

基于滑模方法的不确定分数阶广义系统的鲁棒无源控制*

张程程¹, 任启峰^{1**}, 考永贵², 高存臣¹

(1. 中国海洋大学数学科学学院, 山东 青岛 266100; 2. 哈尔滨工业大学(威海)理学院, 山东 威海 264209)

摘要: 本文研究了基于滑模控制的一类不确定分数阶广义系统的可容许性和鲁棒无源性问题。首先,设计了一种含有奇异矩阵的分数阶积分型切换函数,对其求分数阶导数推导出等效控制,进而得到滑动模态方程。其次,针对滑动模态方程和系统输出方程,利用线性矩阵不等式技巧,给出了系统滑动模态具有鲁棒无源性和可容许性的充分性判据,并进一步建立了鲁棒无源可容许的可解性条件。同时,设计的分数阶滑模控制律保证了闭环系统状态轨迹能够到达预设的切换面。最后,通过一个仿真实例验证了本文结果的有效性。

关键词: 分数阶; 广义系统; 滑模控制; 鲁棒无源性; 可容许性

中图法分类号: O231.2

文献标志码: A

文章编号: 1672-5174(2023)07-147-06

DOI: 10.16441/j.cnki.hdxh.20210370

引用格式: 张程程, 任启峰, 考永贵, 等. 基于滑模方法的不确定分数阶广义系统的鲁棒无源控制[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版), 2023, 53(7): 147-152.

Zhang Chengcheng, Ren Qifeng, Kao Yonggui, et al. Robust passive control of uncertain fractional order singular system via sliding mode approach[J]. Periodical of Ocean University of China, 2023, 53(7): 147-152.

分数阶微积分是对任意阶导数和积分的探索,从数学上讲,它是对经典微积分学的延伸^[1]。分数阶导数具有历史记忆的特性,也越来越多地出现在控制科学和工程领域的应用之中。对分数阶系统的稳定和控制问题进行深入研究是十分必要的,现已有大量相关成果^[2-8]。例如,文献[2]研究了针对分数阶系统的二次型李雅普诺夫函数,文献[3]将李雅普诺夫直接法推广到非线性分数阶系统,并给出了分数阶系统的 Mittag-Leffler 稳定的定义及充分判据,文献[4]研究了时滞分数阶神经网络的 Mittag-Leffler 同步问题,文献[5-6]研究了分数阶广义系统的镇定问题。

滑模控制是研究鲁棒控制问题的一种有效方法^[9-10]。近年来,滑模控制也被应用到分数阶系统中,提出了各种分数阶滑模控制策略和方法^[11-15]。文献[11-12]研究了针对分数阶混沌系统的鲁棒滑模控制器设计问题。文献[13]将滑模控制用于线性多变量分数阶系统的鲁棒调节问题。文献[14]设计了基于扰动观测器的分数阶系统的滑模控制器。文献[15]研究了分数阶系统的高阶滑模观测器问题。现有的分数阶滑模控制经常采用整数阶滑模控制的方法,即对滑模切换函数和李雅普诺夫函数求取一阶导数,进而获得等效控制并研究滑动模态的稳定性。然而,研究并发展分

数阶的滑模控制方法和分数阶稳定性理论似乎会更有意义,例如构造分数阶型的切换函数并求分数阶导数。

无源性理论可以保持系统内部的稳定,这在控制理论中起着非常重要的作用。基于李雅普诺夫函数的稳定性理论也可以用无源性来解释,可以说是对稳定性的一种更高层次的抽象。然而,以往关于无源性的讨论主要集中在整数阶系统的情况下^[16-18]。据作者了解,分数阶广义系统的无源性分析尚未得到研究,本文首次尝试对具有时变不确定参数的分数阶广义系统进行鲁棒无源性分析。

针对一类含扰动的不确定分数阶广义系统,本文基于滑模方法讨论了其具有无源性能的鲁棒可容许性问题。本文工作的主要贡献可概括为以下两方面:

