中国科学 : 数学　2018 年　第 48 卷　第 6 期 : 771～784
SCIENTIA SINICA Mathematica
综 述
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

半稳定 Higgs 层上的典则度量结构

献给胡和生教授 90 华诞

李嘉禹[1,2*], 张川静[1], 张希[1]

1. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026;
2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190
E-mail: jiayuli@ustc.edu.cn, chjzhang@mail.ustc.edu.cn, mathzx@ustc.edu.cn

收稿日期: 2016-09-22; 接受日期: 2017-03-23; 网络出版日期: 2017-06-09; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11625106, 11131007 和 11571332) 资助项目

摘要　本文首先回顾全纯丛上典则度量的相关经典结果及其发展历程, 然后介绍最近本文作者关于半稳定自反 Higgs 层上渐近 Hermite-Einstein 度量结构的存在性结果以及相关 Bogomolov 型 Chern 数不等式.

关键词　Higgs 层　渐近 Hermite-Einstein 度量　Bogomolov 型 Chern 数不等式

MSC (2010) 主题分类　53C07, 58E15

1　引言

令 (M,ω) 是紧致 Kähler 流形, E 是其上全纯向量丛. 全纯向量丛 E 称为稳定的 (半稳定的), 若对于其任意正则凝聚子层 (coherent sub-sheaf) $E' \hookrightarrow E$, 必成立

$$\mu(E') = \frac{\deg(E')}{\mathrm{rank}E'} < (\leqslant)\ \mu(E) = \frac{\deg(E)}{\mathrm{rank}E}, \tag{1.1}$$

其中 E' 的度 (degree) 定义如下:

$$\deg(E') = \int_M c_1(E') \wedge \omega^{n-1},$$

这里 $c_1(E')$ 是 E' 的第一 Chern 类. $\mu(E')$ 通常也称为 E' 的斜率 (slope). E 中的 Hermite 度量 H, 如果其 Chern 联络 A_H 所对应的曲率 F_H 满足下列 Einstein 条件:

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_H = \lambda Id_E, \tag{1.2}$$

英文引用格式: Li J Y, Zhang C J, Zhang X. Canonical metric structures on semi-stable Higgs sheaves (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 771–784, doi: 10.1360/N012016-00168

则称为 Hermite-Einstein 度量, 其中这里 Λ_ω 记为关于 Kähler 形式 ω 作缩并, 实数

$$\lambda = \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M)\mathrm{rank}(E)}\deg(E).$$

关于 Hermite-Einstein 度量的存在性, 我们有下面著名的 Donaldson-Uhlenbeck-Yau 定理.

定理 1.1 如果 Kähler 流形上全纯向量丛 E 是稳定的, 则其上必存在 Hermite-Einstein 度量.

上述定理最早是由 Narasimhan 和 Seshadri [1] 证明了 Riemann 面的情形. 20 世纪 80 年代, Donaldson [2,3] 先后证明了代数曲面和代数流形的情形. 一般 Kähler 流形情形则是由 Uhlenbeck 和 Yau [4] 证明的. 反之, Kobayashi 和 Lübke 分别独自证明了, 如果全纯向量丛存在 Hermite-Einstein 度量, 则其必是多重稳定的 (poly-stable). 因此, 在全纯向量丛上, 我们有这样的对应关系: 从微分几何角度出发的 Hermite-Einstein 度量存在性与从代数几何不变量理论出发的稳定性是等价的. 这一对应通常也称为 Hitchin-Kobayashi 对应. 随后几十年, Donaldson-Uhlenbeck-Yau 定理 (或 Hitchin-Kobayashi 对应) 有着许多重要的推广和应用, 例如, Li 和 Yau [5] 研究了 Gauduchon 流形情形; Hitchin [6] 和 Simpson [7] 研究了 Higgs 丛情形; Bando 和 Siu [8] 考虑了自反层 (reflexive sheaf); Bartolomeis 和 Tian [9] 研究了殆 Hermite 流形上的复向量丛; Biquard [10]、Li 和 Narasimhan [11] 及 Li [12] 则研究了抛物丛情形; Fu 和 Yau [13] 研究了 Strominger 系统. 还有其他很有意思的推广和研究, 在此不再一一叙述.

Bando 和 Siu [8] 在凝聚层 (coherent sheaf) $\mathcal{E}$ 上引入了相容 Hermite 度量的概念, 并证明了稳定的自反层上必存在相容 Hermite-Einstein 度量. 凝聚层比全纯向量丛更为广泛, 从某种意义上凝聚层可看作带奇点的全纯丛, 在凝聚层的局部自由 (locally free) 部分可看作由全纯丛的局部截面所生成, 但凝聚层通常并不是处处局部自由的, 我们把非局部自由的那些点称为奇点. 本文记凝聚层 $\mathcal{E}$ 的奇点集为 Σ. $\mathcal{E}$ 上的所谓相容 Hermite 度量 H, 即为全纯丛 $\mathcal{E}|_{M\setminus\Sigma}$ 上的 Hermite 度量, 满足

(1) $|F_H|_{H,\omega}$ 是平方可积的;

(2) $|\Lambda_\omega F_H|_H$ 有界.

本文考虑半稳定的自反 Higgs 层 (reflexive Higgs sheaf). 所谓一个 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$, 即一个凝聚层 $\mathcal{E}$ 配上一个 Higgs 场 $\phi\in\Omega^{1,0}(\mathrm{End}(\mathcal{E}))$, 并满足 $\phi\wedge\phi=0$. 如果凝聚层 $\mathcal{E}$ 是无挠的 (torsion-free) (相应地, 自反的、局部自由的), 则称 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 是无挠的 (相应地, 自反的、局部自由的).

同样, 我们可以从几何不变量理论出发在 Higgs 层上引入稳定性概念. 一个无挠的 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 称为是稳定的 (半稳定的), 即对于其任意正则 ϕ- 不变凝聚子层 $\mathcal{F}\hookrightarrow\mathcal{E}$, 均成立 $\mu_\omega(\mathcal{F})<(\leqslant)\ \mu_\omega(\mathcal{E})$. 由定义可知, Higgs 意义下的稳定性要弱于前面全纯丛的稳定性.

Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 上给定一 Hermite 度量 H, 在其局部自由部分可考虑下面 Hitchin-Simpson 联络:

$$\overline{\partial}_\phi := \overline{\partial}_{\mathcal{E}} + \phi, \quad D_{H,\phi}^{1,0} := D_H^{1,0} + \phi^{*H}, \quad D_{H,\phi} = \overline{\partial}_\phi + D_{H,\phi}^{1,0}, \tag{1.3}$$

其中 D_H 是度量 H 所对应的 Chern 联络, ϕ^{*H} 是场 ϕ 关于度量 H 的共轭场. 上述 Hitchin-Simpson 联络的曲率可表示为

$$F_{H,\phi} = F_H + [\phi,\phi^{*H}] + D_H^{1,0}\phi + \overline{\partial}_{\mathcal{E}}\phi^{*H}. \tag{1.4}$$

Higgs 层最早是 20 世纪 80 年代由 Hitchin 在研究 Riemann 面上自对偶方程时所引入的, 随后 Simpson 研究了高维 Kähler 流形上的 Higgs 丛及其在 nonabelian Hodge 理论中的应用. 目前, Higgs 丛在数学的其他领域都有着重要应用, 例如, 规范场论, Kähler 几何与超 Kähler 几何, 群表示论以及 nonabelian Hodge 理论等. 这方面一个最重要的工作是, Hitchin 和 Simpson 所证明的 Higgs 丛版本的 Hitchin-Kobayashi 对应, 即紧致 Kähler 流形上 Higgs 丛中存在 Hermite-Einstein 度量当且仅当其为多重稳定的. 近期 Biswas 和 Schumacher [14] 考虑了稳定自反 Higgs 层上的 Hitchin-Kobayashi 对应.

本文将介绍我们最近 (参见文献 [15]) 关于半稳定自反 Higgs 层上的研究工作. 称一无挠 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 上存在渐近相容 Hermite-Einstein 度量, 即对于任意小的正数 δ 都存在相容 Hermite 度量 H_δ 满足

$$\sup_{x\in M\setminus\Sigma}|\sqrt{-1}\Lambda_\omega(F_{H_\delta}+[\phi,\phi^{*H_\delta}])-\lambda Id_{\mathcal{E}}|_{H_\delta}(x)<\delta. \tag{1.5}$$

渐近 Hermite-Einstein 度量最先由 Kobayashi [16] 引入, 他证明全纯丛上若存在渐近 Hermite-Einstein 度量则其必是半稳定的. 在代数流形情形, Kobayashi 证明了, 全纯丛的半稳定性必隐含渐近 Hermite-Einstein 度量的存在性. Kobayashi [16] 猜测上述存在性结果在一般的 Kähler 流形上也必成立. 最近, Jacob [17] 及 Li 和 Zhang [18] 用不同的方法分别在全纯丛和 Higgs 丛上验证了上述 Kobayashi 猜测. 文献 [15] 研究了自反 Higgs 层上半稳定性和渐近相容 Hermite-Einstein 度量存在性之间的等价关系, 作为应用我们在紧致 Kähler 流形的半稳定自反 Higgs 层上建立 Bogomolov 型 Chern 数不等式, 即我们证明定理 1.2.

定理 1.2 [15] 令 $(\mathcal{E},\phi)$ 是 n- 维紧致 Kähler 流形 (M,ω) 上秩为 r 的自反 Higgs 层, 则其为半稳定的当且仅当其上存在渐近相容 Hermite-Einstein 度量. 特别地, 半稳定自反 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 必成立下述 Bogomolov 型 Chern 数不等式:

$$\int_M\left(2c_2(\mathcal{E})-\frac{r-1}{r}c_1(\mathcal{E})\wedge c_1(\mathcal{E})\right)\wedge\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}\geqslant 0. \tag{1.6}$$

Bogomolov 型 Chern 数不等式最先是由 Bogomolov [19] 在紧致代数曲面的半稳定全纯丛上建立的, 随后 30 年来该不等式有着许多有意思的推广. 最近, Langer [20] 在代数流形的半稳定自反 Higgs 层上也建立了相同的 Chern 数不等式, 需要指出的是, Langer 的证明利用了 Lan 等 [21] 所引入的 Higgs-de Rham 序列, 是纯代数几何的, 并不适用于我们所考虑的更为一般的 Kähler 流形情形. 本文在下面章节中将介绍相关 Yang-Mills-Higgs 热流的基本性质, 然后介绍文献 [15] 中关于定理 1.2 的证明思想. 由于奇点的存在, 在层上研究热流及方程相比丛上带来更多分析困难. 定理 1.2 的证明难点在于如何利用层的半稳定性来给出 Yang-Mills-Higgs 热流渐近性质的刻画, 这里面许多分析的细节需要注意.

2 Yang-Mills-Higgs 热流

令 (M,ω) 是复维数为 n 的紧致 Kähler 流形, $(\mathcal{E},\phi)$ 是其上自反 Higgs 层, 设 Σ 为其奇点集. 本节介绍 $(\mathcal{E},\phi)$ 上 Yang-Mills-Higgs 热流的长时间解存在性. 所谓长时间解, 即存在一族定义于 $M\setminus\Sigma\times[0,+\infty)$ 上的 Hermite 度量 $H(t)$, 满足如下发展方程:

$$\begin{cases}H(t)^{-1}\dfrac{\partial H(t)}{\partial t}=-2(\sqrt{-1}\Lambda_\omega(F_{H(t)}+[\phi,\phi^{*H(t)}])-\lambda Id_{\mathcal{E}}),\\ H(0)=\hat{H}.\end{cases} \tag{2.1}$$

根据 Hironaka 平坦化定理 [8,22,23], 我们对自反层 $\mathcal{E}$ 作如下正则化: 通过有限次具光滑中心 $Y_{i-1}\subset M_{i-1}$ 的吹大 (blowing up) $\pi_i: M_i\to M_{i-1}$ $(i=1,\dots,k)$, $M_0=M$, 使得 $(\pi^*\mathcal{E}^*/\mathrm{torsion})^*$ 处处局部自由, 并且复合映射

$$\pi=\pi_1\circ\cdots\circ\pi_k: M_k\to M \tag{2.2}$$

在奇点集 Σ 外是双全纯等价. 下面记复流形 M_k 为 $\tilde{M}$, 全纯向量丛 $(\pi^*\mathcal{E}^*/\mathrm{torsion})^*$ 为 E. 由于 $\mathcal{E}$ 在 Σ 之外是局部自由的, 在 $\tilde{M}\setminus\pi^{-1}\Sigma$ 上, 全纯丛 E 同构于 $\mathcal{E}$. 令 $\pi^*\phi^*$ 是 ϕ 所诱导的拉回层 $\pi^*\mathcal{E}^*$ 上的

Higgs 场. 容易验证 $\pi^*\phi^*$ 保持挠率层, 因而诱导了商层 $\pi^*\mathcal{E}^*/\text{torsion}$ (即全纯丛 E) 上的 Higgs 场. 为简单起见, 我们记该诱导的 Higgs 层仍为 ϕ. 这样, 我们在复流形 $\tilde{M}$ 上得到一个 Higgs 丛 (E,ϕ), 其在 $\pi^{-1}\Sigma$ 之外同构于 $(\mathcal{E},\phi)$.

