论文

圆形电场活化聚合物致动器中的褶皱和吸合不稳定性

夏劲, 雍华东, 周又和*

西部灾害与环境力学教育部重点实验室, 兰州大学土木工程与力学学院力学与工程科学系, 兰州 730000

* 联系人, E-mail: zhouyh@lzu.edu.cn

收稿日期: 2011-06-29; 接受日期: 2011-09-26; 网络出版日期: 2011-10-19

国家自然科学基金资助项目(批准号: 11032006)

摘要 电场活化聚合物(Dielectric Elastomer, DE)具有优异的力学性能, 在电场作用下应变可达 100%以上. 作为一种新型的致动器, 它被广泛地应用于医疗设备、适应性光学仪器和机器人等领域. 根据 Tommasi 等人研究 DE 薄膜稳定性的方法, 本文着力分析了圆形电场活化聚合物致动器中的褶皱和吸合不稳定性, 旨在方便、直接地指导致动器设计. 基于简单的几何和材料假定, 作者考虑了预拉伸、致动区尺寸和材料模型这些影响 DE 技术应用的重要因素, 采用一种解析方法有效地描述了褶皱和吸合失稳, 并对失稳机理做出了清晰的物理解释. 作为结果, 本文给出了不同预拉伸值时失稳的一系列临界参数, 找到了满足不同需求的最优预拉伸值, 并与实验比较吻合较好.

关键词 电场活化聚合物(DE), 不稳定性, 褶皱, 吸合, 致动器

PACS: 85.50.-n, 46.25.Hf, 46.70.Hg, 46.32.+x

作为新一代电活性聚合物(EAP)材料, 电场活化聚合物(DE)在医疗设备、适应性光学仪器、发电机和机器人等科技领域具有广阔的应用前景^[1-4]. DE 是一类电子性的 EAP, 如软硅树脂, 聚丙烯酸橡胶等. 相比其他智能材料, 它有着质量轻、体积小、耗能低、反应快速和不易断裂等优点^[2,5,6]. 随着材料科学的迅猛发展, DE 的性能不断提升, 致动力小、稳定性差、施加电压高等传统限制得到改善^[7,8]. 早些时间, 人们用压电陶瓷取代笨重的马达, 获得了有效的致动器功能. 不过许多压电材料变形较小, 无法满足大变形的需求. 如今, DE 的发展让人们找到了新的方向. 在电场作用下, DE 材料有很高的适应性, 它可以发

生 100% 以上的应变^[9], 完成电能与变形能之间直接的转换. 电场活化聚合物致动器(Dielectric Elastomer Actuator, DEA)的原型是由两个电极和夹在中间的 DE 薄膜组成的, 如图 1 所示. 对电极施加一电压, 产生的 Maxwell 应力使 DE 薄膜沿电力线方向收缩, 同时沿垂直于电力线方向膨胀, 薄膜厚度减小且表面积增大^[10,11], 产生较大的变形.

在过去十年里, 很多电场活化聚合物致动器设计理念被提出^[9,12-14], 其中一些设计的可行性已得到实验证实. 但这并不意味着这种新型致动器已经拥有十分成熟的应用价值. 研究人员的各项工作表明, DEA 的可靠性和使用寿命仍是亟待解决的问题. 作

引用格式: 夏劲, 雍华东, 周又和. 圆形电场活化聚合物致动器中的褶皱和吸合不稳定性. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, 41: 1307-1318

Xia J, Yong H D, Zhou Y H. Wrinkling and pull-in instabilities of circular dielectric elastomer actuators (in Chinese). Sci Sin Phys Mech Astron, 2011, 41: 1307-1318, doi: 10.1360/132011-777

为影响 DEA 应用的一项重要因素, DE 力学行为及稳定性问题成为研究工作者关注的焦点.

以下给出了造成 DE 薄膜失稳的几种原因^[11,15]:

(1) 褶皱失稳, 薄膜抗弯刚度很低, 受面内压力时薄膜会出现褶皱现象^[16~18]. 在典型的致动系统中^[19], DE 薄膜预拉伸后被装配在一个硬框架内, 薄膜仅在中心部分覆有电极(称为致动区, 其他区域称为非致动区). 当对电极施加电压或电荷后, 致动区厚度减小而表面积增大, 受硬框架和致动区约束的非致动区会受面内压力出现褶皱失稳; (2) 吸合(pull-in)失稳, 在 Maxwell 效应作用下, 两电极挤压 DE 薄膜使其厚度减小, 当电压或电荷超过某一临界值时, 薄膜再也无法抵抗电极的挤压, 厚度急剧减小, 即发生吸合失稳. 除了这种情形, 类似的吸合现象还广泛地存在于各种微机电系统中并受到研究人员的深入关注^[20~22]; (3) 电击穿, 即 DE 薄膜在通常条件下是不导电的, 但在很强的电场中它的绝缘性能会遭到破坏. 研究发现, DE 薄膜的介电强度随其变形的增大而增大^[9,23].

最近几年, 一些阐释 DE 失稳机理的理论和数值分析方法被提出. Zhao 和 Suo 等人系统分析了 DE 中的力电不稳定性问题^[24~27]. 他们研究了 DE 薄膜中双态共存的情况^[24], 提出了分析 DE 力电不稳定性的方法^[25], 并给出了计算 DE 薄膜在电场作用下变形的通用有限元程序^[26]等. Suo^[28]最近发表了一篇关于 DE 的综述, 文中详细讲述了利用连续介质力学与热力学思想, 并结合实验观测来研究 DE 的一套理论. Keplinger 等人^[29]设计了一套实验用以观测 DE 薄膜中的失稳现象, 获得了发生褶皱和吸合失稳的电场值. 同时, 预拉伸对提升 DEA 性能的重要性已经得到了多篇文章的证实^[9,11,30], 实验观察显示存在最优预拉伸值. Plante 和 Dubowsky^[11]用数值和实验手段分析了圆形 DEA 的大规模失效模式. 最近, Tommasi 等人^[31]提出了一种半解析方法来分析条形 DEA 中的

图 1 电场活化聚合物致动器原型^[11]

Figure 1 The prototype of dielectric elastomer actuators (DEAs) [11].