(1)对带外部扰动的不确定分数阶广义系统设计分数阶积分型切换函数,利用分数阶稳定性理论对滑动模态进行稳定性分析并给出充分条件。

(2)首次给出不确定分数阶广义系统鲁棒无源可容许性的充分性判据。

1 问题描述

考虑一类时变不确定分数阶广义系统

* 基金项目:山东省自然科学基金项目(ZR2019MF027)资助

Supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province(ZR2019MF027)

收稿日期:2021-10-20; 修订日期:2021-12-21

作者简介:张程程(1997—),女,硕士生。E-mail: zhangcc0402@126.com

** 通讯作者: E-mail: renqifeng@126.com

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = A(t)x(t) + B_1(u(t) + h(t, x(t))) + B_2\omega(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D\omega(t), \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\alpha \in (0, 1)$; 奇异矩阵 $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的秩为 $r \leq n$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态变量, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ 是输出变量, $\omega(t) \in \mathbb{R}^p$ 是范数有界的外部扰动; $A(t) = A_1 + \Delta A_1(t)$, $C(t) = C_1 + \Delta C_1(t)$, 矩阵 A_1 、 B_1 、 B_2 、 C_1 和 D 均是已知的且具有合适的维数。 $\Delta A_1(t)$ 和 $\Delta C_1(t)$ 是时变的未知矩阵, 代表系统的参数不确定性, 满足 $\Delta A_1(t) = M_1 F(t) N$, $\Delta C_1(t) = M_2 F(t) N$, 矩阵 M_1 、 M_2 和 N 具有合适的维数, $F(t) \in \mathbb{R}^{i \times j}$ 是已知的有界函数, 满足 $F^T(t)F(t) \leq I$ 。此外, 未知的非线性函数 $h(t, x(t)) \in \mathbb{R}^m$ 满足 $\|h(t, x(t))\| \leq \iota \|x(t)\|$, 其中常数 $\iota > 0$ 。

${}^C_0 D_t^\alpha x(t)$ 表示对 $x(t)$ 求从 0 到 t 的 α 阶 Caputo 导数。下面给出几个本文将用到的重要预备知识, 其他相关的分数阶微积分的定义和性质参见文献[1-3]。

定义 1^[5] 分数阶广义系统

$$E {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad \alpha \in (0, 1) \quad (2)$$

被称为是

(I) 正则的, 如果存在常数 s_0 使得 $\det(s_0 E - A)$ 不为零;

(II) 无脉冲的, 如果 $\deg(\det(s_0 E - A)) = r$;

(III) 渐近稳定性的, 如果 $\det(sE - A) = 0$ 的所有有限根都满足 $|\arg(s)| > \frac{\alpha\pi}{2}$;

(IV) 可容许的, 如果系统同时是正则的、无脉冲的和渐近稳定的。

定义 2 分数阶广义系统(1)被称为是鲁棒无源的, 当 $u(t) = 0$ 时, 如果存在常数 $\gamma > 0$ 使得下式

$$-\gamma \int_0^{t^*} \omega^T(t)\omega(t)dt \leq 2 \int_0^{t^*} \omega^T(t)y(t)dt$$

对任意 $t^* > 0$ 和任意可容许的系统不确定性在零初始情况下都成立。

定义 3 分数阶广义系统被称为是具有无源性能的鲁棒可容许的, 如果系统对任何可容许的不确定性同时满足鲁棒无源性和可容许性。

引理 1^[2] 对于分数阶系统

$${}^C_0 D_t^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad \alpha \in (0, 1), \quad (3)$$

如果 $x(t) = 0$ 是系统的平凡解, 则系统(3)被称为是

(I) 稳定的, 如果任意 $x(t) \neq 0$ 使得 $x^T(t) \cdot f(x(t)) \leq 0$ 成立;

(II) 渐近稳定的, 如果任意 $x(t) \neq 0$ 使得 $x^T(t) \cdot f(x(t)) < 0$ 成立。

引理 2^[19] Y 和 Z 是具有合适维数的实矩阵, 对任何满足 $V^T V \leq I$ 的矩阵 V 及常数 $\epsilon > 0$, 不等式

$$YVZ + (YVZ)^T \leq \epsilon^{-1}YY^T + \epsilon Z^T Z$$

成立。

2 主要结果

本节针对分数阶广义系统设计了分数阶积分型切换函数和分数阶滑模控制方法, 依次解决下面三个问题:

(1) 如何设计分数阶积分型切换函数并得到滑动模态方程?

