关于Kerr-Sen黑洞隧穿辐射的新改进研究

赵欢¹, 吴双清¹, 吴迪^{1,2*}

1. 西华师范大学物理与空间科学学院, 南充 637002;

2. 湖南师范大学物理与信息科学学院, 长沙 410081

*联系人, E-mail: wdcwnu@163.com

收稿日期: 2018-03-07; 接受日期: 2018-04-04; 网络出版日期: 2018-05-02

国家自然科学基金(编号: 11675130)资助项目

摘要 本文首先采用Euler-Lagrange变分原理, 由有质量带电粒子的经典作用量出发, 在一般(非拖曳)坐标系下对Kerr-Sen转动黑洞中的类时和类光测地线方程作了新的统一推导, 然后采用Parikh-Wilczek建议的半经典隧穿方法, 对有质量带电粒子在Kerr-Sen黑洞视界附近的隧穿辐射重新做了研究, 并给出了其隧穿几率. 研究表明该转动黑洞的隧穿辐射不再局限于使用拖曳坐标系.

关键词 Kerr-Sen黑洞, 测地线方程, 隧穿辐射

PACS: 04.70.Dy, 97.60.Lf

1 引言

1974年, Hawking^[1]通过考察一颗恒星在塌缩形成黑洞过程中的量子效应, 从理论上证明了黑洞在其视界附近会发出理想的黑体热辐射, 这通常被称为Hawking辐射. 该热效应的发现表明黑洞温度是一个真实的量子温度, 其视界面积的确具有热力学熵的涵义. 这使得黑洞的四个力学定律建立在更加牢固的理论基础之上, 不再被认为仅仅是通常热力学系统四个定律的形式类比. 黑洞热辐射既可以用量子力学的隧穿效应, 也可以用量子场论的真空涨落机制来解释. Hawking辐射是广义相对论、量子力学和热力学相结合的一个里程碑式的重要理论发现.

继Hawking完成最初的理论推导之后, 人们提出了各种推导Hawking辐射的不同方法. 特别值得一提的是, Parikh和Wilczek^[2,3]于2000年提出了一种基于量子力学的半经典隧穿方法, 在考虑能量守恒和时空背景有几何涨落的情形下对Schwarzschild黑洞视界附近无质量粒子的Hawking辐射做了研究, 给出了黑洞辐射的隧穿几率, 表明黑洞隧穿辐射偏离了理想的黑体辐射谱, 提出了解决黑洞信息丢失的一种可能途径. 随后, 人们用这种方法对静态球对称带电黑洞中有质量粒子的隧穿辐射做了相应的研究^[4]并推广到转动(带电)黑洞的情形, 例如: Kerr^[5,6], Kerr-Newman^[7-9], Kerr-Sen^[10,11]和Einstein-Maxwell-dila-

引用格式: 赵欢, 吴双清, 吴迪. 关于Kerr-Sen黑洞隧穿辐射的新改进研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 060401
Zhao H, Wu S Q, Wu D. An improved research on tunneling radiation from the Kerr-Sen black hole (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 060401, doi: [10.1360/SSPMA2018-00059](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00059)

ton-axion (EMDA) [12] 黑洞.

如何推导出各种粒子的测地线方程, 在研究(转动)黑洞的隧穿辐射中扮演一个首当其冲的重要角色, 它将直接影响到对黑洞视界附近处出射粒子的隧穿几率计算的数学复杂程度. 另一方面, 采用原始的Parikh-Wilczek半经典隧穿方法研究隧穿辐射时, 局部坐标系的选择也至关重要, 人们通常采用类似于Painlevé-Gullstrand坐标系. 对于转动黑洞而言, 并非所有的已知解都已被给出相应的类Painlevé-Gullstrand坐标形式. 此外, 在先前研究转动黑洞隧穿辐射的几乎所有工作中, 还需要进一步作拖曳坐标变换到与黑洞共转动的拖曳坐标系中. 这就是说, 研究转动黑洞隧穿辐射似乎必须在拖曳坐标系下才能完成相应的计算工作, 这一点让人感到很不舒服. 因为广义协变性原理要求物理规律在任意坐标变换下保持形式不变, 依据这一原理可以断定物理规律不应依赖于具体坐标系的选择. Hawking 辐射是黑洞的一个普适的量子效应, 对其研究不应局限于选择何种具体的坐标系. 因此, 我们有理由相信在一般的非拖曳坐标系中研究黑洞隧穿辐射应该而且完全可以得到与采用拖曳坐标系时得到的结果相同.

