



大统一理论和质子衰变

李田军^{1,2}

1. 中国科学院理论物理研究所, 北京 100190;

2. 中国科学院大学物理科学学院, 北京 100049

E-mail: tli@itp.ac.cn

2018-01-01收稿, 2018-03-26修回, 2018-03-30接受, 2018-08-08网络版发表

国家自然科学基金(11475238, 11647601)资助

摘要 自然界存在4种基本相互作用: 强、弱、超荷和引力相互作用, 故如何构造一种大统一理论来描述所有的基本相互作用是一个非常重要的基本问题. 本文首先简单介绍了标准模型及其问题. 考虑 $U(1)_Y$ 超荷正则归一化因子和大沙漠假定(grand desert hypothesis), 可以在TeV能标左右引入新的粒子来得到标准模型规范耦合常数的统一, 其中特别解释了超对称标准模型. 在四维大统一模型中, 介绍了Pati-Salam $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ 模型, Georgi-Glashow $SU(5)$ 模型, Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 模型和 $SO(10)$ 模型, 其中详细介绍了非超对称和超对称 $SU(5)$ 模型, 并讨论了其正确的预言、存在的问题及其解决方案和质子衰变等. 还简单介绍了高维Orbifold大统一模型和超弦模型. 最后讨论了如何探寻大统一理论: 在对撞机上寻找新的粒子及其粒子特性、质子衰变的现在和将来的实验检验以及可能的新探测方案.

关键词 大统一理论, 质子衰变, 基本相互作用, 标准模型, 超对称

自然界存在4种基本相互作用: 强、弱、超荷和引力相互作用. 基于所有的基本相互作用具有共同起源的猜想, 物理学家一直在探索描述宇宙最基本规律的大统一理论. 从历史来看, 第一次统一是牛顿首先将描述天体之间和地球物体之间的力统一在一起, 即引力相互作用. 第二次统一是麦克斯韦将电力和磁力统一地用 $U(1)_{EM}$ 经典场论描述. Nordström(1914年), Kaluza(1919年)和Klein(1926年)首次提出额外维度的思想, 并尝试在五维空间统一当时已知的自然界中的引力和电磁相互作用. 这的确是伟大的想法, 但遗憾的是该理论并不能描述自然界. 第三次统一是Glashow(1961年), Salam(1968年), 和Weinberg(1967年)将电磁相互作用和弱相互作用统一在一起, 即电弱理论. 众所周知, 强、弱和超荷相互作用是用规范理论来描述, 其相应的规范群是 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. 故自然想到它们可能有一

个共同的起源: 一个高能标的大统一理论, 具有一个规范群如 $SU(5)$ 或 $SO(10)$ 等. 准确地说, 大统一的定义有两种: (1) 规范相互作用的统一; (2) 费米子的统一或说Yukawa耦合常数的统一. 按通常定义的大统一理论, 本文只考虑第一种情况, 不考虑如三代费米子的统一模型. 大统一模型中不包括引力, 而引力量子化是物理学中另一重大问题. 目前最好的量子引力理论的候选者是超弦理论, 故将4种基本相互作用统一在一起的模型可能是超弦模型. 特别是超弦大统一模型能自然解决大统一模型遇到的主要问题. 总之, 大统一模型和超弦大统一模型就是万物理理论(the theory of everything). 原则上它能解释宇宙中所有的物理现象, 故是物理学的终极目标. 因此, 历史上许多伟大的物理学家都曾为之努力奋斗, 如爱因斯坦等. 目前, 我们已经构造了各种大统一模型和超弦大统一模型, 关键是需要进一步实验检验. 本文将简单介绍标准模型、规范耦合常数

统一、大统一模型、高维Orbifold大统一模型和超弦模型等, 讨论这些模型的优点、问题以及解决方案和将来的实验检验等. 因为大统一模型和超弦大统一模型是物理学的终极目标, 所以一定不是从牛顿开始几代物理学家能完成的历史重任. 特别是实验检验, 将来可能还需要几代人的努力奋斗. 另一方面, Weyl(1929年), Stueckelberg(1939年)和Wigner(1949年)提出重子数守恒, 它的直接推论是稳定的质子. Reines等人^[1]于1954年通过实验分别给出了质子寿命的下限分别为 1.4×10^{18} 年和 1×10^{21} 年. 从理论上, Sakharov于1967年为了解释重子不对称提出了重子数破坏. 大统一理论提出后, 预言了质子衰变, 真正将大统一理论和质子衰变紧密地联系在一起, 并让我们看到了质子衰变的深层重大物理意义.

1 标准模型和规范耦合常数统一

粒子物理标准模型描述自然界中基本粒子及其之间的相互作用. 在介绍标准模型之前, 先简单介绍其数学基础群论. 所有满足么正条件 $U^\dagger U = 1$ 的 $N \times N$ 复矩阵构成 $U(N)$ 么正群, 当 $N > 1$ 时, 其中行列式的值为1的矩阵 $\det U = 1$ 构成特殊么正群, $SU(N)$ 群. 当 $N = 1$ 时, 得到 $U(1)$ 群, 即复平面上半径为1的圆. 当 $N > 1$, 可以将 $U(N)$ 分解为 $SU(N) \times U(1)$. 所有满足实正交条件 $O^T O = 1$ 的 $N \times N$ 矩阵构成 $O(N)$ 实正交群, 当 $N > 1$ 时, 其中行列式的值为1的矩阵 $\det O = 1$ 构成特殊实正交群 $SO(N)$ 群. 李群可以按邓金图分类, 具体如下: (1) A_N , 即特殊么正群 $SU(N)$; (2) B_N , 即实正交群 $SO(2N+1)$; (3) C_N , 即辛群 $Sp(N)$; (4) D_N , 即实正交群 $SO(2N)$; (5) 例外群, G_2, F_4, E_6, E_7 和 E_8 . 在粒子物理中, 一般用到 $U(1), SU(N)$ 和 $SO(2N)$ 群. 在超弦模型构造中, 还要用到例外群 E_6, E_7 和 E_8 . 对于一个群 G , 可以引入其表示: (1) 基础表示, 只带一个李代数指标即 ϕ_a . 如对 $SU(N)$ 和 $SO(N)$ 群, $a = 1, 2, \dots, N$; (2) 反基础表示, 只带一个李代数指标的共轭即 $\phi_{\bar{a}}$. 如对 $SU(N)$ 和 $SO(N)$ 群, $\bar{a} = 1, 2, \dots, N$; (3) 对 $SO(2N)$ 群可以引入旋量表示, 其维度为 2^N . 旋量表示可以分解为左手和右手旋量表示, 其维度为 2^{N-1} . 如 $SO(10)$ 的左手或右手旋量表示的维度为 $2^{5-1} = 16$; (4) 张量表示, 可以带多个李代数指标如 ϕ_{ab} 和 ϕ_{abc} 等. 因为只考虑不可约