(2) 如何确保滑动模态具有鲁棒无源性和可容许性, 给出对应的充分条件, 并确定控制反馈增益矩阵?

(3) 如何设计滑模控制律使状态轨迹可以到达预设的切换面?

2.1 分数阶积分型切换函数

分数阶积分型切换函数设计如下:

$$s(t) = GEx(t) - G(A_1 + B_1 K) {}^C_0 I_t^\alpha x(t), \quad (4)$$

式中: $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 需满足 GB_1 可逆; $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是控制反馈增益矩阵, 将在后文给定。

根据分数阶微积分的性质^[1], $Ex(t)$ 可改写为

$$\begin{aligned} Ex(t) &= Ex(0) + E {}^C_0 I_t^\alpha D_t^\alpha x(t) = \\ &= Ex(0) + {}^C_0 I_t^\alpha [A(t)x(t) + B_1(u(t) + \\ &\quad h(t, x(t))) + B_2\omega(t)]. \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4), 积分型切换函数变形为

$$s(t) = GEx(0) + {}^C_0 I_t^\alpha [G\Delta A_1(t)x(t) + GB_1(u(t) + h(t, x(t)) - Kx(t)) + GB_2\omega(t)]$$

对 $s(t)$ 求 α 阶导数得

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\alpha s(t) &= G\Delta A_1(t)x(t) + GB_1(h(t, x(t)) + \\ &\quad u(t) - Kx(t)) + GB_2\omega(t). \end{aligned} \quad (6)$$

令 ${}^C_0 D_t^\alpha s(t) = 0$, 得到等效控制

$$\begin{aligned} u_{eq}(t) &= -(GB_1)^{-1}G(\Delta A_1(t)x(t) + B_2\omega(t)) - \\ &\quad h(t, x(t)) + Kx(t). \end{aligned} \quad (7)$$

将式(7)代入式(1), 滑动模态被表示为

$$\begin{aligned} E {}^C_0 D_t^\alpha x(t) &= (A_1 + B_1 K)x(t) + [I - B_1(GB_1)^{-1}G] \cdot \\ &\quad (\Delta A_1(t)x(t) + B_2\omega(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

为方便表示, 下文将符号简记为: $\bar{A}(t) \triangleq \tilde{A} + \hat{A}(t)$, $\bar{B} \triangleq \tilde{GB}_2$, $\bar{A} \triangleq A_1 + B_1 K$, $\hat{A}(t) \triangleq \tilde{G}\Delta A_1(t)$, $\bar{M}_1 \triangleq \tilde{GM}_1$, $\tilde{G} \triangleq I - B_1(GB_1)^{-1}G$ 。

因此, 滑动模态(8)和系统(1)中的输出方程可写作

$$\begin{cases} E {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}\omega(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D\omega(t) \end{cases}. \quad (9)$$

2.2 具有无源性能的鲁棒可容许性分析

本小节研究式(9)中滑动模态和输出方程的鲁棒无源性和可容许性问题, 具体分为两步: 第一步, 假设系统(9)中包含矩阵 K 在内的所有矩阵都是已知的, 给出系统(9)在满足无源性条件下的鲁棒可容许充分判据。第二步, 确定控制反馈增益矩阵 K , 使系统(9)实

现具有无源性能的鲁棒可容许性。

定理 1 给定常数 $\gamma > 0$, 分数阶系统(9)是具有无源性能的鲁棒可容许的, 如果存在矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和常数 $\epsilon > 0$, 使得

$$\begin{aligned} P^T E = E^T P &\geq 0, \\ \begin{bmatrix} \Pi_1 & P^T \bar{B} - C_1^T & P^T \bar{M}_1 \\ * & -\gamma I - D - D^T & -M_2 \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned} \quad (10)$$