褶皱和吸合不稳定性问题, 与实验比较得到了较好的结果. 之后, Tommasi, Puglisi 和 Zurlo^[32]给出了一种简单的图形方法用以分析 DE 薄膜的稳定性, 其结果与他们之前的工作^[31]相吻合.

前述研究工作主要在于探究 DE 薄膜的各种失稳模式, 描述简单形状 DE 薄膜在力电耦合作用下的失稳历程, 寻找分析 DE 薄膜稳定性的基本方法, 这为 DEA 设计提供了有力的帮助. 本文在 Tommasi 等人^[31]工作的基础上, 采用半解析方法具体分析了圆形电场活化聚合物致动器的稳定性问题, 旨在方便、直接地指导 DEA 设计. 基于简单的几何和材料假定, 作者推导出一种有效的解析方法, 它可以描述褶皱和吸合失稳, 并对失稳机理做出清晰的物理解释. 本文考虑了可能出现的多种失稳形态, 同时考虑了不同预拉伸值、薄膜尺寸和材料模型对失稳的影响. 需要说明的是, 我们没有考虑电击穿.

1 物理建模

1.1 问题描述

考虑一圆形电场活化聚合物致动器, DE 薄膜中心部分的上下表面覆盖有电极(可随薄膜变形而变形), 薄膜沿径向预拉伸后外边缘被约束住, 如图 2 所

图 2 几何模型图

Figure 2 Scheme of the model.

示. 施加电压或电荷后, 致动区发生挤压变形, 厚度减小面积增大; 同时非致动区厚度增大面积减小, 但是薄膜外边缘位移始终为零. DE 薄膜的原始尺寸为半径 $\tilde{R}$, 厚度 $\tilde{H}$; 用半径 $\tilde{R}$ 对厚度无量纲化后得到半径为 1, 厚度 $\bar{H} = \tilde{H} / \tilde{R}$ 的薄膜尺寸. 其中电极覆盖的灰色区域为致动区, 剩下区域为非致动区, 其尺寸已在图 2 中给出. 特别的, 我们认为薄膜抗弯刚度为零, 任何面内压力将导致薄膜屈曲失稳, 出现褶皱区^[16].

1.2 建立模型

1.2.1 几何描述

我们在薄膜中心建立柱坐标. 在参考构型中, 致动区和非致动区内任一点坐标分别为 $(\hat{R}, \hat{\Theta}, \hat{Z})$ 和 (R, Θ, Z) ; 在致动构型中, 对应坐标分别为 $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$ 和 (r, θ, z) .

由于 DE 薄膜很薄, 我们认为在致动构型中致动区和非致动区边缘受到均布载荷, 同时我们忽略致动区和非致动区在交界面处的几何相容性, 假定薄膜厚度在此处突变. 这种假定具有一定的合理性^[31,33,34]. 与交界面处几何描述类似, 电场的边缘效应被忽略. 根据这些假定, 薄膜将经历纯拉压变形, 主应力和主伸长比方向与 r, θ, z 方向一致(以后用 1, 2, 3 分别代替 r, θ, z 方向). 致动区和非致动区的变形具体如下:

致动区:

主伸长比为

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \frac{\hat{r}}{\hat{R}}, \quad \hat{\lambda}_3 = \frac{\hat{h}}{\hat{H}}, \quad (1)$$

其中 $\hat{R}, \hat{H}$ 为参考构型时致动区内任一点半径和薄膜厚度, $\hat{r}, \hat{h}$ 为致动构型时同一点的半径和薄膜厚度. 假定 DE 为不可压缩材料, $\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3 = 1$, 所以 $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_3^{-1/2}$.

变形梯度张量 $\hat{\mathbf{F}}$ 为

$$[\hat{\mathbf{F}}_{ij}] = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_3 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中 i, j 从 1 到 3, 分别对应 r, θ, z 方向.

非致动区:

主伸长比为

$$\lambda_1 = \frac{dr}{dR}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{R}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{H}, \quad (3)$$

其中 R, H 为参考构型时非致动区内任一点半径和薄膜厚度, r, h 为致动构型时同一点的半径和薄膜厚度.

变形梯度张量 $\mathbf{F}$ 为

$$[\mathbf{F}_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

1.2.2 本构方程

根据 Bustamante 等人的观点^[10], 我们将薄膜任一点总应力张量 $\mathbf{T}$ 分为弹性部分 $\mathbf{T}^{\text{ela}}$ 和力电耦合部分 $\mathbf{T}^{\text{elc}}$ (也就是 Maxwell 应力):

$$\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}_{ij}^{\text{ela}} + \mathbf{T}_{ij}^{\text{elc}}, \quad (5)$$

其中 i, j 从 1 到 3 分别为柱坐标分量 r, θ, z . 其对应的名义应力(第一阶 Piola-Kirchhoff 应力)为

$$\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{S}_{ij}^{\text{ela}} + \mathbf{S}_{ij}^{\text{elc}} = \mathbf{J} \mathbf{T}_{ik}^{\text{ela}} \mathbf{F}_{jk}^{-1} + \mathbf{J} \mathbf{T}_{ik}^{\text{elc}} \mathbf{F}_{jk}^{-1}, \quad (6)$$

其中 $\mathbf{J} = \det \mathbf{F}$, $\mathbf{F}$ 为变形梯度张量.