表示, 所以要对张量表示分解, 如 ϕ_{ab} 可以分解为对称表示 $\phi_{ab} = \phi_{ba}$ 和反对称表示 $\phi_{ab} = -\phi_{ba}$. 如 $SU(5)$ 的反对称表示维度为 $(5 \times 4)/2 = 10$.

通过对称性描述基本粒子以及它们之间的相互作用(如庞加莱代数的两个Casimir算子描述了粒子的质量和自旋), 引力相互作用是通过广义坐标(或数学上说微分同胚)变换下的不变性来描述, 强、弱和超荷相互作用是用规范理论来描述, 其相应的规范群是 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, 并且相应的夸克和轻子的量子数如下:

$$\begin{aligned} Q_i &: (3, 2, 1/6); U_i^c : (\bar{3}, 1, -2/3); D_i^c : (\bar{3}, 1, 1/3); \\ L_i &: (1, 2, -1/2); E_i^c : (1, 1, 1); N_i^c : (1, 1, 0), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $Q_i, U_i^c, D_i^c, L_i, E_i^c$ 和 N_i^c 分别是左手夸克二重态、右手上型夸克、右手下型夸克、左手轻子二重态、右手带电轻子和右手中微子. 这里采用超对称的惯例, 所有的费米子都是左手的. 在大统一模型中, 标准模型中的费米子(有时可能要加上额外的费米子如右手中微子和类矢量费米子等)还需要形成大统一规范群的多重态表示. 事实上, 大统一模型刚开始构造的难点在于没有意识到要将所有费米子的量子数写成左手形式, 故不能组成合适的大统一规范群的多重态表示. 因此, 将列出标准模型粒子在大统一群下的表示或量子数. 在标准模型中, 弱和超荷相互作用通过自发对称性破缺破缺到了 $U(1)_{EM}$ 电磁相互作用. 为了不破坏洛伦兹对称性, 引入标量Higgs粒子 H , 其量子数如下:

$$H : (1, 2, -1/2). \quad (2)$$

选取Higgs势

$$V = \frac{\lambda}{2} (|H|^2 - v^2)^2, \quad (3)$$

在势能极小值的真空, Higgs粒子中性分量得到真空期望值, $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 对称性破缺到 $U(1)_{EM}$, 相应的规范玻色子 $W^\pm$ 和 Z^0 获得质量, 并且给夸克和带电轻子质量.

自2012年7月Higgs粒子确认发现之后, 标准模型被证实在100 GeV左右是一个正确的理论. 为了研究超出标准模型的新物理, 需要了解标准模型的主要问题. 标准模型的主要问题有两类: 精细调节问题和美学

问题. 精细调节问题包括: (1) 宇宙学常数问题. 目前宇宙的宇宙学常数是 $\Lambda_{cc} \sim 10^{-122} M_{\text{Pl}}^4$, 其中 M_{Pl} 是约化的 Planck 能标, $2.43 \times 10^{18} \text{ GeV}$. 但是标准模型中的粒子对宇宙学常数有量子修正, 即对真空零点能的量子修正, 其数值远大于目前观测到的宇宙学常数. 同时我们不能解释为什么电弱对称性破缺之前的宇宙学常数(式(3)中的 $\lambda v^4/2$) 和电弱对称性破缺之后的 Higgs 粒子真空期望值贡献的宇宙学常数(式(3)中具体计算得到的 $-\lambda(H)^4/2$) 精确相消, 即我们为什么能得到如式(3)的 Higgs 势. 因此, 我们不能解释为什么宇宙学常数是如此小的非零正数, 具体请见文献 [2] Weinberg 文章第三节. 当然, 物理学家对于宇宙学常数问题是否属于粒子物理标准模型的问题可能存在一定争论, 故此问题仅供读者参考. (2) 规范等级问题. 在标准模型中, Higgs 粒子是标量粒子. 其质量平方的量子修正具有二次发散. 但是 Higgs 粒子质量比约化的 Planck 能标小 16 个量级. (3) 强电荷共轭和空间反演(CP)问题. 从中子电偶极矩推知, 强 CP 相位小于 10^{-10} . (4) 标准模型费米子质量等级问题, 如为什么 top 夸克质量比电子质量大 5 个量级等. 美学问题包括: (1) 规范相互作用的统一. (2) 费米子或说 Yukawa 耦合常数的统一. (3) $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范耦合常数在能标没有统一. (4) 电荷量子化问题. 因为 Higgs 质量是 125 GeV , 所以标准模型还有稳定性问题, 即标准模型中的 Higgs 四次耦合项的系数在大概 10^{11} GeV 变负, 故电弱真空不稳定. 同时我们还有超出标准模型的比较令人信服的新物理: 暗物质、暗能量、中微子质量与混合、重子反对称(Baryon Asymmetry)和大暴涨等. 以上主要问题和新物理原则上都可以在大统一理论(特别是下面要讨论的超对称大统一理论)中解决.