对于无质量(类光)和有质量粒子的测地线方程, 文献[4-12]分别采用线元 $ds^2 = 0$ 和群速度与相速度的关系式 $v_p = v_g/2$ 来进行相关的数学推导. 然而, 业已熟知的一个事实是, 类时和类光测地线方程都可以利用变分原理对Lagrangian作用量作最小变分得到 [13]. 由此可知, 先前的工作在推导有质量粒子测地线方程时所采用的方法($v_p = v_g/2$)是与最小作用量变分原理相悖的. 2013年, 吴迪等人在文献[14]中利用Doran给出的Kerr解新形式 [15], 采用Lagrange力学中的变分原理分别在一般非拖曳坐标系和拖曳坐标系中对有质量和无质量粒子的测地线方程做了统一的推导, 并重新对Kerr黑洞隧穿辐射做了讨论, 其结果表明对黑洞辐射的研究不再局限于拖曳坐标系. 随后, 又将上述工作推广到Kerr-Newman黑洞的情形, 对有质量带电粒子的隧穿辐射做了新的研究 [16]. 2014年, 文献[17]利用上述工作建议的改进方法对共形引力理论中转动AdS黑洞的隧穿辐射做了相应的讨论. 文献[18, 19]也采用同种思想对静态球对称黑洞的隧穿辐射做了相关的工作.

本文拟将这种改进的方法推广到转动带电Kerr-Sen黑洞 [20] 中, 对其视界附近的有质量带电粒子的隧穿辐射进行新的研究. 与Einstein-Maxwell理论中转动带电的Kerr-Newman黑洞相比较, Kerr-Sen黑洞和Kerr-Newman黑洞两者之间既有许多非常相似的物理性质, 也有许多显著不同之处(参见文献[21, 22] 及所引文献). 例如: Kerr-Sen黑洞是四维低能有效(杂化)弦理论的一个精确黑洞解, 它是非真空的、非代数特殊解; 除度规以外, 该解还包含3个非引力场: 1个反对称三阶张量场(或作对偶后的轴子赝标量场)、1个Abel矢量场和1个膨胀子标量场, 矢量场和标量场之间存在着非平凡的耦合. Kerr-Newman黑洞解是Einstein-Maxwell理论的电真空解, 按照Petrov-Pirani分类, 它属于D-型代数特殊解, 而Kerr-Sen黑洞解则属于I-型解 [23]. 已有的研究表明, Kerr-Sen黑洞在几何特征上类似于Kerr黑洞 [24], 但其量子热性质和热力学四个定律却与Kerr-Newman黑洞非常相似 [25]. 最近的研究工作还表明, 两者在带电有质量标量场束缚态的不稳定性和散射过程的CFT₂全息对偶上有许多相似的性质; 而两者的突出差别体现为: 引磁比不一样, 散射光子的俘获区域有特征性的差异, 黑洞蒸发过程的发射几率和隐共形对称性存在明显差异, 等等(参见文献[21, 22]及所引文献).

既然Kerr-Sen黑洞与Kerr-Newman黑洞有许多惊人相似的性质, 比如两者具有明显相似的度规表示, 人们自然期望Kerr-Sen黑洞的隧穿辐射与Kerr-Newman情形也有相似之处. 因此, 有必要将先前对Kerr-Newman 黑洞的隧穿辐射研究 [14, 16]推广到Kerr-Sen黑洞情形. 先前的工作 [10-12]对此类转动黑洞隧穿辐射的研究不仅采用群速度与相速度的关系式 $v_p = v_g/2$ 推导有质量粒子的测地线方程, 而且需要在拖曳坐标系中完成相关的计算. 需要指出的是, 这些工作也没有给出Kerr-Sen黑洞解的正确的类Painlevé-Gullstrand坐标表示. 本文的工作明显克服了这些不太令人满意的缺陷.

在第2节中, 我们首先作坐标变换得到Kerr-Sen黑洞解的新的类Painlevé-Gullstrand坐标形式, 然后在一般(非拖曳)坐标系下从有质量带电粒子的经典Lagrangian作用量出发, 利用Euler-Lagrange 变分

原理和3个守恒的积分常数推导出有质量带电粒子的测地线方程; 第3节采用Parikh-Wilczek半经典隧穿方法, 在一般的非拖曳坐标系中考虑自引力修正以及电磁的相互作用研究了Kerr-Sen黑洞中有质量带电粒子的隧穿辐射, 并给出了隧穿几率. 在结语中, 我们指出本项工作可直接推广到EMDA理论的一般转动双荷带电黑洞解^[26,27]情形.