力电耦合部分 $\mathbf{T}^{\text{elc}}$ 为^[10]

$$\mathbf{T}_{ij}^{\text{elc}} = \varepsilon \left(E_i E_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \delta_{ij} \right), \quad (7)$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, ε_0 为真空介电常数, ε_r 为材料相对介电常数, $\mathbf{E}$ 为施加于 DE 薄膜的真实电场强度.

弹性部分 $\mathbf{T}^{\text{ela}}$ 采用 neo-Hookean 模型^[19,25]:

$$\mathbf{T}_i^{\text{ela}} = G \lambda_i^2 - \tilde{p}, \quad (i=1,2,3), \quad (8)$$

其中 G 是剪切模量, λ_i 是主伸长比, $\tilde{p}$ 是基于不可压缩性约束的拉格朗日乘子. 引入无量纲量:

$$t_i = \frac{T_i}{G}, \quad s_i = \frac{S_i}{G}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{G}. \quad (9)$$

将以上公式具体用于致动区和非致动区:

致动区:

$$\begin{aligned} \hat{t}_i &= \hat{\lambda}_i^2 - \hat{p} + \frac{\varepsilon E^2}{2G} (2\delta_{i3} - 1), \\ \hat{s}_i &= \hat{\lambda}_i - \hat{p} \hat{\lambda}_i^{-1} + \frac{\varepsilon E^2}{2G} (2\delta_{i3} - 1) \hat{\lambda}_i^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 E 为电场强度沿 z 方向的分量, 且致动区真实场强 $\hat{\mathbf{E}} = (0, 0, E)$.

非致动区:

$$t_i = \lambda_i^2 - p, \quad s_i = \lambda_i - p\lambda_i^{-1}. \quad (11)$$

致动器控制有电压控制和电荷控制两种, 即控制电极上的电压 V 或电荷量 Q .

电压控制:

$$\hat{\mathbf{E}} = \left(0, 0, \frac{V}{H\hat{\lambda}_3} \right). \quad (12)$$

电荷控制:

$$\hat{\mathbf{E}} = \left(0, 0, \frac{Q}{\varepsilon\hat{\lambda}_1^2 A} \right), \quad (13)$$

这里 $A = \pi\chi^2$ 是致动区的参考构型面积. 以后我们将分别考虑这两种控制方式.

1.2.3 平衡条件

致动区:

电压控制:

将(12)式代入(10)式得

$$\hat{t}_i = \hat{\lambda}_i^2 - \hat{p} + \frac{\varepsilon V^2}{2G\bar{H}^2 \hat{\lambda}_3^2} (2\delta_{i3} - 1), \quad (14)$$

$$\hat{s}_i = \hat{\lambda}_i - \hat{p}\hat{\lambda}_i^{-1} + \frac{\varepsilon V^2}{2G\bar{H}^2 \hat{\lambda}_3^2} (2\delta_{i3} - 1)\hat{\lambda}_i^{-1}.$$

引入一参量 κ_V [31]:

$$\kappa_V = \frac{\varepsilon V^2}{2G\bar{H}^2}, \quad (15)$$

它代表给定电压下的无量纲电场自由能密度.

由于将 Maxwell 应力融入本构方程, 因此有应力边界条件 $\hat{t}_3 = 0$, 于是得到

$$\hat{p} = \hat{\lambda}_3^2 + \frac{\kappa_V}{\hat{\lambda}_3^2}, \quad (16)$$

将(15)和(16)式代入(14)式可得

$$\begin{aligned} \hat{t}_1 &= \hat{\lambda}_1^2 - \hat{\lambda}_3^2 - 2\frac{\kappa_V}{\hat{\lambda}_3^2} = \hat{\lambda}_3^{-1} - \hat{\lambda}_3^2 - 2\frac{\kappa_V}{\hat{\lambda}_3^2}, \\ \hat{s}_1 &= \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_3^2 \hat{\lambda}_1^{-1} - 2\frac{\kappa_V}{\hat{\lambda}_3^2 \hat{\lambda}_1} = \hat{\lambda}_3^{-\frac{1}{2}} - \hat{\lambda}_3^{\frac{5}{2}} - 2\kappa_V \hat{\lambda}_3^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

电荷控制:

与上述电压控制同理, 此处引入无量纲电场自由能密度 κ_Q [31]:

$$\kappa_Q = \frac{Q^2}{2G\varepsilon A^2}. \quad (18)$$

利用应力边界条件最终得到

$$\begin{aligned} \hat{t}_1 &= \hat{\lambda}_1^2 - \hat{\lambda}_3^2 - 2\kappa_Q \hat{\lambda}_3^2 = \hat{\lambda}_3^{-1} - \hat{\lambda}_3^2 - 2\kappa_Q \hat{\lambda}_3^2, \\ \hat{s}_1 &= \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_3^2 \hat{\lambda}_1^{-1} - 2\kappa_Q \hat{\lambda}_3^2 \hat{\lambda}_1^{-1} = \hat{\lambda}_3^{-\frac{1}{2}} - \hat{\lambda}_3^{\frac{5}{2}} - 2\kappa_Q \hat{\lambda}_3^{\frac{5}{2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

非致动区:

利用应力边界条件 $t_3 = 0$ 和(11)式可得

$$\begin{aligned} t_1 &= \lambda_1^2 - \lambda_3^2, \\ s_1 &= \lambda_1 - \lambda_3^2 \lambda_1^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

现在需找到非致动区在致动区与非致动区界面处的主伸长比 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

由材料不可压缩性有 $H(\pi - \pi R^2) = h(\pi v^2 - \pi r^2)$, 其中 R, H 为参考构型时非致动区内任一点半径和薄膜厚度, r, h 为致动构型时同一点的半径和薄膜厚度. 将此式变形可得

$$r = \sqrt{v^2 - (1 - R^2)H/h}. \quad (21)$$

由(3)和(21)式可得

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} = \frac{R}{r \lambda_3} = \frac{R}{\sqrt{\lambda_3^2 v^2 - \lambda_3(1 - R^2)}}. \quad (22)$$