强、弱和超荷相互作用是规范相互作用, 因此它们有一个共同的起源: 一个高能标的大统一理论, 其规范群是一个半单李群. 因为它只有一个规范耦合常数, 所以 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范耦合常数在能标必须统一, 其具体条件如下

$$g_1^2 = g_2^2 = g_3^2, \quad \text{where} \quad g_1^2 \equiv k_Y g_Y^2, \quad (4)$$

其中 k_Y 是有理数, g_Y , g_2 和 g_3 分别是 $U(1)_Y$, $SU(2)_L$ 和 $SU(3)_C$ 的规范耦合常数. 对于传统的大统一模型(见下文), 得到 $U(1)_Y$ 的正则归一化因子 $k_Y = 5/3$.

通过重整化群演化, 可以证明标准模型的规范耦合常数在能标不能统一在一起. 当然, 在 $SU(6)$ Orbifold 大统一模型中, 可以得到 $U(1)_Y$ 的非正则一化因子 $k_Y = 4/3$. 本课题组^[3,4]论证了标准模型的规范耦合常数可以统一在 $4.3 \times 10^{16} \text{ GeV}$. 但是本文不考虑此种模型.

因此, 在介绍大统一模型之前, 首先必须研究规范耦合常数统一. 为了得到规范耦合常数统一, 采用 Grand Desert Hypothesis: 从电弱能标到大统一能标没有新的规范对称性和新的粒子. 否则无法在对撞机上检验该模型. 因此, 只在 TeV 能标左右引入新的粒子. 它的直接优点是可以解决标准模型的稳定性问题, 因为新粒子的贡献使得规范耦合常数在能标变得更强. 一般而言, 为了得到规范耦合常数统一, $U(1)_Y$, $SU(2)_L$ 和 $SU(3)_C$ 的一圈重整化群的 β 函数 b_1 , b_2 和 b_3 满足如下关系式^[5]

$$\frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_2} \sim 1.4. \quad (5)$$

对于新引入的粒子, 对 $U(1)_Y$, $SU(2)_L$ 和 $SU(3)_C$ 的一圈重整化群的 β 函数的贡献定义为 Δb_1 , Δb_2 和 Δb_3 . 如果 $\Delta b_2 = \Delta b_3$, 那么它们满足的关系式为

$$\Delta b_2 = \Delta b_3 \simeq \Delta b_1 + \frac{8}{5}. \quad (6)$$

下面给出能够得到规范耦合常数统一的几种非超对称标准模型:

(I) 模型 NSGUT-I. 引入类矢量费米子 (XQ^c , XQ) 和 (XD^c , XD), 其量子数如下:

$$\begin{aligned} XQ &: (3, 2, 1/6); \quad XQ^c : (\bar{3}, 2, 1/6); \\ XD &: (3, 1, -1/3); \quad XD^c : (\bar{3}, 1, 1/3). \end{aligned} \quad (7)$$

相应的大统一能标大概是 $2.24 \times 10^{16} \text{ GeV}$. 特别是如果加上两个标准模型单态类矢量费米子 (XN , XN^c), 所有类矢量费米子形成 Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 模型(见下文的 (10, 1) 和 $(\bar{10}, -1)$ 表示. 这是最简单的非超对称大统一模型.

(II) 模型 NSGUT-II. 引入 6 个 Higgs 二重态, 其量子数为 (1, 2, -1/2). 相应的大统一能标大概是 10^{14} GeV . 为了逃避质子衰变的限制, 通常考虑 Trinification 模型, 其规范对称性是 $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$.

(III) 模型NSGUT-III. 引入类矢量费米子(XQ^c , XQ), 玻色子 U_s^c , D_s^c 和 H' . 它们的量子数如下:

$$U_s^c : (\bar{3}, 1, -2/3); D_s^c : (\bar{3}, 1, 1/3); H' : (1, 2, -1/2). \quad (8)$$

相应的大统一能标大概是 7×10^{15} GeV. 该模型的要点是质子衰变可以在将来的实验中检验.

超对称是玻色子和费米子之间的对称性. 在超对称变换下, 费米子变成玻色子, 反之亦然. 因为自旋统计关系, 费米子和玻色子对Higgs粒子的量子修正相消, 所以超对称自然解决了规范等级问题. 同时在超对称理论中, 如果超对称没有破缺, 宇宙学常数自动为零, 故其部分地解决了宇宙学常数问题, 即将约化的普朗克能标降低到超对称破缺能标. 在超对称标准模型中, 费米子如夸克和轻子的超对称伴侣是自旋为0的Squarks和Sleptons, Higgs粒子的超对称伴侣是自旋为1/2的Higgsinos, 规范场的超对称伴侣是自旋为1/2的Gauginos. 超对称理论用3个函数描述: Kähler势描述物质和Higgs超场的动能项、规范动能势描述规范超场的动能项、超势描述Yukawa耦合项. 因为超势是全纯函数并且规范反常相消要求, 所以需要引入两个Higgs粒子 H_u 和 H_d , 分别给上夸克和下夸克/带电轻子质量. 不像标准模型, 在超对称标准模型中, 可重整的超势亦能导致太快的质子衰变. 为了禁闭质子衰变算子, 引入 Z_2 R 宇称. 标准模型粒子的 R 宇称为正, 而超对称粒子的 R 宇称为负. 故最轻的超对称粒子可以成为暗物质粒子的候选者. 在超对称标准模型中, 还可以得到规范耦合常数统一, 并且电弱对称性可以通过辐射修正重整化群演化来破缺. 特别是规范耦合常数统一强烈地暗示了大统一模型. 因此, 超对称标准模型不仅解决了标准模型的规范等级问题, 而且解决了其美学问题.

2 四维大统一模型

严格准确地说, 大统一的定义有两种: (1) 规范相互作用的统一; (2) 费米子统一或Yukawa耦合常数统一. 真正的费米子统一是三代费米子的统一, 其规范群较大, 如 $SO(18)$ 等. 基于篇幅原因, 本文不考虑此类模型. 按照历史发展顺序来简单介绍四维大统一模型.