2 Kerr-Sen黑洞解的新度规形式和有质量带电粒子的测地线方程

2.1 Kerr-Sen度规的新形式

1992年, Sen^[20]以Kerr黑洞作为种子解, 利用解生成技术得到一种新的四维转动带电黑洞解, 通常被称为Kerr-Sen黑洞, 它是四维低能有效(杂化)弦理论的一个精确黑洞解. 其Bose部分包含度规、膨胀子(Dilaton)标量场、Abel矢量场强 $F = dA$ 和3-形式场强 $H = dB - A \wedge F$ 构成. 由关系式 $H = -e^{2\phi} \star d\chi$ 作对偶后得到包含轴子(Axion)赝标量场的理论习惯上又被称为EMDA理论. 该理论的Lagrangian作用量可写为如下两种不同的等价形式:

$$\mathbb{L} = \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}e^{-\phi}F^2 - \frac{1}{12}e^{-2\phi}H^2 \right] \quad (1a)$$

$$= \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}e^{2\phi}(\partial\chi)^2 - \frac{1}{2}e^{-\phi}F^2 \right] - \frac{\chi}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}. \quad (1b)$$

采用Boyer-Lindquist坐标后, Kerr-Sen黑洞解可以由下述各式给出^[24,25]:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma}(d\tilde{t} - a \sin^2 \theta d\tilde{\varphi})^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma}[a d\tilde{t} - (r^2 + 2br + a^2)d\tilde{\varphi}]^2, \quad (2)$$

$$A = \frac{Qr}{\Sigma}(d\tilde{t} - a \sin^2 \theta d\tilde{\varphi}), \quad \phi = \ln\left(\frac{\Sigma - 2br}{\Sigma}\right), \quad (3)$$

$$B = \frac{2bra \sin^2 \theta}{\Sigma}d\tilde{t} \wedge d\tilde{\varphi}, \quad \chi = \frac{2ba \cos \theta}{\Sigma - 2br}, \quad (4)$$

其中,

$$\Delta = r^2 + 2(b - M)r + a^2 = (r - r_+)(r - r_-),$$

$$\Sigma = r^2 + 2br + a^2 \cos^2 \theta.$$

在上述各式中, 参数 $b = Q^2/(2M)$, M 和 Q 为分别是黑洞的质量和电荷, 其角动量为 $J = Ma$.

对于如下将要研究的Kerr-Sen黑洞隧穿辐射问题, 只需关心该黑洞解的线元和电磁四矢势. 为了消除其视界处的表观坐标奇异性, 需要完成适当的坐标变换. 仿照文献^[9], 这里先引入如下坐标变换:

$$d\tilde{t} = dt - \frac{\sqrt{2Mr} \sqrt{r^2 + 2br + a^2}}{\Delta} dr, \quad (5a)$$

$$d\tilde{\varphi} = d\varphi - \frac{a \sqrt{2Mr}}{\Delta \sqrt{r^2 + 2br + a^2}} dr, \quad (5b)$$

然后, 再对电磁势作一规范变换消除其径向分量, 便得到该黑洞解的一种新的类Painlevé-Gullstrand坐标形式, 其线元和电磁四矢势的新形式如下所示:

$$ds^2 = \left[\frac{\sqrt{2Mr}}{\sqrt{\Sigma}}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi) + \frac{\sqrt{\Sigma} dr}{\sqrt{r^2 + 2br + a^2}} \right]^2 - dt^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + 2br + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (6)$$

$$A = \frac{Qr}{\Sigma}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi), \quad (7)$$

其优越性在于已完全消除了视界的坐标奇异性, 该线元描述的黑洞时空是一般的非拖曳坐标系.

2.2 有质量带电粒子的测地线方程

在一般的转动带电Kerr-Sen黑洞时空中, 有质量带电粒子的测地线方程至少存在3个守恒的积分常数^[13], 它们可以由经典Lagrangian作用量变分求出. 利用这3个守恒的积分常数可以推导出类时测地线方程. 其中, 根据类时测地线的四速度归一化条件, 可令Hamiltonian为一个守恒量, 即 $\mathcal{H} = \frac{m_0}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$. 另外两个守恒量分别为与Killing矢量 ∂_t 和 ∂_φ 对应的能量 E 和角动量 L .