根据伸长比的定义有 $\lambda_1 = \frac{dr}{dR}$, 于是非致动区致

动构型时的径向厚度 $v - \hat{\lambda}_1 \chi$ 可用一积分表示

$$\begin{aligned} \int_{\chi}^1 \frac{dr}{dR} dR &= \int_{\chi}^1 \lambda_1 dR = \int_{\chi}^1 \frac{R}{\sqrt{\lambda_3^2 v^2 - \lambda_3(1 - R^2)}} dR \\ &= v - \left(v^2 - \frac{1 - \chi^2}{\lambda_3} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (23)$$

那么 $v - \hat{\lambda}_1 \chi = v - (v^2 - \frac{1 - \chi^2}{\lambda_3})^{\frac{1}{2}}$, 所以

$$\lambda_3 = \frac{1 - \chi^2}{v^2 - \hat{\lambda}_3^{-1} \chi^2}. \quad (24)$$

将 $\lambda_3 > 0$ 代入(24)式得 $\hat{\lambda}_3 > \frac{\chi^2}{v^2}$, 又由变形可知

$$\hat{\lambda}_3 < \frac{1}{v^2}, \quad \text{于是 } \frac{\chi^2}{v^2} < \hat{\lambda}_3 < \frac{1}{v^2}.$$

根据伸长比定义有 $\lambda_2 = \frac{\hat{\lambda}_1 \chi}{\chi} = \hat{\lambda}_1$, 于是

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} = \frac{\hat{\lambda}_3^{\frac{1}{2}} v^2 - \hat{\lambda}_3^{-\frac{1}{2}} \chi^2}{1 - \chi^2}. \quad (25)$$

将(24)和(25)式代入(20)式得

$$t_1 = \left(\frac{\hat{\lambda}_3^{\frac{1}{2}} \nu^2 - \hat{\lambda}_3^{-\frac{1}{2}} \chi^2}{1 - \chi^2} \right)^2 - \left(\frac{1 - \chi^2}{\nu^2 - \hat{\lambda}_3^{-1} \chi^2} \right)^2, \quad (26)$$

$$s_1 = \frac{\hat{\lambda}_3^{\frac{1}{2}} \nu^2 - \hat{\lambda}_3^{-\frac{1}{2}} \chi^2}{1 - \chi^2} - \left(\frac{1 - \chi^2}{\hat{\lambda}_3^{\frac{1}{6}} \nu^2 - \hat{\lambda}_3^{-\frac{5}{6}} \chi^2} \right)^3.$$

最后, 在致动区和非致动区的交界面处应该满足力学平衡:

$$\hat{s}_1 = s_1, \quad (27)$$

这个方程决定了系统最终的平衡构型(即致动构型).

2 褶皱和吸合不稳定性

随着施加电压或电荷的增大, 致动区不断扩展而非致动区中的预应力逐渐得以释放. 可以证明(见附录): 非致动区在随施加电压或电荷的增大而逐渐收缩的过程中, 其径向应力始终是半径的单调增函数, 其环向应力始终是半径的单调减函数. 因此非致动区内边缘处的径向应力首先被完全释放, 如果继续增大电压或电荷, 非致动区将受到致动区的面内挤压发生褶皱失稳. 所以, DE 薄膜可能出现 3 种失稳形态: (1) 随着施加电压或电荷不断增大, 非致动区发生褶皱失稳; (2) 非致动区内边缘处径向应力还没有被完全释放, 而致动区就已经承受不了电极的面外挤压而发生吸合失稳; (3) 非致动区内边缘处径向应力被完全释放, 同时致动区已抵达承受电极挤压的极限, 如果继续增大电压或电荷, 褶皱失稳和吸合失稳将同时发生.

以下将对电压控制和电荷控制分别考虑薄膜的失稳机理.

2.1 电压控制

为了求解(27)式, 我们将(17)式中应力 $\hat{s}_1$ 和(26)式中应力 s_1 看作 $\hat{\lambda}_3$ 的函数, 而 κ_V 和 ν 可以事先给定, 如图 3 所示. 应力 $\hat{s}_1(\hat{\lambda}_3, \kappa_V)$ 和 $s_1(\hat{\lambda}_3, \nu)$ 的自变量取值范围分别为 $\hat{\lambda}_3 \in (0, 1/\nu^2]$ 和 $\hat{\lambda}_3 \in (\chi^2/\nu^2, 1/\nu^2]$, 因此求解(27)式的搜索范围为 $\hat{\lambda}_3 \in (\chi^2/\nu^2, 1/\nu^2]$ (图3中采用 $\hat{\lambda}_3 \in (\chi^2/\nu^2, 1]$, 经检验并不会对分析结果造成影响). 从图中可以看出, $\hat{s}_1$ 是依赖于 κ_V 的上凸函数, s_1 是依赖于 ν 的增函数. 箭头所指的方向为 κ_V , ν 增大的方向.

图3 电压控制下致动区与非致动区交界面处的应力-应变曲线

Figure 3 Stress-strain curves on the interface between the activated and non-activated region in the case of voltage control.

实线与虚线的交点满足了致动区与非致动区交界面处的力学平衡条件(27)式, 对应平衡构型. 给定一组 κ_V 和 ν , 即给定一条实线和虚线, 它们可能会有三个交点、两个交点和一个交点这几种情况. 当有多个交点时, 最大的那一个对应稳定存在的平衡构型, 这是可以用最小势能原理证实的. 当然, 交点处对应的应力如果为负值, 则不是真实的平衡构型. 因为薄膜假定认为抗弯刚度为零, 任何面内压力将导致薄膜失稳, 出现褶皱区.