2.1 Pati-Salam 模型

Pati和Salam^[6]于1974年考虑费米子统一, 首先提出了Pati-Salam模型, 其规范群为 $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$. 该模型将一代左手费米子统一到一个 $(4, 2, 1)$ 表示 $F_i^L = (Q_i, L_i)$ 中, 将一代右手费米子和右手中微子统一到一个 $(\bar{4}, 1, 2)$ 表示 $F_i^R = (U_i^c, D_i^c, E_i^c, N_i^c)$ 中, 并且它们通过一个左右对称性联系在一起, 具体表示如下:

$$F_i^L : (4, 2, 1); F_i^R : (\bar{4}, 1, 2). \quad (9)$$

为简单起见, 只考虑超对称模型. 为了将 $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ 规范对称性破缺到标准模型对称性, 引入Higgs粒子 Φ , $\bar{\Phi}$ 和 T , 其中引入 T 的原因是为了给 Φ 和 $\bar{\Phi}$ Higgs粒子质量, 同时引入标准模型Higgs粒子 H 和一个标准模型单态粒子 S . 这些粒子的表示如下:

$$\begin{aligned} \Phi : (4, 1, 2); \bar{\Phi} : (\bar{4}, 1, 2); T : (6, 1, 1) \\ H : (1, 2, 2); S : (1, 1, 1). \end{aligned} \quad (10)$$

在Pati-Salam模型中, 超势中费米子Yukawa耦合项是 $y_{ij} F_i^L H F_j^R$, 故其预言了第三代费米子(top 与bottom 夸克和 τ 轻子)的Yukawa耦合常数的统一, 即 $y_t = y_b = y_\tau = y_{33}$. 因为Pati-Salam模型没有将 $SU(3)_C \times SU(2)_L$ 规范相互作用统一, 所以该模型没有质子衰变. 故将不再讨论此模型.

2.2 Georgi-Glashow $SU(5)$ 模型

Georgi和Glashow^[7]于1974年考虑规范相互作用的统一提出了 $SU(5)$ 模型. 将 $SU(2)_L$ 和 $SU(3)_C$ 规范对称性镶嵌于 $SU(5)$ 规范对称性

$$SU(5) = \left(\begin{array}{c} SU(3)_C (X_\mu, Y_\mu) \\ (X_\mu^\dagger, Y_\mu^\dagger) SU(2)_L \end{array} \right). \quad (11)$$

并且 $U(1)_Y$ 属于 $SU(5)$ 无迹(Traceless)对角元部分, 并且不破坏 $SU(3)_C \times SU(2)_L$ 规范对称性, 即前三分量和后二分量分别相等, 并且它们的和等于零. 故这两条件给出

$$T_{U(1)_Y} = \text{diag} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right). \quad (12)$$

因此, 得到 $U(1)_Y$ 正则归一化因子:

$$k_Y = 2 \times \text{Tr}[T_{U(1)_Y}^2] = \frac{5}{3}. \quad (13)$$

同时在大统一能标, 我们有超重规范玻色子 X_μ 和 Y_μ 及其共轭, 它们的标准模型量子数分别为 $(3, 2, -5/6)$ 和 $(\bar{3}, 2, +5/6)$.

在 $SU(5)$ 大统一模型中, 标准模型一代费米子形成 $SU(5)$ 的 $\bar{5}$ 和10维表示, 分别记为 $\bar{f}_i$ 和 F_i , 它们的具体分量如下:

$$\bar{f}_i = (D_i^c, L_i) : \bar{5}; F_i = (U_i^c, Q_i, E_i^c) : 10. \quad (14)$$

(I) 考虑非超对称 $SU(5)$ 模型. 为了破缺 $SU(5)$ 规范对称性和标准模型规范对称性, 引入Higgs粒子 Φ 和 H , 其 $SU(5)$ 量子数如下:

$$\Phi : 24; H : 5. \quad (15)$$

当 Φ 沿 $U(1)_Y$ 方向的分量得到如下真空期望值

$$\langle \Phi \rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} V_\Phi \text{diag} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (16)$$

将 $SU(5)$ 规范对称性破缺到 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. 五重态 H 中的二重态是标准模型Higgs粒子, 它将 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范对称性破缺到 $U(1)_{EM}$ 电磁对称性.

下面讨论 $SU(5)$ 模型的预言和问题:

(1) $SU(5)$ 模型预言了正确的电弱混合角

$$\sin^2 \theta_W = \frac{3}{8}. \quad (17)$$

(2) $SU(5)$ 模型预言了在大统一能标第三代费米子中的bottom夸克和 τ 轻子的Yukawa耦合常数的统一, 即 $y_b = y_\tau$. 这与实验结果和重整化群演化相符合, 但是 $SU(5)$ 模型中存在前两代费米子质量问题. 因为前两代费米子下夸克和带电轻子的质量很小, 所以我们预言了

$$\frac{m_e}{m_\mu} \simeq \frac{m_d}{m_s}, \quad (18)$$

其中 m_e, m_μ, m_d 和 m_s 分别是电子、 μ 子、下夸克和粲夸克的质量. 这与实验不符合. 为了解决此问题, 可以引入一个高维表示的Higgs粒子给这些粒子质量, 其相应的关系式变为

$$\frac{m_e}{m_\mu} \simeq \frac{1}{9} \frac{m_d}{m_s}, \quad (19)$$

这与实验结果相符合.

(3) Higgs粒子 H 的二、三重态分裂问题. H 是五重态, 其三重态分量要很重, 大概在大统一能标约为 2.0×10^{16} GeV, 而二重态分量即标准模型Higgs粒子要很轻, 大概在电弱能标约为100 GeV. 因此, 我们需要大概 $(10^2)^2 / (10^{16})^2 \sim 10^{-28}$ 的精细调节.

(4) $SU(5)$ 模型预言了超重的 X_μ 和 Y_μ 规范玻色子导致的量纲为6的质子衰变. 在最后一章会详细讨论.

(5) 引入右手中微子, 可以通过跷跷板机制解释中微子质量和混合, 并通过Leptogenesis机制解释重子反对称.