下面, 我们首先将从度规(6)出发, 在一般的非拖曳坐标系中推导出有质量带电粒子的测地线方程. 考虑一个质量为 m_0 和电荷为 q 的粒子的经典作用量:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m_0}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + qA_\alpha\dot{x}^\alpha \\ &= \frac{m_0}{2} \left\{ -\dot{t}^2 + \Sigma\dot{\theta}^2 + (r^2 + 2br + a^2)\sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\sqrt{2Mr}}{\sqrt{\Sigma}}(\dot{t} - a \sin^2 \theta \dot{\varphi}) + \frac{\sqrt{\Sigma}\dot{r}}{\sqrt{r^2 + 2br + a^2}} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{qQr}{\Sigma}(i - a \sin^2 \theta \dot{\varphi}), \quad (8)$$

由 $P_\alpha = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}^\alpha$ 得到如下广义动量的各分量:

$$P_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = m_0 \left[-i + \frac{2Mr}{\Sigma}(i - a \sin^2 \theta \dot{\varphi}) + \frac{\sqrt{2Mr\dot{r}}}{\sqrt{r^2 + 2br + a^2}} \right] + \frac{qQr}{\Sigma} \equiv E, \quad (9a)$$

$$P_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m_0 \left[(r^2 + 2br + a^2) \dot{\varphi} - \frac{2Mra}{\Sigma}(i - a \sin^2 \theta \dot{\varphi}) - \frac{a\sqrt{2Mr\dot{r}}}{\sqrt{r^2 + 2br + a^2}} \sin^2 \theta - \frac{qQra}{\Sigma} \sin^2 \theta \right] \equiv L, \quad (9b)$$

$$P_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m_0 \left[\frac{\sqrt{2Mr}}{\sqrt{r^2 + 2br + a^2}}(i - a \sin^2 \theta \dot{\varphi}) + \frac{\Sigma \dot{r}}{r^2 + 2br + a^2} \right], \quad (9c)$$

$$P_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m_0 \Sigma \dot{\theta}, \quad (9d)$$

其中, t 和 φ 是两个循环坐标, 对应的两个守恒积分常数分别 $P_t = E$ 和 $P_\varphi = L$.

经过Legendre变换, 可求得有质量带电粒子的Hamiltonian为

$$\mathcal{H} = \dot{x}^\alpha P_\alpha - \mathcal{L} = \frac{m_0}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{m_0}{2} \left\{ \left[\frac{\sqrt{2Mr}}{\sqrt{\Sigma}}(i - a \sin^2 \theta \dot{\varphi}) + \frac{\sqrt{\Sigma} \dot{r}}{\sqrt{r^2 + 2br + a^2}} \right]^2 \right.$$

$$\left. - \dot{t}^2 + \Sigma \dot{\theta}^2 + (r^2 + 2br + a^2) \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right\}. \quad (10)$$

由类时测地线的四速度归一化条件可得到一个运动常数 $\mathcal{H} = -m_0 k/2$. 由这三个积分常数($E, L, \mathcal{H}$)构成的方程组可以求解得到广义速度:

$$\dot{r} = \pm \frac{\sqrt{W}}{m_0 \Sigma}, \quad (11)$$

$$\dot{t} = \frac{1}{m_0 \Sigma \Delta} \left\{ - (r^2 + 2br + a^2) [(r^2 + 2br + a^2)E + aL - qQr] + a\Delta(L + Ea \sin^2 \theta) \pm \sqrt{(r^2 + 2br + a^2)2MrW} \right\}, \quad (12)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{m_0 \Sigma \Delta} \left\{ - a[(r^2 + 2br + a^2)E + aL - qQr] + \frac{\Delta}{\sin^2 \theta} (L + Ea \sin^2 \theta) \pm a \frac{\sqrt{2MrW}}{\sqrt{r^2 + 2br + a^2}} \right\}, \quad (13)$$

式中,

$$W = [(r^2 + 2br + a^2)E + aL - qQr]^2 - \frac{\Delta}{\sin^2 \theta} (L + Ea \sin^2 \theta)^2 - \Delta(m_0^2 k \Sigma + P_\theta).$$