由于 M_i 均是 Kähler 流形 [24], 我们在 M_i 上固定一 Kähler 度量 η_i, 并设

$$\omega_{1,\epsilon}=\pi_1^*\omega+\epsilon_1\eta_1,\quad \omega_{i,\epsilon}=\pi_i^*\omega_{i-1,\epsilon}+\epsilon_i\eta_i, \tag{2.3}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant k$, $0<\epsilon_i\leqslant 1$, $\epsilon=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)$. 在丛 E 上给定光滑 Hermite 度量 $\hat{H}$, 容易验证必存在不依赖于 ϵ 的常数 $\hat{C}_0$ 使得以下估计成立:

$$\int_{\tilde{M}}(|\Lambda_{\omega_{k,\epsilon}}F_{\hat{H}}|_{\hat{H}}+|\phi|^2_{\hat{H},\omega_{k,\epsilon}})\frac{\omega_{k,\epsilon}^n}{n!}\leqslant \hat{C}_0. \tag{2.4}$$

我们在 Higgs 丛 (E,ϕ) 上考虑以固定光滑度量 $\hat{H}$ 为初始值, 对应于 Kähler 度量 ω_ϵ 的 Yang-Mills-Higgs 热流,

$$\begin{cases} H_\epsilon(t)^{-1}\dfrac{\partial H_\epsilon(t)}{\partial t}=-2(\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_\epsilon}(F_{H_\epsilon(t)}+[\phi,\phi^{*H_\epsilon(t)}])-\lambda_\epsilon Id_E),\\ H_\epsilon(0)=\hat{H}, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中

$$\lambda_\epsilon=\frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(\tilde{M},\omega_\epsilon)}\mu_{\omega_\epsilon}(E).$$

Simpson [7] 证明了上述热流长时间解的存在性. 为简单起见, 设

$$\Phi(H_{k,\epsilon}(t),\omega_{k,\epsilon})=\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{k,\epsilon}}(F_{H_{k,\epsilon}(t)}+[\phi,\phi^{*H_{k,\epsilon}(t)}])-\lambda_{k,\epsilon}Id_E. \tag{2.6}$$

根据 Simpson 的结果 (参见文献 [7, 引理 6.1]), 沿着热流 (2.5), 有

$$\left(\Delta_{k,\epsilon}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathrm{tr}(\Phi(H_{k,\epsilon}(t),\omega_{k,\epsilon}))=0, \tag{2.7}$$

$$\left(\Delta_{k,\epsilon}-\frac{\partial}{\partial t}\right)|\Phi(H_{k,\epsilon}(t),\omega_{k,\epsilon})|^2_{H_{k,\epsilon}(t)}=2|D_{H_{k,\epsilon},\phi}(\Phi(H_{k,\epsilon}(t),\omega_{k,\epsilon}))|^2_{H_{k,\epsilon}(t),\omega_{k,\epsilon}}, \tag{2.8}$$

$$\left(\Delta_{k,\epsilon}-\frac{\partial}{\partial t}\right)|\Phi(H_{k,\epsilon}(t),\omega_{k,\epsilon})|_{H_{k,\epsilon}(t)}\geqslant 0. \tag{2.9}$$

对于任何 $x\in\tilde{M}$ 和 $t>0$, 成立

$$\int_{\tilde{M}}|\Phi(H_{k,\epsilon}(t),\omega_{k,\epsilon})|_{H_{k,\epsilon}(t)}\frac{\omega_{k,\epsilon}^n}{n!}\leqslant\int_{\tilde{M}}|\Phi(\hat{H},\omega_{k,\epsilon})|_{\hat{H}}\frac{\omega_{k,\epsilon}^n}{n!}\leqslant\hat{C}_1, \tag{2.10}$$

$$|\Phi(H_{k,\epsilon}(t),\omega_{k,\epsilon})|_{H_{k,\epsilon}(t)}(x)\leqslant\int_{\tilde{M}}K_{k,\epsilon}(x,y,t)|\Phi(\hat{H},\omega_{k,\epsilon})|_{\hat{H}}\frac{\omega_{k,\epsilon}^n}{n!}, \tag{2.11}$$

$$|\Phi(H_{k,\epsilon}(t+1),\omega_{k,\epsilon})|_{H_{k,\epsilon}(t+1)}(x)\leqslant\int_{\tilde{M}}K_{k,\epsilon}(x,y,1)|\Phi(H_{k,\epsilon}(t),\omega_{k,\epsilon})|_{H_{k,\epsilon}(t)}\frac{\omega_{k,\epsilon}^n}{n!}, \tag{2.12}$$

其中 $K_{k,\epsilon}(x,y,t)$ 是对应于 Kähler 度量 $\omega_{k,\epsilon}$ 的热核.

注 2.1 我们将对抛物方程 (2.5) 作一致的局部 C^0、C^1 和高阶估计, 通过对 $H_{k,\epsilon}(t)$ 取极限来得到 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 上 Yang-Mills-Higgs 热流的长时间解存在性. 为简单起见, 总假设吹大的个数为一, 即 $k=1$. 一般情形则可通过类似的重复讨论得到.

Bando 和 Siu [8] 得到了关于 $(\tilde{M},\omega_\epsilon)$ 的一致 Sobolev 不等式, 结合 Cheng 和 Li 估计 [25] 和 Grigor'yan 的结果 (参见文献 [26, 定理 1.1]), 我们有下述热核的一致上界估计和 Green 函数的一致下界估计.

引理 2.1 [8] 对于任意常数 $\tau>0$, 必存在不依赖于 ϵ 的正常数 $C_K(\tau)$, 对于所有 $x,y\in\tilde{M}$ 和 $0<t<+\infty$, 均成立

$$0\leqslant K_\epsilon(x,y,t)\leqslant C_K(\tau)\bigg(t^{-n}\exp\bigg(-\frac{(d_{\omega_\epsilon}(x,y))^2}{(4+\tau)t}\bigg)+1\bigg), \tag{2.13}$$

其中 $d_{\omega_\epsilon}(x,y)$ 是对应于度量 ω_ϵ 关于两点 x 和 y 之间的距离. 设 G_ϵ 是对应于度量 ω_ϵ 的 $\tilde{M}$ 上的 Green 函数, 则必存在不依赖于 ϵ 的正常数 C_G 使得

$$G_\epsilon(x,y)\geqslant -C_G \tag{2.14}$$

成立.