(II) 超对称 $SU(5)$ 模型. 为了将 $SU(5)$ 规范群破缺到 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, 我们依然引入伴随表示24维Higgs粒子 Φ . 与非超对称 $SU(5)$ 模型不同, 因为超势的全纯性和反常相消, 我们需要引入两个Higgs粒子 5_H 和 $\bar{5}_H$

$$5_H = \begin{pmatrix} H_c \\ H_u \end{pmatrix}, \bar{5}_H = \begin{pmatrix} \bar{H}_c \\ H_d \end{pmatrix}, \quad (20)$$

其中 H_u 和 H_d 是超对称标准模型中的一对Higgs粒子二重态. 超对称 $SU(5)$ 模型与非超对称 $SU(5)$ 模型的主要结果类似. 不同是在超对称 $SU(5)$ 模型中, 5重态Higgs粒子 5_H 和 $\bar{5}_H$ 中带色荷的Higgs超场 H_c 和 $\bar{H}_c$ 中的费米子会导致量纲为5的质子衰变 $p \rightarrow \bar{\nu}_\mu K^+$. 因此, 二、三重态分裂问题更加严重, 即 H_c 和 $\bar{H}_c$ 必须超重并在大统一能标. 原因有两个: 需要得到规范耦合常数的统一和限制量纲为5的质子衰变. $SU(5)$ 模型中二、三重态分裂问题的解决方案是Missing Partner 机制. 其要点是引入高维Higgs粒子, 它具有色三重态但没有二重态. 当高维Higgs粒子与五重态Higgs粒子混合, 由于五重态Higgs粒子中的二重态没有Partners, 故它们依然无质量.

2.3 Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 模型

因为文章篇幅原因, 所以只介绍超对称Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 模型^[8~10]. 在其 $SU(5)$ 群中, 类似Georgi-Glashow $SU(5)$ 模型, 定义如下 $U(1)_{Y'}$ 生成元

$$T_{U(1)_{Y'}} = \text{diag} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right). \quad (21)$$

超荷由如下公式给出

$$Q_Y = \frac{1}{5} (Q_X - Q_{Y'}). \quad (22)$$

标准模型三代费米子组成Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 如下

$$F_i = (\mathbf{10}, \mathbf{1}), \bar{f}_i = (\bar{\mathbf{5}}, -\mathbf{3}), \bar{l}_i = (\mathbf{1}, \mathbf{5}), \quad (23)$$

其具体粒子谱如下:

$$F_i = (Q_i, D_i^c, N_i^c), \bar{f}_i = (U_i^c, L_i), \bar{l}_i = E_i^c. \quad (24)$$

为了破缺Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 规范对称性和电弱规范对称性, 引入两对Higgs粒子, 它们的Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 表示如下:

$$\begin{aligned} H &= (\mathbf{10}, \mathbf{1}), \bar{H} = (\bar{\mathbf{10}}, -\mathbf{1}), \\ h &= (\mathbf{5}, -\mathbf{2}), \bar{h} = (\bar{\mathbf{5}}, \mathbf{2}). \end{aligned} \quad (25)$$

其中五重态Higgs粒子 h 和 $\bar{h}$ 分别包含超对称标准模型的Higgs粒子二重态 H_d 和 H_u .

该模型的优点是可以自然通过无伴侣机制(missing partner mechanism)解决二、三重态分裂问题, 以及量纲为5的质子衰变问题. 但是该模型没有费米子夸克和带电轻子的Yukawa耦合系数的统一. 总之, 虽然Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 没有完整的规范耦合常数统一, 没有Yukawa耦合系数的统一, 但是它能用简单的10维表示的Higgs粒子 H 和 $\bar{H}$ 破缺规范对称性, 同时自然通过无伴侣机制解决二、三重态分裂问题, 以及量纲为5的质子衰变问题. 故容易在超弦理论中实现. 特别是如果在TeV能标引入如下类矢量粒子:

$$XF = (\mathbf{10}, \mathbf{1}), \bar{X}\bar{F} = (\bar{\mathbf{10}}, -\mathbf{1}), \quad (26)$$

$$XI = (\mathbf{1}, -\mathbf{5}), \bar{X}\bar{I} = (\mathbf{1}, \mathbf{5}). \quad (27)$$

可以在传统的大统一能标大概 2×10^{16} GeV得到 $SU(3)_C \times SU(2)_L$ 规范耦合常数统一, 在超弦能标大概 5×10^{17} GeV时得到 $SU(5) \times U(1)_X$ 规范耦合常数统一^[11~13]. 另外, 在Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 模型中, 有超重的 X'_μ 和 Y'_μ 规范玻色子导致的量纲为6的质子衰变.

2.4 $SO(10)$ 模型

在 $SO(10)$ 模型中, 一代费米子加上右手中微子形成 $SO(10)$ 的16维旋量表示, 故 $SO(10)$ 模型是真正意义上的大统一模型, 即实现了规范相互作用的统一和一代费米子统一. $SO(10)$ 有两个最大子群: $SU(5) \times U(1)$,

和 $SO(6) \times SO(4) \approx SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$, 即Pati-Salam 规范群. 对于 $SO(10) \rightarrow SU(5) \times U(1)$, 可以将16为旋量表示分解为

$$16 \rightarrow (10, 1) \oplus (\bar{\mathbf{5}}, -3) \oplus (\mathbf{1}, 5). \quad (28)$$

如果将单态场(1,5)看成是右手中微子, 得到Georgi-Glashow $SU(5)$ 模型. 如果将单态场(1,5)看成是右手带电轻子, 得到Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 模型. 因此, Pati-Salam模型, Georgi-Glashow $SU(5)$ 模型和Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 模型都能统一到 $SO(10)$ 模型. 因为 $SO(10)$ 模型有一代费米子的统一, 所以在大统一能标能得到第三代费米子的Yukawa耦合常数的统一, 即 $y_t = y_b = y_\tau$. 同时可以通过单态滑梯(sliding singlet)机制或Dimopoulos-Wilczek机制解决二、三重态分裂问题. 另外, 在 $SO(10)$ 模型中, 有超重的 X_μ, Y_μ, X'_μ 和 Y'_μ 规范玻色子导致的量纲为6的质子衰变.