由(11)–(13)式, 可得到在一般的非拖曳坐标系中的类时测地线方程为

$$\bar{r} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = \Delta \left\{ \sqrt{(r^2 + 2br + a^2)2Mr} \pm \frac{-(r^2 + 2br + a^2)[(r^2 + 2br + a^2)E + aL - qQr] + a\Delta(L + Ea \sin^2 \theta)}{\sqrt{W}} \right\}^{-1}, \quad (14)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = \left\{ - a[(r^2 + 2br + a^2)E + aL - qQr] + \frac{\Delta}{\sin^2 \theta} (L + Ea \sin^2 \theta) \pm a \sqrt{\frac{2MrW}{r^2 + 2br + a^2}} \right\} \times \left\{ - (r^2 + 2br + a^2)[(r^2 + 2br + a^2)E + aL - qQr] + a\Delta(L + Ea \sin^2 \theta) \pm \sqrt{(r^2 + 2br + a^2)2MrW} \right\}^{-1}, \quad (15)$$

其中, $\pm$ 号分别对应于事件视界处入射和出射的情形.

其次, 我们考察出射粒子的测地线在Kerr-Sen黑洞外视界附近的渐近行为. 在视界附近,

(14)和(15) 两式的渐近形式如下:

$$\bar{r} = \frac{dr}{dt} \xrightarrow{r \rightarrow r_+} \kappa(r - r_+), \quad (16)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \xrightarrow{r \rightarrow r_+} \Omega,$$

其中, 外视界的表面引力、角速度和静电势分别为

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + 2br_+ + a^2)}, \quad \Omega = \frac{a}{r_+^2 + 2br_+ + a^2},$$

$$\Phi = \frac{Qr_+}{r_+^2 + 2br_+ + a^2} = \frac{Q}{2M}.$$

至此, 我们已采用Kerr-Sen度规的新的类Painlevé-Gullstrand坐标表示(6)并在一般(非拖曳)坐标系下统一地推导出该时空中有质量带电粒子的测地线方程(当取 $k \rightarrow 0$ 的无质量极限, 可自然地得到类光测地线方程).

需要指出的是, 人们也完全可以直接使用Kerr-Sen线元的Boyer-Lindquist坐标表示(2)来导出相应的类时测地线方程. 与Boyer-Lindquist坐标表示(2)相比, 新的类Painlevé-Gullstrand坐标表示(6)完全消除了黑洞事件视界处的坐标奇异性. 在接下来的工作中, 我们将采用Kerr-Sen黑洞新的类Painlevé-Gullstrand坐标形式(6)而不使用其Boyer-Lindquist坐标形式(2)来研究该转动带电黑洞的隧穿辐射, 这是因为采用Boyer-Lindquist坐标系来计算隧穿几率时会产生潜在的“因子2”的问题^[28,29], 而采用Painlevé-Gullstrand坐标系则不会出现此问题.

3 事件视界处粒子的隧穿几率

接下来, 我们将采用Parikh-Wilczek半经典隧穿方法, 在一般的非拖曳坐标系中计算出有质量带电粒子在Kerr-Sen黑洞外视界附近辐射的隧穿几率. 该方法是一种基于量子力学中隧穿图像的研究Hawking辐射的半经典半量子方法. 按照这一图像, 若在黑洞外视界内产生出一对正能粒子和负能粒子, 其中正能粒子将通过隧穿效应从黑洞外视界逃离至无穷远处, 而负能粒子则被黑洞吸收. 由于有粒子隧穿出黑洞, 黑洞的外视界面会发生收缩, 收缩前后的视界半径 r_i 和 r_f 对应于隧穿势垒的两个转折点. 根据能量守恒、角动量守恒和电荷守恒三个定律, 考虑到有质量带电粒子间的电磁的相互作用和自引力修正, 我们假定时空的总能量、总角动量和总电荷均保持不变而允许黑洞的质量、角动量和电荷有较小的涨落. 当黑洞辐射出能量为 $\omega = m_0$ 和电荷为 q 的粒子后, 其质量、角动量和电荷将分别变

为 $M - \omega$, $(M - \omega)a$ 和 $Q - q$, 与此相应的时空线元和电磁四矢势变为

$$d\hat{s}^2 = -dt^2 + \left[\frac{\sqrt{2(M-\omega)r}}{\sqrt{\hat{\Sigma}}} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi) + \frac{\sqrt{\hat{\Sigma}} dr}{\sqrt{r^2 + 2\hat{b}r + a^2}} \right]^2 + \hat{\Sigma} d\theta^2 + (r^2 + 2\hat{b}r + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (17)$$

$$\hat{A} = \frac{(Q-q)r}{\hat{\Sigma}} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi), \quad (18)$$

式中, $\hat{\Sigma} = r^2 + 2\hat{b}r + a^2 \cos^2 \theta$, $\hat{b} = \frac{(Q-q)^2}{2(M-\omega)}$.