如图 4(a)所示, 给定致动区半径 χ , 当预拉伸半径 ν 较小时, 实线与虚线的交点刚开始在 x 轴上方, 即交界面处的径向应力为正值, 整个薄膜还处于一种拉伸的平衡构型. 随着 κ_V 的增大, 交点向 y 轴负方向移动, 非致动区的拉伸状态逐渐放松, 交界面处的径向应力不断减小, 直到交点落在 x 轴上. 如果 κ_V 继续增大, 交点将位于 x 轴下方, 交界面处的应力为负值. 由于薄膜抗弯刚度为零, 面内压力导致薄膜屈曲失稳, 非致动区沿径向将出现褶皱. 当 κ_V 取 κ_V^{comp} 时对应失稳临界状态. 图 5(a)给出了交界面处应力随 κ_V 变化的曲线. 从图 4(b)可以看出, 当 ν 较大时, 较小的交点落在 x 轴上, 但这并不是稳定存在的平衡构型(较大交点对应稳定存在的平衡构型), 因此这并不对应褶皱失稳.

如图 6(a)所示, 当预拉伸半径 ν 较大时, 随着 κ_V

图4 褶皱失稳应力应变曲线

(a) 对应真实存在的褶皱失稳; (b) 对应非真实存在的褶皱失稳

Figure 4 Stress-strain curves corresponding to the wrinkling failure which really exists (a) and that which doesn't really exist (b).

的增大, 实线将与虚线相切. 此时切点位于 x 轴上方, 整个薄膜处于一种拉伸的平衡构型. 当 κ_V 继续增大, 实线与虚线的交点将突变为负值. 这种交界面处的应力突变显示: 当施加电压超过某一临界值时, 致动区再也无法抵抗电极的挤压, 薄膜厚度急剧减小, 发生吸合失稳. 当 κ_V 取 κ_V^{pull} 时对应失稳临界状态. 图 5(b) 给出了交界面处应力随 κ_V 变化的曲线. 从图 6(b) 可以看出, 当 ν 较小时切点应力为负值. 这并不对应真实存在的吸合失稳, 因为薄膜不能承受面内压力, 褶皱失稳已在施加电压较小时发生(可参看图 4(a)).

从以上分析发现, 对一给定 χ , 预拉伸半径 ν 较小时出现褶皱失稳, ν 较大时出现吸合失稳. 可以推断, 当 ν 取临界值 ν_{crit} 时, 实线与虚线应该相切, 且

图5 交界面处径向应力随 κ_V 变化曲线

(a) 对应褶皱失稳; (b) 对应吸合失稳; (c) 对应褶皱和吸合失稳同时出现

Figure 5 Radial stress on the interface vs. κ_V . (a) corresponding to the wrinkling failure; (b) corresponding to the pull-in failure; (c) corresponding to the simultaneous attainment of both wrinkling and pull-in failures.

切点对应的应力为零, 即褶皱和吸合失稳同时出现, 如图 7 所示. 图 5(c) 给出了交界面处应力随 κ_V 变化的曲线.

至此, 在给定致动区半径 χ 的情况下, 任意预拉伸半径 ν 对应的失稳机理已经获得. 我们可以利用以上机理推导出一些有用的结果. 图 8 给出了预拉伸半径 ν 与失稳临界电场自由能密度 κ_V^{comp} , κ_V^{pull} 的关系.

函数 $\kappa_V^{\text{comp}}(\nu)$ 的解析表达式是难以得到的, 但数值解法容易实现, 只需对给定的 ν 搜寻 κ_V , 使实线与虚线的交点刚好落在 x 轴上. κ_V^{comp} 的最大值和其对应的 $\nu_{\text{opt}}^{\text{comp}}$ 已获得

$$\kappa_{V,\text{max}}^{\text{comp}} = 0.2362, \quad \nu_{\text{opt}}^{\text{comp}} = 1.0806.$$

$\kappa_V^{\text{pull}}(\nu)$ 的解析表达式同样是难以得到的. 设 $g(\hat{\lambda}_3) = s_1 - \hat{s}_1$, 令 $s_1 = \hat{s}_1$, $dg/d\hat{\lambda}_3 = 0$, 采用半解析解法可以得到 $\kappa_V^{\text{pull}}(\nu)$. 同理, 令 $s_1 = \hat{s}_1 = 0$, $dg/d\hat{\lambda}_3 = 0$, 可得褶皱和吸合失稳同时出现的临界值

$$\nu_{\text{crit}} = 1.2062, \quad \kappa_V^{\text{crit}} = 0.1637.$$

图 8 对指导致动器设计的意义是很明确的, 它给出了不同预拉伸值下失稳临界电场自由能密度, 显

图 6 吸合失稳应力应变曲线

(a) 对应真实存在的吸合失稳; (b) 对应非真实存在的吸合失稳
Figure 6 Stress-strain curves corresponding to the pull-in failure which really exists (a) and that which doesn't really exist (b).

图 7 褶皱和吸合失稳同时出现的情形

Figure 7 The simultaneous attainment of both wrinkling and pull-in failures.

图 8 失稳临界电场自由能密度

粗实线代表函数 $\kappa_V^{\text{comp}}(\nu)$, 对应褶皱失稳; 细实线代表函数 $\kappa_V^{\text{pull}}(\nu)$, 对应吸合失稳; 虚线代表非真实存在的失稳临界情形

Figure 8 Critical values of the electric free energy density. Bold line represents the function $\kappa_V^{\text{comp}}(\nu)$ corresponding to wrinkling failure; light line represents the function $\kappa_V^{\text{pull}}(\nu)$ corresponding to pull-in failure; dashed lines represent failures which don't really exist.