3 高维Orbifold 大统一模型和超弦模型

高维Orbifold大统一模型能解决四维大统一模型的主要问题^[14~21]. 基于文章篇幅, 简单介绍五维 $N = 1$ 超对称 $SU(5)$ 模型on $S^1/(Z_2 \times Z'_2)$ Orbifold. 五维 $N = 1$ 超对称等价于四维 $N = 2$ 超对称, 但是五维空间没有手征费米子. 通过 Z_2 Orbifold Projection, 可以将五维 $N = 1$ 超对称破缺到四维 $N = 1$ 超对称, 并且得到四维手征费米子. 利用 Z'_2 Orbifold Projection, 可以将 $SU(5)$ 规范对称性破缺到标准模型 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范对称性. 同时在Higgs粒子 5_H 和 $\bar{5}_{\bar{H}}$ 中, 只得到无质量的 H_u 和 H_d Higgs粒子. 故自然解决了二、三重态分裂问题, 以及量纲为5的质子衰变问题. 同样从 $\bar{f}_i^c$, 只能得无质量的 D_i^c 或者 L_i , 和从 F_i 中, 只能得无质量的 U_i^c/E_i^c 或者 Q_i . 故在五维空间需要引入六代费米子多重态. 这自然解决了四维大统一模型的费米子质量问题. 总之, 高维Orbifold大统一模型已经被仔细研究, 并解决了四维大统一模型的主要问题.

弦理论认为构造自然界的基本单位是弦而不是点粒子, 并且弦的振动模式描述了基本粒子. 有两种自洽的弦理论: 玻色弦理论和超对称弦理论即超弦理论. 玻色弦理论不具有费米子故它不可能描述自然界. 在超

弦理论中,反常相消要求时空的临界维度是十维.并且存在5种自洽的十维超弦理论,它们可能统一到十一维的现在还不非常清楚的M-理论.超弦理论是目前唯一可能描述量子引力的理论,因此如何在超弦理论中构造标准模型或超对称标准模型或超对称大统一模型是一个非常重要的课题.超弦模型构造的主要要点如下:(1)因为我们观测到的时空维度是四维,所以超弦理论中额外的六维或七维空间维度必须非常小,大概在弦能标 5×10^{17} GeV.数学上说额外空间维度需要紧致化;(2)标准模型中的所有费米子是手征费米子,故紧致化后需要得到四维 $N=1$ 超对称理论.1985年左右,超弦模型构造主要局限于杂交弦 $E_8 \times E_8$.原因是 E_8 能自然破缺到大统一模型和标准模型规范对称性,其对称性破缺链具体如下:

$$\begin{aligned} E_8 &\rightarrow E_6 \rightarrow SO(5) \rightarrow SU(5) \\ &\rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y. \end{aligned} \quad (29)$$

杂交弦 $E_8 \times E_8$ 的模型主要有3类: Calabi-Yau流形紧致化、Orbifold 紧致化、四维费米弦模型. 1995年以后,随着D膜的发现,由于D膜上可具有规范对称性,所以也能构造Type II超弦D膜模型.超弦D膜模型主要也有3类: 相交D膜模型、在奇点的D膜模型、Gepner模型. 2008年以后,开始构造F-理论模型. F-理论可以看成是具有一个变化的Axion-Dilaton场的强耦合的Type IIB超弦理论,虽然形式上可以认为是十二维理论.研究较多并且比较成功的超弦模型如下:(1)杂交弦 $E_8 \times E_8$ (包括M-理论on S^1/Z_2)的Calabi-Yau流形和Orbifold紧致化,主要模型是 $SU(5)$, $SO(10)$ 和 E_6 模型.(2)四维费米弦模型,主要模型是类似于标准模型的模型,其规范群是 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)^n$, Pati-Salam模型和Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 模型.原因是这3类模型不需要引入高维Higgs粒子来将各自的规范对称性破缺到标准模型规范对称性.(3)Type II相交D膜模型,主要模型是Pati-Salam模型,原因是Yukawa耦合项是 $U(4)_C \times U(2)_L \times U(2)_R$ 不变的.(4)F-理论模型,主要模型是 $SU(5)$ 模型、Flipped $SU(5)$ 模型和 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ 模型等.另外还有M-理论on G_2 流形等.超弦模型的成功之处是能够自然实现大统一规范对称性破缺,并解决四维大统一模型中的二、三重态分裂问题、质子衰变问题和费米

子质量问题等.

4 探寻大统一模型

随着对 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范耦合常数的精确测量,物理学家于1991年发现标准模型规范耦合常数在高能标并不能统一在一起.为了得到规范耦合常数统一,考虑大沙漠假定,需要在TeV能标引入新的粒子,这些粒子可能在大型强子对撞机或中国将来可能建设的超级质子质子对撞机上检验.特别是模型的一圈重整化群的 β 函数满足式(5)和(6).

对大统一模型最重要的检验是质子衰变. $SU(5)$ 模型预言了超重的 X_μ 和 Y_μ 规范玻色子导致的量纲为6的质子衰变 $p \rightarrow e^+ \pi^0$.简单估计给出质子寿命:

$$\tau_{p \rightarrow e^+ \pi^0} \sim \frac{M_{X_\mu/Y_\mu}^4}{g_5^4 m_p^5}, \quad (30)$$

其中 g_5 是 $SU(5)$ 统一的耦合常数, M_{X_μ/Y_μ} 是 X_μ/Y_μ 规范玻色子质量即大统一能标, m_p 是质子质量.在1980年左右,由于强相互作用耦合常数测量不准确,故人们利用 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范耦合常数统一计算出大统一能标,约在 10^{14} GeV,并预言了质子寿命 $4.5 \times 10^{29 \pm 1.7}$ 年,即小于 2.25×10^{31} 年.因为大统一模型具有非常重要的理论意义,所以很快就有实验检验. Irvine-Michigan-Brookhaven(IMB)实验组^[22]于1983年发现质子寿命大于 10^{32} 年,并排除了最初原始SU(5)模型.同时在超对称SU(5)模型中, 5_H 和 $\bar{5}_H$ 维Higgs表示中的三重态Higgs超场 H_c 和 $\bar{H}_c$ 中的费米子会引起量纲为5的质子衰变 $p \rightarrow \bar{\nu}_\mu K^+$.实际上,最小超对称SU(5)模型被排除的原因就是规范耦合常数统一与量纲为5的质子衰变之间的矛盾.当然,对最小超对称SU(5)模型略作推广,此问题即可解决.