在文献[20]中, Sen通过引入一个电荷参数 α 给出黑洞的质量、电荷和角动量分别为

$$M = \frac{m(1 + \cosh \alpha)}{2}, \quad Q = \frac{m \sinh \alpha}{\sqrt{2}}, \quad J = Ma.$$

由此可知, $m = M - b = M - Q^2/(2M)$, $a = J/M$, $\sinh \alpha = 2\sqrt{2}MQ/(2M^2 - Q^2)$.

在没有粒子隧穿出黑洞时, 其初始视界由 $\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = 0$ 决定:

$$r_i = m + \sqrt{m^2 - a^2} = M - b + \sqrt{(M-b)^2 - a^2}. \quad (19)$$

当粒子隧穿出黑洞后, 其终态视界则为

$$r_f = M - \omega - \hat{b} + \sqrt{(M - \omega - \hat{b})^2 - a^2}. \quad (20)$$

由Hamilton正则运动方程得到

$$\bar{r} = \frac{dH}{dP_r} \Big|_{(r; \varphi, P_\varphi, A_t, P_{A_t})} = \frac{d(M - \omega)}{dP_r}, \quad (21a)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{dH}{dP_\varphi} \Big|_{(\varphi; r, P_r, A_t, P_{A_t})} = a\Omega \frac{d(M - \omega)}{dP_\varphi}, \quad (21b)$$

$$\bar{A}_t = \frac{dH}{dP_{A_t}} \Big|_{(A_t; r, P_r, \varphi, P_\varphi)} = \Phi \frac{d(Q - q)}{dP_{A_t}}. \quad (21c)$$

将上述各式代入带电粒子的作用量

$$S = \int_{t_i}^{t_f} (P_r \bar{r} - P_\varphi \bar{\varphi} - P_{A_t} \bar{A}_t) dt$$

$$= \int_{r_i}^{r_f} \left[\int_{(0,0,0)}^{(P_r, P_\varphi, P_{A_t})} (\bar{r} dP'_r - \bar{\varphi} dP'_\varphi - \bar{A}_t dP'_{A_t}) \right] \frac{dr}{\bar{r}}, \quad (22)$$

得到

$$\text{Im } S = \text{Im} \int_{r_i}^{r_f} \int_{(M,Q)}^{(M-\omega, Q-q)} [(1 - a\Omega') d(M - \omega')]$$

$$-\Phi' d(Q-q') \Big] \frac{dr}{r}. \quad (23)$$

如前所述, 出射粒子在黑洞外视界附近具有渐近行为: $\bar{r} \approx \kappa'(r-r'_+)$, 其表面引力、角速度和静电势分别为

$$\kappa' = \frac{r'_+ - r'_-}{2(r_+^2 + 2b'r'_+ + a^2)}, \quad (24a)$$

$$\Omega' = \frac{a}{r_+^2 + 2b'r'_+ + a^2}, \quad (24b)$$

$$\Phi' = \frac{(Q-q')r'_+}{2(r_+^2 + 2b'r'_+ + a^2)}, \quad (24c)$$

其中,

$$r'_\pm = M - \omega' - b' \pm \sqrt{(M - \omega' - b')^2 - a^2}. \quad (25)$$

利用上述各式和 $b' = \frac{(Q-q')^2}{2(M-\omega')}$ 不难证明黑洞熵 $S' = \pi(r_+^2 + 2b'r'_+ + a^2)$ 满足热力学第一定律的微分形式:

$$d(M-\omega') = \frac{\kappa'}{2\pi} dS' + a\Omega' d(M-\omega') + \Phi' d(Q-q'). \quad (26)$$