成立, 其中, $\Pi_1 = P^T \tilde{A} + \tilde{A}^T P + \epsilon N^T N$ 。

证明 首先考虑标称情况, 当系统(9)中的不确定项 $\Delta A_1(t) = 0$ 和 $\Delta C_1(t) = 0$ 时, 系统(9)被写作

$$\begin{cases} E_0^C D_t^\alpha x(t) = \tilde{A}x(t) + \bar{B}\omega(t) \\ y(t) = C_1 x(t) + D\omega(t) \end{cases} \quad (11)$$

构造李雅普诺夫函数

$$V(x(t)) \triangleq x^T(t) P^T E x(t).$$

对 $V(x(t))$ 求 α 阶导数, 可以得到

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) &= {}_0^C D_t^\alpha (x^T(t) P^T E x(t)) \leq \\ &2x^T(t) P^T (\tilde{A}x(t) + \bar{B}\omega(t)). \end{aligned}$$

令

$$\chi = \begin{bmatrix} P^T \tilde{A} + \tilde{A}^T P & P^T \bar{B} - C_1^T \\ * & -\gamma I - D - D^T \end{bmatrix}, \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}.$$

结合式(10)可知 $\chi < 0$, 因此

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) - 2\omega^T(t) y(t) - \gamma \omega^T(t) \omega(t) &\leq \\ \varphi^T(t) \chi \varphi(t) &< 0. \end{aligned} \quad (12)$$

对上式不等号两侧作关于 t 的 $[0, t^*]$ ($\forall t^* > 0$)

区间上的一阶积分, 由于 $V(x(t)) > 0$, 故

$$\begin{aligned} {}_0 I_{t^*}^{1-\alpha} {}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) &= {}_0 I_{t^*}^{1-\alpha} {}_0 I_{t^*}^\alpha {}_0^C D_t^\alpha V(x(t)) = \\ {}_0 I_{t^*}^{1-\alpha} V(x(t)) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t^*} \frac{V(x(\xi))}{(t^* - \xi)^\alpha} d\xi > 0 \end{aligned} \quad (13)$$

在零初始条件下成立。因此, 对 $\forall t^* > 0$,

$$-\gamma \int_0^{t^*} \omega^T(t) \omega(t) dt \leq 2 \int_0^{t^*} \omega^T(t) y(t) dt$$

在零初始情况下成立, 故分数阶系统(11)是鲁棒无源的。

另一方面, 对矩阵 P 和 $\tilde{A}$ 进行相同维数的分块 $P =$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, P_{11} \in \mathbf{R}^{r \times r}. \text{ 由 } \chi < 0 \text{ 可}$$

以得到 $P^T \tilde{A} + \tilde{A}^T P < 0$, 即

$$\begin{bmatrix} \circledast & \circledast \\ \circledast & P_{22}^T \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{22}^T P_{22} \end{bmatrix} < 0,$$

其中 $\circledast$ 表示讨论中未使用的矩阵块。从而 $P_{22}^T \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{22}^T P_{22} < 0$, 显然 $\tilde{A}_{22}$ 是非奇异的。否则, 如果 $\tilde{A}_{22}$ 是奇异矩阵, 则存在向量 $\xi \neq 0$ 使得 $\tilde{A}_{22} \xi = 0$, 从而, $\xi^T (P_{22}^T \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{22}^T P_{22}) \xi = 0$ 这与 $P_{22}^T \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{22}^T P_{22} < 0$ 矛盾。因此, 标称系统(11)是正则和无脉冲的^[7]。