量纲为6的质子衰变 $p \rightarrow e^+ \pi^0$ 和量纲为5的质子衰变 $p \rightarrow \bar{\nu}_\mu K^+$ 在Super-Kamiokande 实验中已经进行了寻找,并且分别给出了质子寿命的下限 1.7×10^{34} 年和 5.9×10^{33} 年^[23].质子衰变将来在Hyper-Kamiokande 实验中要进一步进行寻找,预计能够探测的质子寿命的下限分别是 1.2×10^{35} 年(90%置信度) (8.0×10^{34} 年, 3σ)和 2.8×10^{34} 年, (90% 置信度) (2.5×10^{34} 年, 3σ)^[24]. DUNE (deep underground neutrino experiment)也将对质

子衰变 $p \rightarrow e^+ \pi^0$ 和 $p \rightarrow \bar{\nu}_\mu K^+$ 进行寻找. DUNE 实验对质子衰变 $p \rightarrow e^+ \pi^0$ 不太敏感, 对质子衰变 $p \rightarrow \bar{\nu}_\mu K^+$ 能给出比Hyper-Kamiokande 实验略微好一点的质子寿命的下限. 一般大统一模型如超对称大统一模型预言的质子寿命比Hyper-Kamiokande实验和DUNE实验预计测量到的质子寿命的下限要长. 遗憾的是这两实验由于资金问题, 不能达到以前的实验目标, 即检验超对称大统一模型中的质子衰变. 当然, 在非超对称标准模型中, 可以引入适当的TeV能标的新粒子, 来略微降低通常的大统一能标, 以降低质子寿命, 故这种大统一模型可以在Hyper-Kamiokande 实验和DUNE 实验中检验.

大统一规范群如 $SU(5)$ 或 $SO(10)$ 破缺时, 可以产生大统一磁单极子, 当然这些磁单极子的剩余丰度比较低, 可能存在于大的星体之中. 考虑Callan-Rubakov Process, 这类磁单极子的效应是加速质子衰变. Super-Kamiokande实验对相关中微子Flux进行测量, 但它考虑的中微子能量较低, 从19~55 MeV. 我们正在进行相关研究, 并将提出在Hyper-Kamiokande实验和DUNE实验中探测0.5 GeV左右的中微子和在宇宙线实验中探测0.5 GeV左右的正电子等.

5 结论与展望

大统一理论描述了自然界存在的4种基本相互作用:

强、弱、超荷和引力相互作用. 因为标准模型的3个规范耦合常数在高能标不能统一在一起, 所以首先要研究如何得到规范耦合常数统一. 考虑 $U(1)_Y$ 超荷正则归一化因子和Grand Desert Hypothesis, 在TeV能标左右引入新的粒子来得到标准模型规范耦合常数的统一. 这类模型能自然解释标准模型稳定性问题, 其最经典的例子是超对称标准模型. 在四维大统一模型中, 介绍了Pati-Salam $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ 模型、Georgi-Glashow $SU(5)$ 模型、Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ 模型和 $SO(10)$ 模型, 其中详细介绍了非超对称和超对称 $SU(5)$ 模型, 并讨论了其正确的预言、存在的问题及其解决方案和质子衰变等, 还简单介绍了高维Orbifold大统一模型和超弦模型, 最后讨论了如何探寻大统一理论: 在对撞机上寻找新的粒子及其粒子特性和质子衰变的现在和将来的实验检验以及可能的探测方案. 目前寻找大统一模型的困难主要有两点: (1) 大型强子对撞机的质心能量不够高. 为了在对撞机上寻找大统一模型预言的新的粒子及其粒子特性, 可能需要建造未来环形强子对撞机(FCC_{hh})或者超级质子质子对撞机(super proton-proton collider, SPPC). (2) 为了直接寻找质子衰变, 可能要建造比Hyper-Kamiokande和DUNE更大的实验. 总之, 大统一模型和超弦大统一模型是物理学的终极目标, 故它们的检验也许还需要几代人的努力奋斗.

参考文献

- 1 Reines F, Cowan C L, Goldhaber M. Conservation of the number of nucleons. Phys Rev, 1954, 96: 1157–1158
- 2 Weinberg S. The cosmological constant problem. Rev Mod Phys, 1989, 61: 1–23
- 3 Barger V, Jiang J, Langacker P, et al. Gauge coupling unification in the standard model. Phys Lett B, 2005, 624: 233–238
- 4 Barger V, Jiang J, Langacker P, et al. Non-canonical gauge coupling unification in high-scale supersymmetry breaking. Nucl Phys B, 2005, 726: 149–170
- 5 Li T, Liao W. Low-energy gauge unification theory. Mod Phys Lett A, 2002, 17: 2393–2407
- 6 Pati J C, Salam A. Lepton number as the fourth color. Phys Rev D, 1974, 10: 275–289
- 7 Georgi H, Glashow S L. Unity of all elementary particle forces. Phys Rev Lett, 1974, 32: 438–441
- 8 Barr M S. A new symmetry breaking pattern for $SO(10)$ and proton decay. Phys Lett B, 1982, 112: 219–222
- 9 Derendinger J P, Kim J E, Nanopoulos D V. Anti- $SU(5)$. Phys Lett B, 1984, 139: 170–176
- 10 Antoniadis I, Ellis J R, Hagelin J S, et al. The flipped $SU(5) \times U(1)$ string model revamped. Phys Lett B, 1989, 231: 65–74
- 11 Jiang J, Li T, Nanopoulos D V. Testable flipped $SU(5) \times U(1)_X$ models. Nucl Phys B, 2007, 772: 49–66
- 12 Jiang J, Li T, Nanopoulos D V, et al. F- $SU(5)$. Phys Lett B, 2009, 677: 322–325
- 13 Jiang J, Li T, Nanopoulos D V, et al. Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ models from F-theory. Nucl Phys B, 2010, 830: 195–220
- 14 Kawamura Y. Gauge symmetry breaking from extra space S^1/Z_2 . Prog Theor Phys, 2000, 103: 613–619
- 15 Kawamura Y. Triplet doublet splitting, proton stability and extra dimension. Prog Theor Phys, 2001, 105: 999–1006