由此可以完成(23)式积分, 得到

$$\begin{aligned} \text{Im } S &= \text{Im} \int_{r_i}^{r_f} \int_{(M,Q)}^{(M-\omega, Q-q)} \frac{dr}{\kappa'(r-r'_+)} [d(M-\omega') \\ &\quad - a\Omega' d(M-\omega') - \Phi' d(Q-q')] \\ &= -\frac{1}{2} \int_{S_{\text{BH}}(M,Q)}^{S_{\text{BH}}(M-\omega, Q-q)} dS' \\ &= -\frac{1}{2} \Delta S_{\text{BH}} = \frac{\pi}{2} (r_i^2 + 2br_i - r_f^2 - 2\hat{b}r_f). \end{aligned} \quad (27)$$

利用粒子贯穿势垒的几率 Γ 与其作用量 S 的关系式: $\Gamma \sim e^{-2\text{Im}S}$, 可得有质量带电粒子的隧穿几率

为: $\Gamma = e^{\Delta S_{\text{BH}}}$, 式中,

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{BH}} &= S_{\text{BH}}(M-\omega, Q-q) - S_{\text{BH}}(M, Q) \\ &= \pi(r_f^2 + 2\hat{b}r_f - r_i^2 - 2br_i) \end{aligned} \quad (28)$$

为Kerr-Sen黑洞在辐射有质量带电粒子前后的熵差.

上述隧穿几率与先前文献[10–12]给出的结果完全一致, 它是在考虑了能量守恒、角动量守恒和电荷守恒以及自引力修正和电磁相互作用后得到的Kerr-Sen黑洞事件视界附近有质量带电粒子的隧穿几率. 按照Parikh-Wilczek半经典隧穿解释, 它表明黑洞真实的辐射谱不再是理想的热辐射谱.

4 结论

本文在给出Kerr-Sen黑洞的(一般非拖曳坐标系)度规新形式后, 运用Lagrange作用量变分原理对该时空中有质量带电粒子的测地线方程做了新的推导. 然后采用Parikh-Wilczek半经典隧穿方法对Kerr-Sen黑洞的隧穿辐射重新做了研究, 给出了隧穿几率. 结果表明, 对转动黑洞隧穿辐射的处理不仅可在任何坐标系中完成, 而且也不再局限于采用拖曳坐标系, 这是对文献[14]建议方法的功效的进一步佐证. 这种方法克服了先前相关工作中的一些缺陷, 可以成功地避免使用不太自然的关系式 $v_p = v_g/2$ 推导有质量粒子的测地线方程, 而且已能适用于任意坐标系, 是对Parikh-Wilczek半经典隧穿方法的进一步完善. 本文的工作可直接推广到EMDA理论的一般转动双荷带电黑洞解 [26,27] 情形.

参考文献

- 1 Hawking S W. Particle creation by black holes. *Commun Math Phys*, 1975, 43: 199–220
- 2 Parikh M K, Wilczek F. Hawking radiation as tunneling. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 5042–5045
- 3 Parikh M. A secret tunnel through the horizon. *General Relativity Gravitation*, 2004, 36: 2419–2422
- 4 Zhang J, Zhao Z. Hawking radiation of charged particles via tunneling from the Reissner-Nordström black hole. *J High Energy Phys*, 2005, 2005: 055
- 5 Zhang J, Zhao Z. Hawking radiation via tunneling from Kerr black holes. *Mod Phys Lett A*, 2005, 20: 1673–1681
- 6 Jiang Q Q, Wu S Q. New form of the Kerr solution and its tunneling radiation (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2006, 55: 4428–4432 [蒋青权, 吴双清. Kerr 解的新形式及其隧穿辐射. *物理学报*, 2006, 55: 4428–4432]