利用热核的上界估计 (2.11) 和 (2.12), 可得

$$\max_{x\in\tilde{M}}|\Phi(H_\epsilon(t),\omega_\epsilon)|_{H_\epsilon(t)}(x)\leqslant C_K(\tau)\hat{C}_1(t^{-n}+1) \tag{2.15}$$

和

$$\max_{x\in\tilde{M}}|\Phi(H_\epsilon(t+1),\omega_\epsilon)|_{H_\epsilon(t+1)}(x)\leqslant 2C_K(\tau)\int_{\tilde{M}}|\Phi(H_\epsilon(t),\omega_\epsilon)|_{H_\epsilon(t)}\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}. \tag{2.16}$$

设

$$\exp(S_\epsilon(t))=h_\epsilon(t)=\hat{H}^{-1}H_\epsilon(t), \tag{2.17}$$

其中 $S_\epsilon(t)\in\mathrm{End}(E)$ 是关于度量 $\hat{H}$ 和 $H_\epsilon(t)$ 自共轭的 (self-adjoint).

沿着热流 (2.5), 对于任意 $t\geqslant 0$, 成立

$$\frac{\partial}{\partial t}\log\det(h_\epsilon(t))=\mathrm{tr}\bigg(h_\epsilon^{-1}\frac{\partial h_\epsilon(t)}{\partial t}\bigg)=-2\mathrm{tr}(\Phi(H_\epsilon(t)\omega_\epsilon)) \tag{2.18}$$

和

$$\int_{\tilde{M}}\mathrm{tr}(S_\epsilon(t))\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}=\int_{\tilde{M}}\log\det(h_\epsilon(t))\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}=0. \tag{2.19}$$

记

$$B_{\omega_1}(\delta)=\{x\in\tilde{M}\mid d_{\omega_1}(x,\pi^{-1}(\Sigma))<\delta\}, \tag{2.20}$$

其中 d_{ω_1} 是关于度量 ω_1 的距离函数. 由于 $\hat{H}$ 是丛 E 上的光滑 Hermite 度量, $\phi\in\Omega^{1,0}_{\tilde{M}}(\mathrm{End}(E))$ 是光滑场, 并且 $\pi^*\omega$ 仅沿着 $\pi^{-1}\Sigma$ 退化, 则必存在正常数 $\hat{c}(\delta^{-1})$ 和 $\hat{b}_j(\delta^{-1})$, 使得对所有 $y\in\tilde{M}\setminus B_{\omega_1}(\frac{\delta}{2})$, $0\leqslant\epsilon\leqslant 1$ 和 $j\geqslant 0$, 成立下列估计:

$$\begin{aligned}&\{|\Lambda_{\omega_\epsilon}F_{\hat{H}}|_{\hat{H}}+|\phi|^2_{\hat{H},\omega_\epsilon}\}(y)\leqslant\hat{c}(\delta^{-1}),\\&\{|\nabla^j_{\hat{H}}F_{\hat{H}}|^2_{\hat{H},\omega_\epsilon}+|\nabla^{j+1}_{\hat{H}}\phi|^2_{\hat{H},\omega_\epsilon}\}\leqslant\hat{b}_j(\delta^{-1}).\end{aligned} \tag{2.21}$$

为简单起见, 记

$$\Xi_{\epsilon,j}(x,t)=|\nabla^j_{H_\epsilon(t)}(F_{H_\epsilon(t)}+[\phi,\phi^{*H_\epsilon(t)}])|^2_{H_\epsilon(t),\omega_\epsilon}(x)+|\nabla^{j+1}_{H_\epsilon(t)}\phi|^2_{H_\epsilon(t),\omega_\epsilon}(x),\quad j=0,1,\dots \tag{2.22}$$

下面给出关于 $H_\epsilon(t)$ 的局部一致 C^0、C^1 和高阶估计, 具体证明可参见文献 [15].

引理 2.2 [15] 存在不依赖于 ϵ 的常数 $\overline{C}_0(\delta^{-1},T)$ 使得对所有 $(x,t)\in(\tilde{M}\setminus B_{\omega_1}(\delta))\times[0,T]$ 和 $0<\epsilon\leqslant 1$, 成立

$$|S_\epsilon(t)|_{\hat{H}}(x)\leqslant \overline{C}_0(\delta^{-1},T). \tag{2.23}$$

引理 2.3 [15] 设 $T_\epsilon(t)=h_\epsilon^{-1}(t)\partial_{\hat{H}}h_\epsilon(t)$. 假设存在常数 $\overline{C}_0$ 使得对所有 $0<\epsilon\leqslant 1$, 成立

$$\max_{(x,t)\in(\tilde{M}\setminus B_{\omega_1}(\delta))\times[0,T]}|S_\epsilon(t)|_{\hat{H}}(x)\leqslant \overline{C}_0, \tag{2.24}$$

则必存在仅依赖于 $\overline{C}_0$ 和 δ^{-1} 的常数 $\overline{C}_1$ 使得对所有 $0<\epsilon\leqslant 1$, 成立

$$\max_{(x,t)\in(\tilde{M}\setminus B_{\omega_1}(\frac{3}{2}\delta))\times[0,T]}|T_\epsilon(t)|_{\hat{H},\omega_\epsilon}(x)\leqslant \overline{C}_1. \tag{2.25}$$

引理 2.4 [15] 假设与引理 2.3 中相同. 对于每个整数 $j\geqslant 0$ 必存在仅依赖于 $\overline{C}_0$、j 和 δ^{-1} 的常数 $\overline{C}_{j+2}$, 使得对所有 $0<\epsilon\leqslant 1$, 成立如下估计:

$$\max_{(x,t)\in(\tilde{M}\setminus B_{\omega_1}(2\delta))\times[0,T]}\Xi_{\epsilon,j}(x,t)\leqslant \overline{C}_{j+2},\quad 0<\epsilon\leqslant 1. \tag{2.26}$$

进一步, 必存在仅依赖于 $\overline{C}_0$、j 和 δ^{-1} 的常数 $\hat{C}_{j+2}$, 使得对所有 $0<\epsilon\leqslant 1$, 成立

$$\max_{(x,t)\in(\tilde{M}\setminus B_{\omega_1}(2\delta))\times[0,T]}|\nabla_{\hat{H}}^{j+2}h_\epsilon(t)|_{\hat{H},\omega_\epsilon}(x)\leqslant \hat{C}_{j+2}. \tag{2.27}$$

由上述估计, 我们可以得到 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 上 Yang-Mills-Higgs 热流的长时间解存在性, 参见文献 [14, 15].