然, 如果为了使电能储存最多, 预拉伸半径 $\nu_{\text{opt}}^{\text{comp}}$ 是最优值. 但是, 如果设计旨在获得最大许可电场或是最大致动力, $\nu_{\text{opt}}^{\text{comp}}$ 并不是最优值. 结合(12)和(15)式, 可推出失稳临界场强为 $E = \sqrt{2G\kappa_V / \varepsilon} / \hat{\lambda}_3$. 最大致动力则可用 $\Delta S = G[\hat{s}_1(1/\nu^2) - \hat{s}_1(\hat{\lambda}_3)]$ 表征^[31], 其中 $\hat{s}_1(1/\nu^2)$ 为预拉伸构型致动区应力, $\hat{s}_1(\hat{\lambda}_3)$ 为致动构型致动区应力. 与获得图 8 的解法类似, 我们给出不同预拉伸下的失稳临界电场强度和最大致动力, 如图 9 所示(作为算例, 我们采用硅胶薄膜(Nusil CF19-2186)). 从图中看出, 在小范围内可以取 ν_{crit} 作为最优值.

致动区的变形同样是我们所关注的参数. 定义名义径向应变^[19] $e = (\hat{\lambda}_1 / \nu - 1)100\%$. 图 10 给出了预拉伸半径 ν 与致动区最大名义径向应变的关系, 可以看出 ν_{crit} 是最优值.

2.2 电荷控制

根据(19)和(26)式画出应力-应变图, 如图 11 所示. 我们发现吸合失稳是不存在的, 这与文献[31,35]

图 9 最大许可电场(a)和最大致动力(b)

Figure 9 (a) The maximum applicable electric field; (b) the maximum actuating force.

图 10 致动区最大名义径向应变

Figure 10 The maximum nominal radial strain in the activated region.

图 11 电荷控制下致动区与非致动区交界面处的应力-应变曲线

Figure 11 Stress-strain curves on the interface between the activated and non-activated region in the case of charge control.

中的分析一致. 这是因为对一给定 χ , 任一函数 s_i 为增函数而 $\hat{s}_i$ 为减函数. 利用与电压控制中相同的方法可以获得一系列失稳临界参数.

3 Mooney-Rivlin 模型

我们可以将以上研究方法推广到其他情形. 在此部分, 我们选用 Mooney-Rivlin 模型作为总应力张量 $\mathbf{T}$ 中的弹性部分 $\mathbf{T}^{\text{ela}}$ (其他基本描述均不变), 它能够描述更为复杂的材料行为, 且可以退化为 neo-Hookean 模型.

Mooney-Rivlin 应变能函数 W 为

$$W = \frac{C_1}{2}(I_1 - 3) + \frac{C_2}{2}(I_2 - 3), \quad (28)$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}, \quad (29)$$

其中 C_1 和 C_2 为材料常数, I_1 和 I_2 为左 Cauchy-Green 变形张量的第一和第二不变量, $\lambda_i (i=1,2,3)$ 为主伸长比.

$$T_i^{\text{ela}} = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - \bar{p} = C_1 \lambda_i^2 - k C_1 \lambda_i^{-2} - \bar{p}, \quad (30)$$

其中 $\bar{p}$ 是基于不可压缩性约束的拉格朗日乘子, 引入参数 $k = C_2 / C_1$.

此处与之前的分析方法基本一致, 这里就不再赘述, 我们直接给出一些结论:

(1) 当参数 k 较大时, 无论考虑电压控制或电荷控制, 致动器薄膜只存在褶皱不稳定, 而吸合失稳不会出现, 这是与采用 neo-Hookean 模型的不同之处;

(2) 考虑电压控制, 我们发现当参数 k 很小时, Mooney-Rivlin 模型会退化为 neo-Hookean 模型, 吸合失稳再次出现. 当给定 $\chi = 0.3$ 时, 经过试算, 大约 $k \leq 0.08$ 时吸合失稳会再次出现. 当然对不同的 χ , 这个临界 k 值会不同. 考虑电荷控制, 即使参数 k 很小, Mooney-Rivlin 模型退化为 neo-Hookean 模型, 吸合失稳也不会出现;

(3) 参数 k 能很好地描述不同材料的稳定性. 如图 12 所示, k 越大, 系统储存的电能越多, 薄膜的稳定性越好且预拉伸越能提升薄膜稳定性, 这与文献 [36] 中的结论是一致的.

4 实验比较与结论

在此部分, 我们将对模型的理论预测与文献 [31] 中的实验结果进行简单比较. 与文献 [31] 相同, 本文模型(弹性部分 T^{ela} 使用 neo-Hookean 本构方程)也采用硅胶薄膜(Nusil CF19-2186). 其材料常数为: $G=1$ MPa, 真空介电常数 $\epsilon_0=8.85 \times 10^{-12}$ F/m, 材料相对介电常数 $\epsilon_r=2.8$.

值得注意的是文献 [31] 没有具体给出 χ 值, 我们给定 $\chi = 0.37$ 与其进行比较, 如图 13 所示. 本文模型

图 12 不同预拉伸值和参数 k 情形下的失稳临界电场自由能密度 κ_V

Figure 12 The critical electric free energy density κ_V vs. the pre-stretch.

图 13 本文模型对不同预拉伸值情形下失稳临界电场强度的理论预测

Figure 13 Theoretical prediction of the critical electric field for different pre-stretch values.

