0$ ), 那么对应的方程(24)为

$$r^4 + 0.2r^2 - 1 - \gamma = 0, \quad (27)$$

此方程有正解当且仅当  $\Delta = 0.2^2 + 4(1 + \gamma) \geq 0$  且

$1 + \gamma > 0$ , 即  $\gamma > -1$ . 此时

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{-0.2 + \sqrt{0.2^2 + 4(1 + \gamma)}} > 0,$$

由方程(23)得临界增益值

$$\hat{\nu} = -0.2\sqrt{-0.2 + \sqrt{0.2^2 + 4(1 + \gamma)}}, \quad (\gamma > -1).$$

特别地, 当增益  $\gamma = 0$  时, 方程(27)唯一的正根为  $r = 0.9513$ , 对应地有唯一的增益值  $\hat{\nu} = -0.2691$ . 此时,  $p(\lambda)$  的 4 个根为

$$0.6727 \pm 0.6727i, \quad -0.6727 \pm 0.6727i,$$

方程零解处于临界稳定. 这就是说, 闭环系统对所有实数  $\nu < -0.2691$  和  $\nu > -0.2691$  都各自具有相同的稳定性.

当  $\nu = 0 > -0.2691$  时,  $p(\lambda)$  的根都在稳定区域中, 而当  $\nu = -1 < -0.2691$  时,  $p(\lambda)$  有一对共轭复根

$0.6939 \pm 0.4703i$  不在稳定区域中. 从而对所有  $\nu < -0.2691$ , 闭环系统的平衡点是不稳定的, 而当  $\nu > -0.2691$  时, 闭环系统的平衡点是渐近稳定的.

一般地, 如图 1 所示, 在  $(\gamma, \nu)$ -平面, 此函数的图像将平面分成两个区域, 其中曲线的上方与  $\gamma = -1$  的右方定义的区域含点  $(\gamma, \nu) = (0, 0)$ , 因而是稳定性区域, 即当  $(\gamma, \nu)$  在此区域取值时, 闭环系统(27)的平衡点是渐近稳定的, 而在其它区域取值时, 平衡点是不稳定的. 注意到, 如果采用经典 PD 控制, 则稳定性区域为  $\{(\gamma, \nu): \gamma > -1, \nu > -0.2\}$ . 与  $PD^\alpha$  控制的稳定性区域相比较, 该区域要小. 这表明, 采用  $PD^\alpha$  控制可以扩大控制增益的稳定性区域.

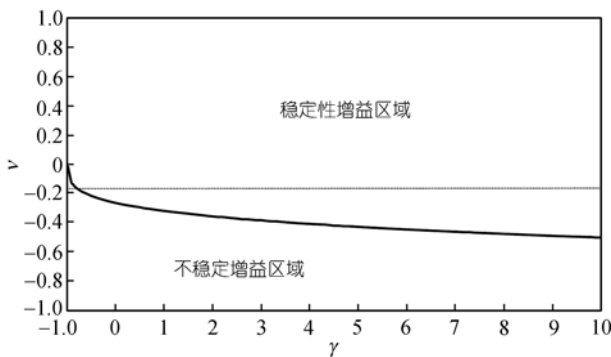


图 1 闭环系统(26)式的稳定性增益区域

和经典 PD 控制相比较, 稳定性区域增大了; 虚线为 PD 控制稳定性区域的下方边界

如果对  $\ddot{x}(t) + 0.2\dot{x}(t) + x(t) = 0$  实施反馈控制  $u = -\gamma x(t) - \nu_0 D^{3/2}x(t)$ , 则闭环系统为

$$\ddot{x}(t) + 0.2\dot{x}(t) + x(t) = -\gamma x(t) - \nu_0 D^{3/2}x(t). \quad (28)$$

记  $\alpha = 1/2$ , 则上述方程可写成如下递归型分数阶微分方程:

$${}_0D^{4\alpha}x(t) + \nu_0 D^{3\alpha}x(t) + 0.2 {}_0D^{2\alpha}x(t) + (1 + \gamma)x(t) = 0,$$

其特征多项式为

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \nu\lambda^3 + 0.2\lambda^2 + 1 + \gamma,$$

令  $\lambda = re^{\pm i\pi/4}$ , ( $r > 0$ ), 那么对应的方程(24)为

$$r^4 - 0.2r^2 - 1 - \gamma = 0,$$

此方程有正解当且仅当

$$(i) \quad \Delta = 0.2^2 + 4(1 + \gamma) \geq 0 \text{ 且 } 1 + \gamma > 0, \text{ 即 } \gamma > -1;$$