并且, 当 $\omega(t) = 0$ 时, 根据式(12)和引理 1, 可知系统(11)同时是渐近稳定的, 由定义 1 进而实现可容许性。

下面考虑一般情况。用 $\bar{A}(t)$ 和 $C(t)$ 代替 $\tilde{A}$ 和 C_1 , 用

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(t) &\triangleq \begin{bmatrix} P^T \bar{A}(t) + \bar{A}^T(t) P & P^T \bar{B} - C^T(t) \\ * & -\gamma I - D - D^T \end{bmatrix} = \\ &\chi + \left(\begin{bmatrix} P^T \bar{M}_1 \\ -M_2 \end{bmatrix} F(t) [N \quad 0] \right) + \\ &\left(\begin{bmatrix} P^T \bar{M}_1 \\ -M_2 \end{bmatrix} F(t) [N \quad 0] \right)^T \end{aligned} \quad (14)$$

代替 χ 。根据引理 2 可知

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(t) &\leq \tilde{\chi} \triangleq \chi + \epsilon \begin{bmatrix} N^T \\ 0 \end{bmatrix} [N \quad 0] + \\ &\frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} P^T \bar{M}_1 \\ -M_2 \end{bmatrix} [\bar{M}_1^T P \quad -M_2^T]. \end{aligned} \quad (15)$$

结合 Schur 补定理, 由式(10)可知 $\tilde{\chi} < 0$, 从而 $\hat{\chi}(t) < 0$, 接下来的证明过程与特殊情况下相同。因此, 系统(9)是具有无源性能的鲁棒可容许的。

注 1 无源性问题早已被研究过, 但它们的结果是在整数阶情况下建立的^[16-18]。需要注意的是, 为分数阶广义系统构建适当的无源性标准并不是一项简单的任务。本文巧妙地利用区间参数和分数阶微积分的性质, 解决了参数间切换的复杂性。

注 2 当定理 1 的条件满足时, 系统(9)可以实现具有无源性能的鲁棒可容许性, 但实际上矩阵 $\tilde{A}$ 中包含未知的控制增益矩阵 K 。下面给出求解增益矩阵 K 的条件, 同时使得系统(9)是无源和鲁棒可容许的。

定理 2 给定常数 $\gamma > 0$, 系统(9)是具有无源性能的鲁棒可容许的, 如果存在常数 $\epsilon > 0$, 矩阵 $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 和 $L \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 使得

$$\begin{bmatrix} \Pi_2 & \bar{B} - L^T C_1^T & \bar{M}_1 & \epsilon L^T N^T \\ * & -\gamma I - D - D^T & -M_2 & 0 \\ * & * & -\epsilon I & 0 \\ * & * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

成立, 其中, $\Pi_2 = A_1 L + L^T A_1^T + B_1 H + H^T B_1^T$ 。且式(4)中的矩阵 K 被给定为 $K = H L^{-1}$ 。

证明 结合 Schur 补定理, 由式(16)可得

$$\begin{bmatrix} \Pi_2 + \epsilon L^T N^T N L & \bar{B} - L^T C_1^T & \bar{M}_1 \\ * & -\gamma I - D - D^T & -M_2 \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0. \quad (17)$$

利用 $\text{diag}\{L^{-T}, I, I\}$ 对式(17)做合同变换, 因合同变换不改变负定性质, 再结合 $H=KL$ 可得

$$\begin{bmatrix} \Pi_3 & L^{-T}\bar{B}-C_1^T & L^{-T}\bar{M}_1 \\ * & -\gamma I-D-D^T & -M_2 \\ * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0,$$

其中, $\Pi_3=L^{-T}\bar{A}+\bar{A}^TL^{-T}+\epsilon N^TN$ 。当式(10)中的 P 取 $P=L^{-1}$ 时, 定理 1 中的条件可以满足, 因此系统(9)是具有无源性能的鲁棒可容许。

2.3 滑模控制律

本小节设计了滑模控制器, 使系统(1)中的状态轨迹在其作用下可以到达切换面。

定理 3 切换函数 $s(t)$ 由式(4)给出, $s(t)$ 中的矩阵 G 满足 GB_1 可逆, 矩阵 K 由定理 2 得到。设计滑模控制器如下:

$$u(t)=Kx(t)-(GB_1)^{-1}(\|GM_1\|\|Nx(t)\|+\epsilon\|GB_1\|\|x(t)\|+\|GB_2\|\|\omega(t)\|+\rho)\cdot\text{sgn}(s(t)), \quad (18)$$