与实验吻合得比较好, 大约在 $\nu=1.4$ 之前, 预拉伸对 DE 薄膜抵抗褶皱失稳具有正效应, 失稳临界场强 E 随预拉伸半径 ν 的增大而增大; 超过临界值 ν_{crit} 后, 薄膜出现吸合失稳. 结合图 8 还可以看出, 预拉伸对 DE 薄膜抵抗吸合失稳具有负效应, 随着预拉伸的增大, 失稳临界电压减小, 但致动区薄膜的失稳临界厚度也会随预拉伸的增大而变化, 因此才有了图 13 和 [31] 中临界场强先减小后增大的情形.

本文着力讨论了圆形电场活化聚合物致动器中的褶皱和吸合不稳定性, 找到了满足不同需求的最优预拉伸值, 给出了不同预拉伸值情形下失稳的一系列临界参数(临界电场自由能密度、临界电场强度、最大致动力和致动区最大名义径向应变), 并与实验比较吻合较好. 此外, 我们还将不稳定性分析由 neo-Hookean 模型推广到 Mooney-Rivlin 模型, 发现了它们之间的联系和不同之处. 当然, 更加精确的几何和材料响应描述将会在今后进行考虑. 最后, 作者希望本文的工作能为 DEA 设计提供一定帮助.

附录 A

这里我们给出证明: 非致动区在随施加电压或电荷的增大而逐渐收缩的过程中, 其径向应力始终是半径的单调增函数, 其环向应力始终是半径的单调减函数.

对于非致动区, 由正文 (22) 和 (24) 式有主伸长比:

$$\lambda_1 = \frac{R}{\sqrt{\lambda_3^2 \nu^2 - \lambda_3(1-R^2)}}, \quad \lambda_3 = \frac{1-\chi^2}{\nu^2 - \hat{\lambda}_3^{-1} \chi^2}, \quad (a1)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_3} = \frac{\sqrt{\lambda_3^2 \nu^2 - \lambda_3(1-R^2)}}{R \lambda_3}.$$

由正文(11)和(20)式有径向应力和环向应力:

$$t_1 = \lambda_1^2 - \lambda_3^2, \quad t_2 = \lambda_2^2 - \lambda_3^2. \quad (a2)$$

将(a1)式代入(a2)式得

$$t_1 = \frac{R^2}{\lambda_3^2 \nu^2 - \lambda_3(1-R^2)} - \left(\frac{1-\chi^2}{\nu^2 - \hat{\lambda}_3^{-1} \chi^2} \right)^2, \quad R \in [\chi, 1], \quad (a3)$$

$$t_2 = \frac{\lambda_3 \nu^2 + R^2 - 1}{R^2 \lambda_3} - \left(\frac{1-\chi^2}{\nu^2 - \hat{\lambda}_3^{-1} \chi^2} \right)^2, \quad R \in [\chi, 1]. \quad (a4)$$

对(a3)式求导得

$$\frac{dt_1}{dR} = \frac{2R(\lambda_3 \nu^2 - 1)}{\lambda_3(\lambda_3 \nu^2 + R^2 - 1)^2},$$

非致动区收缩时有

$$\lambda_3 > \frac{1}{\nu^2},$$

利用此不等式易得 $\lambda_3 \nu^2 - 1 > 0$, 因此 $\frac{dt_1}{dR} > 0$.

所以, 非致动区在随施加电压或电荷的增大而逐渐收缩的过程中, 其径向应力始终是半径的单调增函数.

对(a4)式求导得

$$\frac{dt_2}{dR} = \frac{2(\lambda_3^{-1} - \nu^2)}{R^3},$$

由 $\lambda_3 > \frac{1}{\nu^2}$ 易得 $\frac{dt_2}{dR} < 0$.

所以, 非致动区环向应力始终是半径的单调减函数.

参考文献

- 1 刘亚东. 电场活化聚合物(DE)平面弯曲致动器设计. 硕士学位论文. 合肥: 合肥工业大学, 2009. 1-10
- 2 Halloran A O, Malley F O, McHugh P. A review on dielectric elastomer actuators, technology, applications, and challenges. J Appl Phys, 2008, 104(7): 071101
- 3 Carpi F, Rossi D D, Kornbluh R, et al. Dielectric elastomers as electromechanical transducers. Amsterdam: Elsevier, 2008
- 4 Koh S, Zhao X, Suo Z. Maximal energy that can be converted by a dielectric elastomer generator. Appl Phys Lett, 2009, 94: 262902
- 5 Pelrine R, Kornbluh R, Joseph J. Electrostriction of polymer dielectrics with compliant electrodes as a means of actuation. Sensor Actuat A-Phys, 1998, 64(1): 77-85
- 6 Shankar R, Ghosh T K, Spontak R J. Dielectric elastomers as next-generation polymeric actuators. Soft Matter, 2007, 3(9): 1116-1129
- 7 Carpi F, Gallone G, Galantini F, et al. Silicone-poly (hexylthiophene) blends as elastomers with enhanced electromechanical transduction properties. Adv Funct Mater, 2008, 18(2): 235-241
- 8 Ha S M, Yuan W, Pei Q B, et al. Interpenetrating polymer networks for high-performance electroelastomer artificial muscles. Adv Mater, 2006, 18(7): 887-891
- 9 Pelrine R, Kornbluh R, Pei Q B, et al. High-speed electrically actuated elastomers with strain greater than 100%. Science, 2000, 287(5454): 836-839
- 10 Bustamante R, Dorfmann A, Ogden R. Nonlinear electroelastostatics: A variational framework. Z Angew Math Phys, 2009, 60(1): 154-177
- 11 Plante J S, Dubowsky S. Large-scale failure modes of dielectric elastomer actuators. Int J Solids Struct, 2006, 43: 7727-7751
- 12 Pei Q, Rosenthal M, Pelrine R, et al. Multifunctional electroelastomer roll actuators and their application for biomimetic walking robots. In: Proceedings of Smart Structures and Materials 2003: Electroactive Polymer Actuators and Devices (EAPAD). San Diego: SPIE, 2003. 281-290
- 13 Plante J S, Santer M, Pellegrino S, et al. Compliant bistable dielectric elastomer actuators for binary mechatronic systems. In: Proceedings of IDECT/CIE 2005: ASME Mechanism and Robotics Conference. Long Beach: ASME, 2005. 121-126
- 14 Zhang R, Lochmatter P, Kunz A, et al. Dielectric elastomer spring roll actuators for a portable force feedback device. In: Proceedings of the 14th Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems. Arlington: IEEE Computer Society, 2006. 347-353
- 15 Moscardo M, Zhao X, Suo Z, et al. On designing dielectric elastomer actuators. J Appl Phys, 2008, 104(9): 093503