- 7 Zhang J, Zhao Z. New coordinates for Kerr Newman black hole radiation. [Phys Lett B](#), 2005, 618: 14–22
- 8 Zhang J, Zhao Z. Charged particles' tunnelling from the Kerr Newman black hole. [Phys Lett B](#), 2006, 638: 110–113
- 9 Jiang Q Q, Wu S Q, Cai X. Hawking radiation as tunneling from the Kerr and Kerr-Newman black holes. [Phys Rev D](#), 2006, 73: 064003
- 10 Yang S Z, Chen D Y. A new method to study Hawking Radiation of charged particle from stationary axisymmetric Sen black hole. [Chin Phys Lett](#), 2007, 24: 39–41
- 11 Jiang, Yang S Z, Chen D Y. The Hawking radiation of the charged particle via tunnelling from the axisymmetric Sen black hole. [Chin Phys](#), 2006, 15: 1709–1714
- 12 Chen D, Yang S. Charged particle tunnels from the Einstein-Maxwell black hole. [Int J Mod Phys D](#), 2007, 16: 1285–1294
- 13 Chandrasekhar S. The Mathematic Theory of Black Holes. New York (Oxford): Oxford University Press, 1992
- 14 Wu D, Jiang Q Q, Wu S Q, et al. New treatment on tunneling radiation from Kerr black holes (in Chinese). [Sci Sin-Phys Mech Astron](#), 2013, 43: 115–121 [吴迪, 蒋青权, 吴双清, 等. Kerr黑洞隧穿辐射的新处理. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 115–121]
- 15 Doran C. New form of the Kerr solution. [Phys Rev D](#), 2000, 61: 067503
- 16 Wu D, Zhu X D, Wu S Q. New treatment on tunneling radiation from Kerr black holes (in Chinese). [Acta Phys Sin](#), 2014, 63: 180401 [吴迪, 朱晓丹, 吴双清, Kerr-Newman黑洞隧穿辐射的新研究. 物理学报, 2014, 63: 180401]
- 17 Wu S Q, Deng G M, Wu D. Hawking radiation from rotating AdS black holes in conformal gravity. [Astrophys Space Sci](#), 2014, 352: 751–762
- 18 Fang H Z. Massive particle radiation from Gibbons—Maeda black hole. [Chin Phys B](#), 2010, 19: 110404
- 19 Miao Y G, Xue Z, Zhang S J. Massive charged particle's tunneling from spherical charged black hole. [Europhys Lett](#), 2011, 96: 10008
- 20 Sen A. Rotating charged black hole solution in heterotic string theory. [Phys Rev Lett](#), 1992, 69: 1006–1009
- 21 Siahaan H M. Destroying Kerr-Sen black holes. [Phys Rev D](#), 2016, 93: 064028
- 22 Ghezelbash A M, Siahaan H M. Hidden and generalized conformal symmetry of Kerr-Sen spacetimes. [Class Quantum Grav](#), 2013, 30: 135005
- 23 Burinskii A Y. Some properties of the Kerr solution to low energy string theory. [Phys Rev D](#), 1995, 52: 5826–5831
- 24 Okai T. Global structure and thermodynamic property of the 4-dimensional twisted Kerr solution. [Prog Theor Phys](#), 1994, 92: 47–65
- 25 Wu S Q, Cai X. Massive complex scalar field in the Kerr-Sen geometry: Exact solution of wave equation and Hawking radiation. [J Math Phys](#), 2003, 44: 1084–1088
- 26 Gal'tsov D V, Kechkin O V. Ehlers-Harrison-type transformations in dilaton-axion gravity. [Phys Rev D](#), 1994, 50: 7394–7399
- 27 García A, Galtsov D, Kechkin O. Class of stationary axisymmetric solutions of the Einstein-Maxwell-Dilaton-Axion field equations. [Phys Rev Lett](#), 1995, 74: 1276–1279
- 28 Pilling T. Black hole thermodynamics and the factor of 2 problem. [Phys Lett B](#), 2008, 660: 402–406
- 29 Chowdhury B D. Problems with tunneling of thin shells from black holes. [Pramana-J Phys](#), 2008, 70: 3–26

An improved research on tunneling radiation from the Kerr-Sen black hole

ZHAO Huan¹, WU ShuangQing¹ & WU Di^{1,2*}

¹*College of Physics and Space Science, China West Normal University, Nanchong 637002, China;*

²*College of Physics and Information Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, China*

Starting from the action of the massive charged particles, we have firstly applied the Euler-Lagrange's variation method to give a new derivation of the time-like and null geodesic equations of the rotating Kerr-Sen black hole in a general (non-dragging) coordinate system. Adopting the semi-classical tunneling method proposed by Parikh and Wilczek, we then reinvestigate the tunneling radiation of a massive charged particle from the event horizon of the Kerr-Sen black holes, and present the tunneling probability also. This work demonstrates that the study of tunneling radiation from this rotation black hole may not be limited in using a dragging coordinate system.

Kerr-Sen black hole, geodesic equation, tunneling radiation

PACS: 04.70.Dy, 97.60.Lf

doi: [10.1360/SSPMA2018-00059](https://doi.org/10.1360/SSPMA2018-00059)