此时

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{0.2 + \sqrt{0.2^2 + 4(1 + \gamma)}} > 0,$$

$$\text{或}(ii) \quad \Delta = 0.2^2 + 4(1 + \gamma) \geq 0 \text{ 且 } 1 + \gamma < 0, \text{ 即 } -1.01 \leq$$

$\gamma < -1$ ; 此时

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{0.2 - \sqrt{0.2^2 + 4(1 + \gamma)}} > 0,$$

相应的临界增益  $\hat{\nu}$  的值为

$$\hat{\nu} = \begin{cases} -0.4 / \sqrt{0.2 + \sqrt{0.2^2 + 4(1 + \gamma)}}, & \gamma > -1, \\ -0.4 / \sqrt{0.2 - \sqrt{0.2^2 + 4(1 + \gamma)}}, & -1.01 < \gamma < -1. \end{cases}$$

如图 2,  $(\gamma, \nu)$ -平面上的临界曲线将平面分成两个区域, 其中该曲线的上方与  $\gamma = -1.01$  的右方定义的区域含点  $(\gamma, \nu) = (0, 0)$ , 因而是闭环系统(28)平衡点的稳定性区域(介于  $-1.01$  与  $-1$  之间的范围过小忽略了). 与采用 PD 控制的稳定性区域相比要小一些, 但区域边界变化不大.

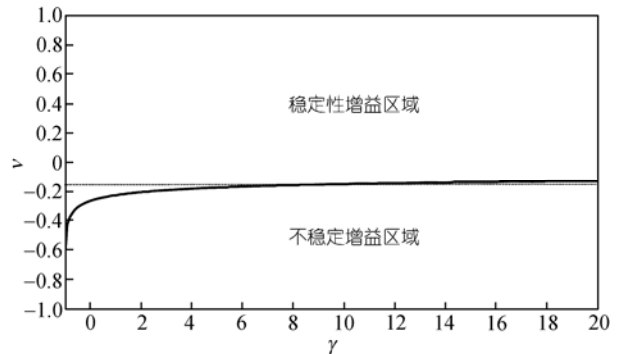


图 2 闭环系统(28)式的稳定性增益区域

和经典 PD 控制相比较, 稳定性区域有所减小; 虚线为 PD 控制稳定性区域的下方边界

## 2.2 稳定性增益区域变化的物理解释

在 2.1 节我们从数学上严格证明了, 对单自由度线性受控系统方程(19), 如果  $0 < \alpha < 1$ , 则除在原点附件外,  $PD^\alpha$  控制的稳定性增益区域比 PD 控制的稳

定性增益区域要大. 为了更好地理解这一结论, 下面试图给出物理解释. 由于  $0 < \alpha < 1$  和  $1 < \alpha < 2$  两种情况可类似处理, 下面仅讨论  $0 < \alpha < 1$  的情形.

事实上, 除相差一个相位角外, 线性振动方程 (19) 处于临界稳定时的稳态受扰运动具有形式  $x(t) = A \sin \omega t$ , 经典速度反馈

$$u_1(t) = -v \dot{x}(t) = -v A \omega \cos \omega t$$

是耗散力, 与系统阻尼力同相位, 故可直接调节系统的稳定性. 而对分数阶状态反馈  $u_\alpha(t) = -v_0 D^\alpha x(t)$ , 则对充分大的时间  $t$  有

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &\approx -v A \omega^\alpha \sin\left(\omega t + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ &= -v A \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} \sin \omega t - v A \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \omega t, \end{aligned} \quad (29)$$

这表明, 分数阶反馈控制  $u_\alpha(t)$  和经典速度反馈控制有本质的不同, 其中含  $\cos \omega t$  的项与系统阻尼力同相位, 可调节阻尼力的大小, 而含  $\sin \omega t$  的项与系统弹性恢复力同相位, 可调节弹性恢复力的大小. 进一步, 对分数阶  $PD^\alpha$  控制  $u(t) = -\gamma x(t) - v_0 D^\alpha x(t)$ , 对充分大的时间  $t$  有

$$\begin{aligned} u(t) &\approx -\gamma A \sin \omega t - v A \omega^\alpha \sin\left(\omega t + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \\ &= -\left(v A \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \gamma\right) \sin \omega t - v A \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \omega t, \end{aligned} \quad (30)$$

由于  $0 < \alpha < 1$ , 从而有

$$0 < \cos \frac{\alpha\pi}{2} < 1, \quad v A \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} < v A \omega. \quad (31)$$

于是, (i) 分数阶反馈  $u_\alpha(t)$  对系统稳定性的影响弱于经典速度反馈  $u_1(t)$ . 随着分数阶  $\alpha \rightarrow 0$ , 这种影响越来越弱; (ii) 由公式 (30) 可知, 在临界稳定情形, 增益  $\gamma$  的值越大, 使平衡点稳定的  $v$  值下界越小. 因此,  $PD^\alpha$  控制增益具有比 PD 控制增益更大的稳定区域.