命题 2.1 [15] 通过取子列 $\epsilon\to 0$, $H_{k,\epsilon}(x,t)$ 必在 $M\setminus\Sigma\times[0,+\infty)$ 局部光滑收敛于 Yang-Mills-Higgs 热流 (2.1) 的解 $H(x,t)$, 并且 $H(x,t)$ 满足如下估计:

$$\int_M|\Phi(H(t),\omega)|_{H(t)}\frac{\omega^n}{n!}\leqslant\int_M|\Phi(\hat{H},\omega)|_{\hat{H}}\frac{\omega^n}{n!}\leqslant\hat{C}_1 \tag{2.28}$$

和

$$|\Phi(H(t+\tilde{t}),\omega)|_{H(t+\tilde{t})}(x)\leqslant\int_M K_\omega(x,y,t)|\Phi(H(\tilde{t}),\omega)|_{H(\tilde{t})}\frac{\omega^n}{n!}, \tag{2.29}$$

其中 $x\in M\setminus\Sigma$, $t>0$, $\tilde{t}\geqslant 0$.

3 Higgs 场的先验估计

上一节证明了 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 上存在 Yang-Mills-Higgs 热流的长时间解 $H(t)$. 本节主要介绍文献 [15] 中关于 Higgs 场模长 $|\phi|_{H(t),\omega}$ 在正时刻后 (即 $t\geqslant t_0>0$) 的一致有界性估计, 它的重要性在于, 由此我们可知正时刻后 $H(t)$ 都是相容 Hermite 度量.

首先, 我们知道 $|\phi|^2_{\hat{H},\omega_{k,\epsilon}}\in L^1(\tilde{M},\omega_{k,\epsilon})$ 并且其 L^1- 模是一致有界的. 事实上,

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{M}}|\phi|^2_{\hat{H},\omega_{k,\epsilon}}\frac{\omega_{k,\epsilon}^n}{n!}&=\int_{\tilde{M}}\mathrm{tr}(\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_{k,\epsilon}}(\phi\wedge\phi^{*\hat{H}}))\frac{\omega_{k,\epsilon}^n}{n!}\\&=\int_{\tilde{M}}\mathrm{tr}(\phi\wedge\phi^{*\hat{H}})\wedge\frac{\omega_{k,\epsilon}^{n-1}}{(n-1)!}\leqslant\check{C}_\phi<\infty,\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $\check{C}_\phi$ 是不依赖于 ϵ 的正常数. 下面证明对于某个 $0<2a<\frac{1}{2}$, $|\phi|^2_{\hat{H},\omega_{k,\epsilon}}$ 的 L^{1+2a}- 模是一致有界的. 回顾文献 [27, 引理 5.5] (或参见文献 [28, 引理 5.8]).

引理 3.1 [27]　设 (M,ω) 是复维数为 n 的紧致 Kähler 流形, $\pi:\tilde{M}\to M$ 沿着光滑复子流形 Σ 吹大, 其中 Σ 的复余维数 $j\geqslant 2$. 令 η 为 $\tilde{M}$ 上的 Kähler 度量, 取一族 Kähler 度量 $\omega_\epsilon=\pi^*\omega+\epsilon\eta$, 则对于任何常数 $0\leqslant 2\tilde{a}<\frac{1}{k-1}$, 成立 $\frac{\eta^n}{\omega_\epsilon^n}\in L^{2\tilde{a}}(\tilde{M},\eta)$, 并且 $\frac{\eta^n}{\omega_\epsilon^n}$ 的 $L^{2\tilde{a}}(\tilde{M},\eta)$- 模是一致有界的, 即存在不依赖于 ϵ 的常数 C^* 使得下面估计成立:

$$\int_{\tilde{M}}\left(\frac{\eta^n}{\omega_\epsilon^n}\right)^{2\tilde{a}}\frac{\eta^n}{n!}\leqslant C^*. \tag{3.2}$$

因为 $\phi\in\Omega^{1,0}(\mathrm{End}(E))$ 是光滑截面, η_k 是 $\tilde{M}$ 上的光滑度量, 所以必存在一致常数 $\tilde{C}_\phi$ 使得

$$\left(\frac{|\phi|^2_{\hat{H},\omega_{k,\epsilon}}\frac{\omega^n_{k,\epsilon}}{n!}}{\frac{\eta_k^n}{n!}}\right)=\frac{n\mathrm{tr}(\phi\wedge\phi^{*\hat{H}})\wedge\omega^{n-1}_{k,\epsilon}}{\eta_k^n}\leqslant\tilde{C}_\phi, \tag{3.3}$$

其中 $0<\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k\leqslant 1$. 对于 $0<2a\ll 2\tilde{a}$, 利用引理 3.1 和 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{M}}|\phi|^{2(1+2a)}_{\hat{H},\omega_{k,\epsilon}}\frac{\omega^n_{k,\epsilon}}{n!}&=\int_{\tilde{M}}\left(\frac{|\phi|^2_{\hat{H},\omega_{k,\epsilon}}\frac{\omega^n_{k,\epsilon}}{n!}}{\frac{\eta_k^n}{n!}}\right)^{1+2a}\left(\frac{\eta_k^n}{\omega^n_{k,\epsilon}}\right)^{1+2a}\frac{\omega^n_{k,\epsilon}}{n!}\\&\leqslant(\tilde{C}_\phi)^{1+2a}\int_{\tilde{M}}\left(\frac{\eta_k^n}{\omega^n_{k,\epsilon}}\right)^{1+2a}\frac{\omega^n_{k,\epsilon}}{n!}\\&=(\tilde{C}_\phi)^{1+2a}\int_{\tilde{M}}\left(\frac{\eta_k^n}{(\pi_k^*\eta_{k-1}+\epsilon_k\eta_k)^n}\right)^{1+2a}\left(\frac{(\pi_k^*\eta_{k-1}+\epsilon_k\eta_k)^n}{\omega^n_{k,\epsilon}}\right)^{2a}\frac{(\pi_k^*\eta_{k-1}+\epsilon_k\eta_k)^n}{n!}\\&\leqslant(\tilde{C}_\phi)^{1+2a}C^*\left(\int_{\tilde{M}}\left(\frac{(\pi_k^*\eta_{k-1}+\epsilon_k\eta_k)^n}{\omega^n_{k,\epsilon}}\right)^{\frac{a(1+2\tilde{a})}{\tilde{a}-a}}\frac{(\pi_k^*\eta_{k-1}+\epsilon_k\eta_k)^n}{n!}\right)^{\frac{2(\tilde{a}-a)}{1+2\tilde{a}}}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

令 $\epsilon_k\to 0$, 由 (3.4) 得

$$\int_{M_{k-1}}|\phi|^{2(1+2a)}_{\hat{H},\omega_{k-1,\epsilon}}\frac{\omega^n_{k-1,\epsilon}}{n!}\leqslant(\tilde{C}_\phi)^{1+2a}C^*\left(\int_{M_{k-1}}\left(\frac{\eta^n_{k-1}}{\omega^n_{k-1,\epsilon}}\right)^{\frac{a(1+2\tilde{a})}{\tilde{a}-a}}\frac{\eta^n_{k-1}}{n!}\right)^{\frac{2(\tilde{a}-a)}{1+2\tilde{a}}}. \tag{3.5}$$

重复 (3.4) 中的讨论, 逐次取极限 $\epsilon_i\to 0$, 我们可得下面的引理.