式中 $\rho>0$, 系统(1)的状态轨迹可以到达切换面 $s(t)=0$ 。

证明 将 $u(t)$ 代入到式(6)中得到

$$\begin{aligned} {}^C_0D_t^\alpha s(t) &= G\Delta A_1(t)x(t) - (\|GM_1\|\|Nx(t)\| + \\ &\quad \epsilon\|GB_1\|\|x(t)\| + \|GB_2\|\|\omega(t)\| + \rho) \cdot \\ &\quad \text{sgn}(s(t)) + GB_1h(t, x(t)) + GB_2\omega(t). \end{aligned} \quad (19)$$

选取李雅普诺夫候选函数

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} s^T(t)s(t).$$

对 $\Psi(t)$ 求 α 阶导数, 从而得到

$$\begin{aligned} {}^C_0D_t^\alpha \Psi(t) &\leq s^T(t){}^C_0D_t^\alpha s(t) = s^T(t)(G\Delta A_1(t)x(t) + \\ &\quad GB_1h(t, x(t)) + GB_2\omega(t) - s^T(t)(\|GM_1\|\|Nx(t)\| + \\ &\quad \epsilon\|GB_1\|\|x(t)\| + \|GB_2\|\|\omega(t)\| + \rho)\text{sgn}(s(t)) \leq \\ &\quad \|s(t)\|(\|GM_1\|\|Nx(t)\| + \epsilon\|GB_1\|\|x(t)\| + \\ &\quad \|GB_2\|\|\omega(t)\|) - s^T(t)(\|GM_1\|\|Nx(t)\| + \\ &\quad \epsilon\|GB_1\|\|x(t)\| + \|GB_2\|\|\omega(t)\|)\text{sgn}(s(t)) - \\ &\quad \rho s^T(t)\text{sgn}(s(t)) \leq -\rho\|s(t)\| < 0, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $s^T(t)\text{sgn}(s(t)) \geq \|s(t)\|$ 。因此, 状态轨迹可以到达切换面。

3 数值算例

对不确定分数阶广义系统(1)赋予如下参数:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & -0.6 & 0.4 \\ 0.9 & 0.6 & 1.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = [1.4 \quad 2 \quad 1.7],$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$D=0.4, M_2=[0.3 \quad 0.4 \quad 0.3], G=[0.85 \quad 1 \quad 0].$$

此外, 令 $\alpha=0.85$, 函数 $h(t, x(t))=0.1e^{-t}x(t)$,

即 $\epsilon=0.1$, 外部扰动 $\omega(t)=\frac{1}{1+t^2}$ 。我们的目标是利用式(18)给出的控制器 $u(t)$, 使系统(1)同时具有鲁棒无源性和可容许性。

利用 MATLAB 软件对定理 2 中的式(16)进行求解, 可得 $\epsilon=0.6$, 矩阵

$$H = [0.476 \ 0 \quad 0.423 \ 8 \quad -0.571 \ 2],$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.781 \ 6 & 0.289 \ 9 & 0 \\ 0.289 \ 9 & 0.857 \ 3 & 0 \\ -0.837 \ 8 & -1.020 \ 3 & 0.184 \end{bmatrix},$$

从而 $K=[-1.750 \ 4 \quad -2.607 \ 1 \quad -3.103 \ 3]$ 。取参数 $\rho=0.01$, 给定初始条件 $x_0=[-10 \quad 6.8 \quad 9.5]$ 。结合上述所有给出的条件, 仿真结果如图 1~3 所示, 图 1 代表的是状态轨迹 $x(t)$, 图 2 描述的是切换函数 $s(t)$, 图 3 表示的是控制器 $u(t)$ 。