### 3 关于稳定性切换的小结

从上面的分析可以看出, 稳定性切换思想是研究含分数阶导数的线性振动系统与线性振动控制系统稳定性的一种非常有效的方法. 该方法利用特征根对阻尼系数或反馈增益的连续性, 首先求出使特征根位

于复平面稳定性区域边界时应满足的条件. 在单参数情形, 由该条件可以确定所有临界参数值从而将参数区间划分成若干小区间, 在每个小区间内, 系统平衡点的稳定性保持不变; 而在两个参数的情形, 由临界稳定条件可将参数区域划分成若干个小区域, 在每个小区域内, 系统平衡点的稳定性是一致的. 此后, 可在每个小区间(域)内任取一点, 运用数值方法检验稳定性条件即可确定该区间(域)是否为稳定性区间(域).

稳定性切换思想也适合于形式非常广泛的分数阶动力系统的稳定性分析. 例如, 对含分数阶导数的三阶微分方程:

$$\ddot{x}(t) + \mu {}_0 D^{1/3} x(t) + x(t) = 0, \quad (32)$$

$$\ddot{x}(t) + \mu {}_0 D^{4/3} x(t) + x(t) = 0, \quad (33)$$

将其化为递归型分数阶微分方程分别为

$${}_0 D^{9\beta} x(t) + \mu {}_0 D^\beta x(t) + x(t) = 0,$$

$${}_0 D^{9\beta} x(t) + \mu {}_0 D^{4\beta} x(t) + x(t) = 0,$$

其中  $\beta = 1/3$ , 于是对应的特征多项式分别为  $\lambda^9 + \mu \lambda + 1 = 0$ ,  $\lambda^9 + \mu \lambda^4 + 1 = 0$ . 从而分数阶微分方程的零解为渐近稳定的充要条件是

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{6}, \quad (34)$$

运用稳定性切换方法容易得知: 方程 (32) 的零解对所有实数  $\mu$  是不稳定的; 而方程 (33) 的零解对所有  $\mu < 1.567$  不稳定, 但对  $\mu > 1.567$  具有渐近稳定性.

### 4 结论

对于单自由度线性振动系统, 本文采用稳定性切换思想研究了由分数阶导数描述的阻尼项的耗散作用和受分数阶  $PD^\alpha$  控制作用的闭环系统的稳定性, 得到了如下结论:

(i) 当  $0 < \alpha < 2$  时, 分数阶导数项  $-\mu {}_0 D^\alpha x(t)$  对所有  $\mu > 0$  都具有阻尼力的耗散作用, 使得该线性振动系统唯一的平衡点是渐近稳定的. 这就是说, 系统振动仍然可以看作是外激励、阻尼力和弹性恢复力联合作用下的运动.

(ii) 分数阶状态反馈和经典的速度反馈有本质的不同, 它不仅可以调节线性振动系统阻尼力的大小, 还可以调节弹性恢复力的大小. 对单自由度线性系统采用  $PD^\alpha$  反馈控制, 如果  $0 < \alpha < 1$  时, 则闭环系统的稳定性增益区域比 PD 控制的稳定性增益区域要扩大; 而当  $1 < \alpha < 2$  时, 闭环稳定性增益区域比 PD

控制对应的稳定性增益区域要减小.

(iii) 稳定性切换方法是研究分数阶动力系统稳定性的一种普遍有效的方法, 其应用前提是特征根连续依赖控制参数. 本文将稳定性切换思想创新性地应用于复平面稳定性区域为角形区域的动力系统的稳定性分析.