引理 3.2　存在正常数 $\tilde{\delta}$ 使得对任意 $0\leqslant 2a<\tilde{\delta}$ 都成立 $|\phi|^2_{\hat{H},\omega}\in L^{1+2a}(M\setminus\Sigma,\omega)$, 即存在常数 C_ϕ 使得下列估计成立:

$$\int_{M\setminus\Sigma}|\phi|^{2(1+2a)}_{\hat{H},\omega}\frac{\omega^n}{n!}\leqslant C_\phi. \tag{3.6}$$

根据文献 [29, (2.5)], 在 $M\setminus\Sigma$ 上, 必成立

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)|\phi|^2_{H(t),\omega}\geqslant 2|\nabla_{H(t)}\phi|^2_{H(t),\omega}+2|\sqrt{-1}\Lambda_\omega[\phi,\phi^{*H(t)}]|^2_{H(t)}-2|\mathrm{Ric}(\omega)|_\omega|\phi|^2_{H(t),\omega}. \tag{3.7}$$

通过直接计算可得

$$\begin{aligned}\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\log(|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e})&=\frac{1}{|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e}}\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)|\phi|^2_{H(t),\omega}-\frac{\nabla|\phi|^2_{H(t),\omega}\cdot\nabla|\phi|^2_{H(t),\omega}}{(|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e})^2}\\&\geqslant\frac{1}{|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e}}\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)|\phi|^2_{H(t),\omega}-\frac{2|\nabla^{1,0}_{H(t)}\phi|^2_{H(t),\omega}\cdot|\phi|^2_{H(t),\omega}}{(|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e})^2}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

再结合 (3.7) 可知,

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\log(|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e})\geqslant\frac{2|\Lambda_\omega[\phi,\phi^{*H(t)}]|^2_{H(t)}}{|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e}}-2|\mathrm{Ric}(\omega)|_\omega. \tag{3.9}$$

应用文献 [30, 引理 2.7], 得到

$$|\sqrt{-1}\Lambda_\omega[\phi,\phi^{*H(t)}]|_{H(t)}=|[\phi,\phi^{*H(t)}]|_{H(t),\omega}\geqslant a_1|\phi|^2_{H(t),\omega}-a_2|\phi|^2_{\hat{H},\omega}, \tag{3.10}$$

其中 a_1 和 a_2 是仅依赖于 r 和 n 的正常数. 由此, 对于任何 $0\leqslant 2a<\tilde{\delta}$, 都成立

$$\begin{aligned}2|\Lambda_\omega[\phi,\phi^{*H(t)}]|^2_{H(t)}&\geqslant(|\Lambda_\omega[\phi,\phi^{*H(t)}]|_{H(t)}+\mathrm{e})^2-2\mathrm{e}^2\\&\geqslant(|\Lambda_\omega[\phi,\phi^{*H(t)}]|_{H(t)}+\mathrm{e})^{1+\frac{a}{2}}-2\mathrm{e}^2\\&\geqslant a_3(|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e})^{1+\frac{a}{2}}-a_4|\phi|^{2+a}_{\hat{H},\omega}-a_5,\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 a_3、a_4 和 a_5 是仅依赖于 a、r 和 n 的正常数. 这样, 在 $M\setminus\Sigma$ 上, (3.9) 诱导了下列不等式:

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\log(|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e})\geqslant a_3(|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e})^{\frac{a}{2}}-a_4|\phi|^{2+a}_{\hat{H},\omega}-a_5-2|\mathrm{Ric}(\omega)|_\omega. \tag{3.12}$$

利用上述不等式, 我们可得如下积分估计, 具体证明参见文献 [15].

引理 3.3 [15] 对于任何系数 $b>1$, 均存在仅依赖于 r、n、$\tilde{\delta}$、b、$|\mathrm{Ric}(\omega)|_\omega$、$(M,\omega)$ 和 C_ϕ 的正常数 $\hat{C}_b$ 使得如下估计成立:

$$\int_{M\setminus\Sigma}(\log(|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e}))^b\frac{\omega^n}{n!}\leqslant\hat{C}_b. \tag{3.13}$$

另一方面, 容易证明必存在仅依赖于 t_0^{-1} 和 $|\mathrm{Ric}(\omega)|_\omega$ 的常数 $C^*(t_0^{-1})$ 使得在 $M\setminus\Sigma$ 上, 成立

$$\Delta(\log(|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e}))\geqslant-C^*(t_0^{-1}), \tag{3.14}$$

其中 $t\geqslant t_0>0$.

在文献 [15] 中, 我们进一步证明了 $\log(|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e})\in W^{1,2}(M,\omega)$ 并且 $\log(|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e})$ 在整个流形 M 上弱意义下满足椭圆不等式 $\Delta f\geqslant -C^*(t_0^{-1})$. 根据经典的椭圆估计 (参见文献 [31, 定理 8.17]) 可知, 对于任何 $t\geqslant t_0>0$, 必有 $\log(|\phi|^2_{H(t),\omega}+\mathrm{e})\in L^\infty(M)$. 事实上, 我们得到如下命题.

命题 3.1 [15] 沿着热流 (2.1), 必存在仅依赖于 r、$\tilde{\delta}$、n、t_0^{-1}、C_ϕ 和 (M,ω) 的几何的常数 $\hat{C}_\phi$, 使得对于任何 $t\geqslant t_0>0$, 必成立

$$\sup_{M\setminus\Sigma}|\phi|^2_{H(t),\omega}\leqslant\hat{C}_\phi. \tag{3.15}$$

根据 Chern-Weil 公式 (参见文献 [7, 命题 3.4]) 并利用 Fatou 引理, 可得

$$\begin{aligned}&4\pi^2\int_M(2c_2(\mathcal{E})-c_1(\mathcal{E})\wedge c_1(\mathcal{E}))\wedge\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}\\&=\lim_{\epsilon\to0}4\pi^2\int_{\tilde{M}}(2c_2(E)-c_1(E)\wedge c_1(E))\wedge\frac{\omega^{n-2}_{k,\epsilon}}{(n-2)!}\\&=\lim_{\epsilon\to0}\int_{\tilde{M}}\mathrm{tr}(F_{H_{k,\epsilon}(t),\phi}\wedge F_{H_{k,\epsilon}(t),\phi})\wedge\frac{\omega^{n-2}_{k,\epsilon}}{(n-2)!}\\&=\lim_{\epsilon\to0}\int_{\tilde{M}}(|F_{H_{k,\epsilon}(t),\phi}|^2_{H_{k,\epsilon}(t),\omega_{k,\epsilon}}-|\Lambda_{\omega_{k,\epsilon}}F_{H_{k,\epsilon}(t),\phi}|^2_{H_{k,\epsilon}(t)})\frac{\omega^n_{k,\epsilon}}{n!}\end{aligned}$$

$$\geqslant \int_{M\backslash\Sigma}(|F_{H(t),\phi}|^2_{H(t),\omega} - |\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t),\phi}|^2_{H(t)})\frac{\omega^n}{n!}. \tag{3.16}$$

由上式以及前面的估计, 我们得到 $|F_{H(t)}|_{H(t),\omega}$ 是平方可积的, $|\Lambda_\omega F_{H(t)}|_{H(t)}$ 是一致有界的, 这样我们得到如下推论.