- 16 Haughton D M, Ogden R W. On the incremental equations in non-linear elasticity-membrane theory. *J Mech Phys Solids*, 1978, 26(2): 93–110
- 17 Pipkin A C. The relaxed energy density for isotropic elastic membranes. *IMA J Appl Math*, 1986, 36(1): 85–99
- 18 Steigmann D J. Tension-field theory. *Proc R Soc Lond A*, 1990, 429(1876): 141–173
- 19 Wissler M, Mazza E. Modeling of a pre-strained circular actuator made of dielectric elastomers. *Sensor Actuat A-Phys*, 2005, 120: 184–192
- 20 Lin W H, Zhao Y P. Dynamics behavior of nanoscale electrostatic actuators. *Chin Phys Lett*, 2003, 20(11): 2070–2073
- 21 Lin W H, Zhao Y P. Casimir effect on the pull-in parameters of nanometer switches. *Microsyst Tech*, 2005, 11(2-3): 80–85
- 22 Lin W H, Zhao Y P. Pull-in instability of micro-switch actuators: model review. *Int J Nonlin Sci Num*, 2008, 9(2): 175–183
- 23 Sommer-Larsen P, Hooker J, Kofod G, et al. Response of dielectric elastomer actuators. In: *Proceedings of Smart Structures and Materials 2001: Electroactive Polymer Actuators and Devices (EAPAD)*. San Diego: SPIE, 2001. 157–163
- 24 Zhao X, Hong W, Suo Z. Electromechanical hysteresis and coexistent states in dielectric elastomers. *Phys Rev B*, 2007, 76(13): 134113
- 25 Zhao X, Suo Z. Method to analyze electromechanical stability of dielectric elastomers. *Appl Phys Lett*, 2007, 91: 061921
- 26 Zhao X, Suo Z. Method to analyze programmable deformation of dielectric elastomer layers. *Appl Phys Lett*, 2008, 93: 251902
- 27 Suo Z, Zhu J. Dielectric elastomers of interpenetrating networks. *Appl Phys Lett*, 2009, 95: 232909
- 28 Suo Z. Theory of dielectric elastomers. *Acta Mech Solid Sin*, 2010, 23(6): 549–578
- 29 Keplinger C, Kaltenbrunner M, Arnold N, et al. Capacitive extensometry for transient strain analysis of dielectric elastomer actuators. *Appl Phys Lett*, 2008, 92: 192903
- 30 Kofod G. The static actuation of dielectric elastomer actuators: How does pre-stretch improve actuation? *J Phys D-Appl Phys*, 2008, 41: 215405
- 31 Tommasi D D, Puglisi G, Saccomandi G, et al. Pull-in and wrinkling instabilities of electroactive dielectric actuators. *J Phys D-Appl Phys*, 2010, 43: 325501
- 32 Tommasi D D, Puglisi G, Zurlo G. Compression-induced failure of electroactive polymeric thin films. *Appl Phys Lett*, 2011, 98: 123507
- 33 Carr I, Gurtin M E, Slemrod M. Structured phase transition on a finite interval. *Arch Ration Mech Anal*, 1984, 86: 317–351
- 34 Coleman B D. Necking and drawing in polymeric fibers under tension. *Arch Ration Mech Anal*, 1983, 83: 115–137
- 35 Seeger J I, Boser B E. Charge control of parallel-plate, electrostatic actuators and the tip-in instability. *J Microelectromech Syst*, 2003, 12(5): 656–671
- 36 Liu Y, Liu L, Sun S, et al. Electromechanical stability of Mooney-Rivlin-type dielectric elastomer with nonlinear variable dielectric constant. *Polym Int*, 2010, 59: 371–377

Wrinkling and pull-in instabilities of circular dielectric elastomer actuators

XIA Jing, YONG HuaDong & ZHOU YouHe*

*Key Laboratory of Mechanics on Disaster and Environment in Western China attached to the Ministry of Education of China,
Department of Mechanics and Engineering Sciences, School of Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou
730000, China*

When subject to an electric field, a dielectric elastomer (DE) deforms, possibly straining over 100%. Due to their distinctive mechanical properties, the DEs are being developed as actuators for broad applications, such as armaria, adaptive optics, and robots. According to a method to study instabilities of DE films proposed by Tommasi et al, this paper focuses on analyzing wrinkling and pull-in instabilities of circular dielectric elastomer actuators in order to guide the design of actuators conveniently and directly. Based on simple geometrical and material assumptions, the authors consider the effects of pre-stretch, the size of activated region and material model, which are all crucial in technological applications of DEs. A valid analytical method is used to describe the occurrence of wrinkling and pull-in, which gives clear physical interpretations of these failure mechanisms. As a result, this paper gives a series of critical parameters corresponding to instabilities in different pre-stretch values and the optimal pre-stretch values for some needs. They agree with the experiments well.

dielectric elastomer (DE), instability, wrinkling, pull-in, actuators

PACS: 85.50.-n, 46.25.Hf, 46.70.Hg, 46.32.+x

doi: 10.1360/132011-777