- 16 Kawamura Y. Split multiplets, coupling unification and extra dimension. *Prog Theor Phys*, 2001, 105: 691–696
- 17 Altarelli G, Feruglio F. $SU(5)$ grand unification in extra dimensions and proton decay. *Phys Lett B*, 2001, 511: 257–264
- 18 Hall L J, Nomura Y. Gauge unification in higher dimensions. *Phys Rev D*, 2001, 64: 055003
- 19 Hebecker A, March-Russell J. A minimal $S^1/(Z_2 \times Z'_2)$ orbifold GUT. *Nucl Phys B*, 2001, 613: 3–16
- 20 Li T. GUT breaking on $M^4 \times T^2/(Z_2 \times Z'_2)$. *Phys Lett B*, 2001, 520: 377–384
- 21 Li T. $N=2$ supersymmetric GUT breaking on T^2 orbifolds. *Nucl Phys B*, 2001, 619: 75–104
- 22 Bionta R M, Blewitt G, Bratton C B, et al. A search for proton decay into $e^+\pi^0$. *Phys Rev Lett*, 1983, 51: 27–30
- 23 Abe K, Hayato Y, Iyogi K. Search for proton decay via $p \rightarrow e^+\pi^0$ and $p \rightarrow \mu^+\pi^0$ in 0.31 megaton years exposure of the Super-Kamiokande water Cherenkov detector. *Phys Rev D*, 2017, 95: 012004
- 24 Yokoyama M T. The Hyper-Kamiokande experiment. 2017, arXiv:1705.00306



李田军

中国科学院理论物理研究所研究员, 博士生导师. 1991年7月于武汉大学物理系获学士学位, 1994年7月于中国科学院理论物理研究所获硕士学位, 2000年8月于威斯康星大学麦迪逊分校物理系获博士学位. 2000年9月至2002年8月, 在宾西法尼亚大学物理天文系做博士后. 2002年9月至2005年8月, 在普林斯顿高等研究院做研究人员. 研究方向为超弦模型构造和唯象、大统一理论、超对称、粒子物理模型构造和唯象、对撞机物理、暗物质和宇宙学等. 曾获得威斯康星大学麦迪逊分校J. Van Vleck Fellowship、普林斯顿高等研究院Fellowship等.

Grand unified theories and proton decay

Tianjun Li^{1,2}

¹ *Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;*

² *School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*
E-mail: tli@itp.ac.cn

There exists four fundamental interactions in Nature: strong, weak, hypercharge, and gravity interactions. Based on the conjecture that all the fundamental interactions have the same origin, physicists have explored the Grand Unified Theories, which describes the most fundamental laws in the Universe. From the historical point of view, the first unification was done by Newton, who unified the celestial and terrestrial gravity. The second unification was done by Maxwell, who unified the electric and magnetic interactions into an electromagnetic interaction. Nordström, Kaluza, and Klein for the first time proposed the extra dimension(s), and tried to unify the known gravity and electromagnetic interaction into a five-dimensional gravity. This idea is indeed great, but unfortunately does not describe Nature. The third unification was done by Glashow, Salam, and Weinberg, who described the electromagnetic and weak interactions via an electroweak theory. Therefore, how to construct the Grand Unified Theories to describe all the fundamental interactions is a very important and fundamental problem. As we know, strong, weak, and hypercharge interactions are gauge interactions, whose gauge groups are $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Thus, we believe they have the same origin: a high scale Grand Unified Theory with gauge group $SU(5)$ or $SO(10)$, etc. Exactly speaking, there are two kinds of definitions for the Grand Unified Theories: (1) Gauge interaction unification; (2) Fermion unification. In this paper, we only consider the first definition, and do not consider the Grand Unified Theories which unify three generations of the Standard Model fermions. However, the Grand Unified Theories do not include gravity. Especially, gravity quantization is another important problem in physics. Right now, the most promising theory for quantum gravity is string theory. Therefore, the models, which can unify all the four fundamental interactions in Nature, are probably the string models. In particular, string models can solve the major problems in the four-dimensional Grand Unified Theories naturally. Thus, the Grand Unified Theories and string models will give us a Theory of Everything. In principle, it can explain all the phenomena in the Universe, and thus it is the final goal of the physics. Historically, many great physicists such as Einstein et al have studied the Grand Unified Theories. Right now, we have constructed various Grand Unified Theories and string models, and thus need further experiments to test them. In this paper, we first briefly explain the Standard Model and its problems. With the canonical normalized $U(1)_Y$ and Grand Desert Hypothesis, we can achieve the gauge coupling unification by introducing new particles around TeV scale. Especially, we explain the supersymmetric Standard Models in details. We discuss the four-dimensional Pati-Salam $SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ models, Georgi-Glashow $SU(5)$ models, Flipped $SU(5) \times U(1)_X$ models, and $SO(10)$ models. We explain the non-supersymmetric and supersymmetric $SU(5)$ models in details, including its correct predictions, the main problems and solutions, as well as proton decays, etc. We also briefly discuss the high dimensional orbifold Grand Unified Theories and string models. Finally, we study how to probe these models: searches for the new particles with predicted properties at the colliders, as well as the current and future proton decay experiments and possible new proposals.

grand unified theories, proton decay, fundamental interactions, standard model, supersymmetry

doi: 10.1360/N972018-00002