推论 3.1 设 $H(t)$ 是 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 上 Yang-Mills-Higgs 热流 (2.1) 的长时间解, 则对于所有 $t>0$, $H(t)$ 均是 $\mathcal{E}$ 上的相容 Hermite 度量.

4 渐近 Hermite-Einstein 度量的存在性

本节介绍文献 [15] 中关于半稳定 Higgs 层上渐近 Hermite-Einstein 度量的存在性结果并完成定理 1.2 的证明. 令 $H_{k,\epsilon}(t)$ 是热流 (2.5) 的长时间解, $H(t)$ 则是热流 (2.1) 的长时间解. 设

$$\exp(S(t)) = h(t) = \hat{H}^{-1}H(t), \tag{4.1}$$

$$\exp(S(t_1,t_2)) = h(t_1,t_2) = H^{-1}(t_1)H(t_2). \tag{4.2}$$

根据文献 [7, 引理 3.1], 有

$$\Delta_\omega \log(\mathrm{tr}h + \mathrm{tr}h^{-1}) \geqslant -2|\Lambda_\omega(F_{H,\phi})|_H - 2|\Lambda_\omega(F_{K,\phi})|_K, \tag{4.3}$$

其中 $\exp(S) = h = K^{-1}H$. 因为奇点集 Σ 为 M 中的复解析子集并且复余维数至少为 3, 所以容易验证 $(M\setminus\Sigma,\omega)$ 满足 Simpson 研究非紧 Kähler 流形的所有三个条件 (参见文献 [7, 第 873 页]). 根据不等式 (2.28)、(2.29) 和文献 [7, 假设 3], 对于 $0<t_0\leqslant t_1\leqslant t_2$, 有

$$r^{-\frac{1}{2}}\|S(t_1,t_2)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega,H(t_1))} \leqslant 2\hat{C}_1(t_2-t_1) + \mathrm{Vol}(M,\omega)\log(2r), \tag{4.4}$$

$$\|S(t_1,t_2)\|_{L^\infty(M\setminus\Sigma,H(t_1))} \leqslant r^{\frac{1}{2}}\{2C_K\hat{C}_1(t_0^{-n}+1)(t_2-t_1)+\log 2r\} \tag{4.5}$$

和

$$\|S(t_1,t_2)\|_{L^\infty(M\setminus\Sigma,H(t_1))} \leqslant C_1(t_0^{-1})\|S(t_1,t_2)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega,H(t_1))} + C_2(t_0^{-1}), \tag{4.6}$$

其中 $C_1(t_0^{-1})$ 和 $C_2(t_0^{-1})$ 是仅依赖于 C_K、$\hat{C}_1$、t_0^{-1} 和 $(M\setminus\Sigma,\omega)$ 的常数.

$(\mathcal{E}\,|_{M\setminus\Sigma},\phi)$ 可看作非紧流形 $(M\setminus\Sigma,\omega)$ 上的 Higgs 层. 回顾 Hermite 度量空间 $\mathscr{P}_0$ 中的 Donaldson 泛函 (具体参见文献 [7, 第 5 章]),

$$\mu_\omega(K,H) = \int_{M\setminus\Sigma}\mathrm{tr}(S\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{K,\phi}) + \langle\Psi(S)(\overline{\partial}_\phi S),\overline{\partial}_\phi S\rangle_K\frac{\omega^n}{n!}, \tag{4.7}$$

其中

$$\Psi(x,y) = (x-y)^{-2}(\mathrm{e}^{y-x}-(y-x)-1), \quad \exp(S) = K^{-1}H.$$

我们已知当 $t\geqslant t_0>0$ 时, $|\Lambda_\omega F_{H(t),\phi}|_{H(t)}$ 是一致有界的, 则 $H(t)$ 必是属于 $\mathscr{P}_0$. 根据文献 [7, 引理 7.1], 有如下公式:

$$\frac{d}{dt}\mu_\omega(H(t_1),H(t)) = -2\int_{M\setminus\Sigma}|\Phi(H(t),\phi)|^2_{H(t)}\frac{\omega^n}{n!}. \tag{4.8}$$

当自反 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 是半稳定时, 在文献 [15] 中, 我们证明了沿着热流 (2.1), 必有

$$\sup_{x\in M\setminus\Sigma}|\sqrt{-1}\Lambda_\omega(F_{H(t)}+[\phi,\phi^{*H(t)}])-\lambda Id_{\mathcal{E}}|_{H(t)}(x)\to 0. \tag{4.9}$$

利用反证法, 如果 (4.9) 不成立, 则可构造出 Higgs 子层使其 ω- 斜率大于 $\mu_\omega(\mathcal{E})$, 从而与半稳定性矛盾. 回顾 Simpson[7] 关于非紧情形的讨论. Simpson 假设存在初始 Hermite 度量 K 满足 $\sup_{M\setminus\Sigma}|\Lambda_\omega F_{K,\phi}|_K<\infty$, 然后对 $(\mathcal{E},\phi,K)$ 利用 Chern-Weil 公式定义出关于度量 K 的解析稳定性 (具体参见文献 [7, 引理 3.2]). 在 K- 解析稳定的假设下, Simpson 证明了当时间趋于无穷时 (2.1) 的解必收敛于 Higgs 丛上的一 Hermite-Einstein 度量. 在本文中, 我们需特别关注 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 的解析稳定性 (解析半稳定性). 令 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$ 的子层, 在奇点集 $V=\Sigma_{\mathcal{F}}\cup\Sigma$ 外, $\mathcal{F}$ 可看作 $\mathcal{E}$ 的子层, 那么 $\hat{H}$ 诱导了 $\mathcal{F}$ 上的 Hermite 度量 $\hat{H}_{\mathcal{F}}$. Bruasse 在文献 [32, 命题 4.1] 中证明了下列 Chern-Weil 公式:

$$\deg_\omega(\mathcal{F})=\int_{M\setminus V}c_1(\mathcal{F},\hat{H}_{\mathcal{F}})\wedge\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{4.10}$$