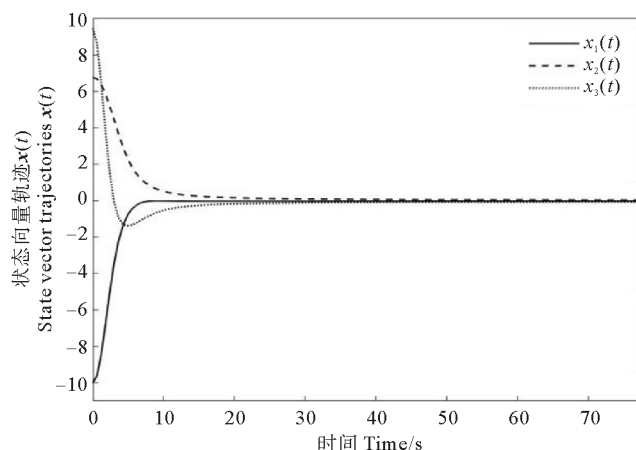


图 1 状态向量轨迹 $x(t)$

Fig.1 State vector trajectories $x(t)$

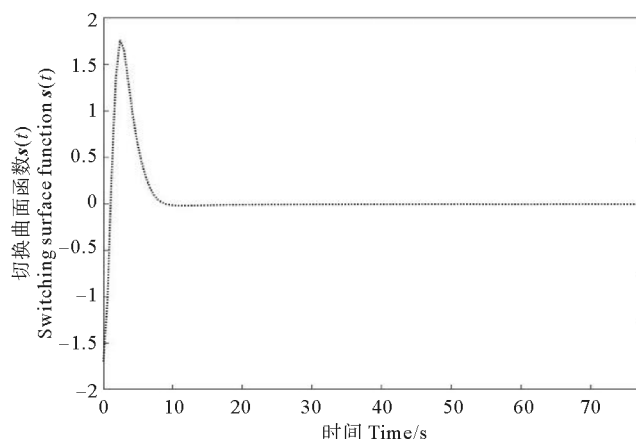
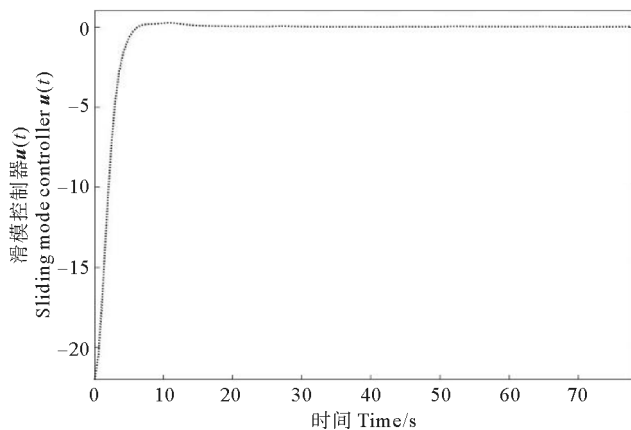


图 2 切换曲面函数 $s(t)$

Fig.2 Switching surface function $s(t)$

图3 滑模控制器 $u(t)$ Fig.3 Sliding mode controller $u(t)$

4 结语

本文针对带外部扰动的不确定分数阶广义系统设计分数阶积分型切换函数, 计算了切换函数的分数阶导数并使其为 0, 得到了等效控制, 设计了滑模控制器使状态轨迹到达切换面。利用区间参数和分数阶微积分的性质, 通过线性矩阵不等式首次给出了滑动模态具有无源性能的鲁棒可容许性的充分性判据, 并且解决了滑动模态的鲁棒无源化问题。本文给出的鲁棒无源分析方法也可尝试推广到分数阶奇异摄动系统和分数阶时滞系统。

参考文献:

- [1] Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations [M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [2] Aguila-Camacho N, Duarte-Mermoud M A, Gallegos J A. Lyapunov functions for fractional order systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(9): 2951-2957.
- [3] Li Y, Chen Y Q, Podlubny I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(5): 1810-1821.
- [4] Kao Y G, Li Y, Park J H, et al. Mittag-Leffler synchronization of delayed fractional memristor neural networks via adaptive control [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, 32(5): 2279-2284.
- [5] Yu Y, Jiao Z, Sun C Y. Sufficient and necessary condition of admissibility for fractional-order singular system[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(12): 2160-2164.
- [6] Zhang Q H, Lu J G. H_∞ control for singular fractional-order interval systems: The $0 < \alpha < 1$ case[J]. ISA Transactions, 2021, 110: 105-116.
- [7] Wang Z, Xue D Y, Pan F. Observer-based robust control for singular switched fractional order systems subject to actuator saturation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 411: 126538.
- [8] Zhan T, Liu X Z, Ma S P. A new singular system approach to output feedback sliding mode control for fractional order nonlinear systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(14): 6746-6762.
- [9] 侯明冬, 王印松. 一类非线性大滞后系统自适应积分滑模控制[J]. 控制理论与应用, 2019, 36(7): 1182-1188.
- Hou M D, Wang Y S. An adaptive integral sliding mode control for a class of nonlinear large-lag systems[J]. Control Theory & Applications, 2019, 36(7): 1182-1188.
- [10] Sun G H, Wu L G, Kuang Z A, et al. Practical tracking control of linear motor via fractional-order sliding mode[J]. Automatica, 2018, 94: 221-235.
- [11] Yin C, Zhong S M, Chen W F. Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(1): 356-366.
- [12] Aghababa M P. Robust stabilization and synchronization of a class of fractional-order chaotic systems via a novel fractional sliding mode controller[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(6): 2670-2681.
- [13] Pisano A, Rapaic M R, Jelencic Z D, et al. Sliding mode control approaches to the robust regulation of linear multivariable fractional-order dynamics[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(18): 2045-2056.
- [14] Wang J, Shao C F, Chen Y Q. Fractional order sliding mode control via disturbance observer for a class of fractional order systems with mismatched disturbance[J]. Mechatronics, 2018, 53: 8-19.
- [15] Belkhatir Z, Laleg-Kirati T M. High-order sliding mode observer for fractional commensurate linear systems with unknown input [J]. Automatic, 2017, 82: 209-217.
- [16] Wu L G, Zheng W X. Passivity-based sliding mode control of uncertain singular time-delay systems[J]. Automatica, 2009, 45(9): 2120-2127.
- [17] Sang H, Zhao J. Passivity and passification for switched T-S fuzzy systems with sampled-data implementation[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 28(7): 1219-1229.
- [18] Subramaniam R, Joo Y H. Passivity-based fuzzy ISMC for wind energy conversion systems with PMSG[J]. IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics-systems, 2021, 51(4): 2212-2220.
- [19] Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and H_∞ control theory[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(3): 356-361.

Robust Passive Control of Uncertain Fractional Order Singular System via Sliding Mode Approach

Zhang Chengcheng¹, Ren Qifeng¹, Kao Yonggui², Gao Cunchen¹

(1. School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100, China; 2. School of Science, Harbin Institute of Technology (Weihai), Weihai 264209, China)

Abstract: The admissibility and robust passivity of uncertain fractional order (FO) singular system via sliding mode control (SMC) is studied. Firstly, a FO integral-type switching function with singular matrix is designed, and the equivalent control is derived by calculating the FO derivative, and then the sliding mode equation is obtained. Secondly, in view of the sliding mode equation and the system output equation, the sufficient criteria for the robust passivity and admissibility of the sliding mode of the system are given by using the technique of linear matrix inequality, and the conditions for the robust admissibility with passive performance of the solvable are further established. At the same time, the FO SMC law is designed to ensure that the state trajectories of the closed-loop system can reach the pre-designed switching surface. Finally, a simulation example is provided to verify the effectiveness of the results.

Key words: fractional order; singular system; sliding mode control; robust passivity; admissibility

AMS Subject Classifications: 26A33; 93D20

责任编辑 朱宝象