## 参考文献

- 1 Bagley R L, Torvik P J. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *J Appl Mech*, 1984, 51(4): 294—298 [\[DOI\]](#)
- 2 Bagley R L, Torvik P J. Fractional calculus—A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA J*, 1983, 21(5): 741—748 [\[DOI\]](#)
- 3 Bagley R L, Torvik P J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *J Rheol*, 1983, 27(3): 201—220 [\[DOI\]](#)
- 4 Bagley R L, Torvik P J. Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA J*, 1985, 23(6): 918—925 [\[DOI\]](#)
- 5 Bagley R L. Power law and fractional calculus model of viscoelasticity. *AIAA J*, 1989, 27(10): 1412—1417 [\[DOI\]](#)
- 6 Ingman D, Suzdalnitsky J. Application of dynamic fractional differentiation to the study of oscillating viscoelastic medium with cylindrical cavity. *ASME J Vib Acoustics*, 2002, 124(4): 642—645 [\[DOI\]](#)
- 7 Heymans N. Fractional calculus description of non-linear viscoelastic behavior of polymers. *Nonlinear Dyn*, 2004, 38(1-4): 221—231 [\[DOI\]](#)
- 8 Adolfsson K. Nonlinear fractional order viscoelasticity at large strains. *Nonlinear Dyn*, 2004, 38(1-4): 233—246 [\[DOI\]](#)
- 9 Koeller R C. Toward an equation of state for solid materials with memory by use of the half-order derivative. *Acta Mech*, 2007, 191(3-4): 125—131 [\[DOI\]](#)
- 10 同登科, 王瑞和. 分形油藏非 Newton 黏弹性液分数阶流动分析. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2004, 34(1): 87—101
- 11 同登科, 王瑞和, 杨河山. 管内非 Newton 流体分数阶流动的精确解. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2005, 35(3): 318—326
- 12 徐明瑜, 谭文长. 中间过程、临界现象—分数阶算子理论、方法、进展及其在现代力学中的应用. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2006, 36(3): 225—238
- 13 Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. San Diego: Academic Press, 1999
- 14 Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006
- 15 Das S. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Berlin: Springer-Verlag, 2008
- 16 Monje C A, Calderon A J, Vinagre B M, et al. On fractional  $PI^\lambda$  controllers: Some tuning rules for robustness to plant uncertainties. *Nonlinear Dyn*, 2004, 38(1-2): 369—381 [\[DOI\]](#)
- 17 Manabe S. A suggestion of fractional-order controller for flexible spacecraft attitude control. *Nonlinear Dyn*, 2004, 29(1-4): 251—268 [\[DOI\]](#)
- 18 Lazarevic M P. Finite time stability of  $PD^\alpha$  fractional control of robotic time-delay systems. *Mech Res Commun*, 2006, 33(2): 269—279 [\[DOI\]](#)
- 19 Xue D, Zhao C, Chen Y. Fractional order PID control of a DC-motor with elastic shaft: a case study. *Am Control Conference*, 2006, doi: 10.1109/ACC.2006.1657207
- 20 Cervera J, Banos A, Monje C A, et al. Turning of fractional PID controllers by using QFT. *IEEE*, 2006, doi: 10.1109/IECON.2006.348131
- 21 Wang Z H, Zheng Y G. The optimal form of the fractional-order difference feedbacks in enhancing the stability of a SDOF vibration system. *J Sound Vib*, 2009, 326(3-5): 476—488 [\[DOI\]](#)
- 22 Radwan A G, Soliman A M, Elwakli A S, et al. On the stability of linear systems with fractional-order elements. *Chaos Solitons Fractals*, 2009, 40(5): 2317—2328 [\[DOI\]](#)
- 23 Mohammad S T, Mohammad H. A note on the stability of fractional order systems. *Math Comput Simul*, 2009, 79(5): 1566—1576 [\[DOI\]](#)
- 24 Farshad M B, Masoud K G. An efficient numerical algorithm for stability testing of fractional-delay systems. *ISA Trans*, 2009, 48(1): 32—37 [\[DOI\]](#)
- 25 Hwang C, Cheng Y C. A numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems. *Automatica*, 2006, 42(5): 825—831 [\[DOI\]](#)
- 26 王振滨, 曹广益, 朱新坚. 分数阶线性定常系统的稳定性及其判据. *控制理论与应用*, 2004, 21(6): 922—926
- 27 Chen Y Q, Ahn H S, Podlubny I. Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties. *Signal Proc*, 2006, 86(10): 2611—2618 [\[DOI\]](#)
- 28 Bonilla B, Rivero M, Trujillo J J. Linear differential equations of fractional orders. In: Sabatier J, Agrawal O P, Tenreiro Machado J A, eds. *Advances in Fractional Calculus*. Dordrecht: Springer, 2007. 77—91