其中 $c_1(\mathcal{F},\hat{H}_{\mathcal{F}})$ 是诱导度量 $\hat{H}_{\mathcal{F}}$ 所对应的第一 Chern 形式. 根据 (4.10) 可知, Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 的稳定性 (半稳定性) 等价于 Simpson 意义下关于度量 $\hat{H}$ 的解析稳定性 (解析半稳定性). 但我们不清楚的是, 当度量 $\hat{H}$ 换为相容度量 $H(t)$ $(t>0)$ 时上述 Chern-Weil 公式是否仍成立. 因此, Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 的稳定性 (半稳定性) 并不隐含关于相容度量 $H(t)$ 的解析稳定性 (解析半稳定性). 另一方面, 我们的初始度量 $\hat{H}$ 并不满足 Simpson 所要求的曲率有界性条件 (即 $|\Lambda_\omega F_{\hat{H},\phi}|_{\hat{H}}$ 并非 L^∞ 有界), Simpson[7] 关于非紧情形的讨论并不能直接应用到我们所研究的情形, 因而我们需要新的讨论.

假设 (4.9) 不成立, 由 $\|\Lambda_\omega(F_{H(t),\phi})-\lambda Id_{\mathcal{E}}\|_{L^2}$ 的单调性, 我们可假设

$$\lim_{t\to+\infty}\int_M|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t),\phi}-\lambda Id_{\mathcal{E}}|^2_{H(t)}\frac{\omega^n}{n!}=C^*>0. \tag{4.11}$$

由 (4.8) 得

$$\mu_\omega(H(t_0),H(t))=-2\int_{t_0}^t\int_{M\setminus\Sigma}|\Lambda_\omega F_{H(s),\phi}-\lambda Id_{\mathcal{E}}|^2_{H(s)}\frac{\omega^n}{n!}ds\leqslant-2C^*(t-t_0), \tag{4.12}$$

其中 $0<t_0\leqslant t$. 因而, 由 (4.4) 得

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{-\mu_\omega(H(t_0),H(t))}{\|S(t_0,t)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega,H(t_0))}}\geqslant r^{-\frac{1}{2}}\frac{C^*}{\hat{C}_1}. \tag{4.13}$$

根据 Donaldson 泛函的定义 (4.7), 我们知道必存在时间序列 $t_i\to+\infty$ 使得

$$\|S(1,t_i)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega,H(1))}\to+\infty. \tag{4.14}$$

另一方面, 容易验证对任意 $t_1,t_2,t_3\leqslant 0$, 成立

$$|S(t_1,t_3)|_{H(t_1)}\leqslant r(|S(t_1,t_2)|_{H(t_1)}+|S(t_2,t_3)|_{H(t_2)}). \tag{4.15}$$

根据 (4.6), 可得

$$\lim_{i\to\infty}\|S(t_0,t_i)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega,H(t_0))}\to+\infty \tag{4.16}$$

和

$$\begin{aligned}\|S(t_0,t)\|_{L^\infty(M\setminus\Sigma,H(t_0))} &\leqslant r\|S(1,t)\|_{L^\infty(M\setminus\Sigma,H(1))}+r\|S(t_0,1)\|_{L^\infty(M\setminus\Sigma,H(1))}\\ &\leqslant r^2C_3(\|S(t_0,t)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega,H(t_0))}+\|S(t_0,1)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega,H(t_0))})\\ &\quad +r\|S(t_0,1)\|_{L^\infty(M\setminus\Sigma,H(t_0))}+rC_4,\end{aligned}\tag{4.17}$$

其中 $0<t_0\leqslant 1\leqslant t$, C_3 和 C_4 是仅依赖于 r、C_K、$\hat{C}_1$、t_0^{-1} 和 $(M\setminus\Sigma,\omega)$ 的正常数.

设 $u_i(t_0)=\|S(t_0,t_i)\|_{L^1}^{-1}S(t_0,t_i)\in S_{H(t_0)}(\mathcal{E}\mid_{M\setminus\Sigma})$, 其中

$$S_{H(t_0)}(\mathcal{E}\mid_{M\setminus\Sigma})=\{\eta\in\Omega^0(M\setminus\Sigma,\mathrm{End}(\mathcal{E}\mid_{M\setminus\Sigma}))\mid \eta^{*H(t_0)}=\eta\},$$

则

$$\|u_i(t_0)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega,H(t_0))}=1.$$

利用 (2.18) 并取极限, 可得

$$\int_{M\setminus\Sigma}\mathrm{tr}S(t_0,t_i)\frac{\omega^n}{n!}=\int_{t_0}^{t_i}\int_M\mathrm{tr}(\Phi(H(t),\omega))\frac{\omega^n}{n!}dt=0.\tag{4.18}$$

因此,

$$\int_{M\setminus\Sigma}\mathrm{tr}u_i(t_0)\frac{\omega^n}{n!}=0.\tag{4.19}$$

根据不等式 (4.13)、(4.14)、(4.17) 和文献 [7, 引理 5.4], 通过取子列, 当 $i\to\infty$ 时必有在 L_1^2 弱意义下, $u_i(t_0)\to u_\infty(t_0)$, 极限 $u_\infty(t_0)$ 满足 $\|u_\infty(t_0)\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega,H(t_0))}=1$, $\int_M\mathrm{tr}(u_\infty(t_0))\frac{\omega^n}{n!}=0$ 和

$$\|u_\infty(t_0)\|_{L^\infty(M\setminus\Sigma,H(t_0))}\leqslant r^2C_3.\tag{4.20}$$

如果 $\Upsilon:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是正函数, 满足当 $\lambda_1>\lambda_2$ 时必有 $\Upsilon(\lambda_1,\lambda_2)<(\lambda_1-\lambda_2)^{-1}$, 则下式成立:

$$\int_{M\setminus\Sigma}\mathrm{tr}(u_\infty(t_0)\sqrt{-1}\Lambda_\omega(F_{H(t_0),\phi}))+\langle\Upsilon(u_\infty(t_0))(\overline{\partial}_\phi u_\infty(t_0)),\overline{\partial}_\phi u_\infty(t_0)\rangle_{H(t_0)}\frac{\omega^n}{n!}\leqslant -r^{-\frac{1}{2}}\frac{C^*}{\hat{C}_1}.\tag{4.21}$$

进一步, 通过取子列, 令 $t_0\to 0$, 则在奇点集 Σ 之外局部 L_1^2 弱意义下, $u_\infty(t_0)\to u_\infty$, 并且极限 u_∞ 满足

$$\int_M\mathrm{tr}(u_\infty)\frac{\omega^n}{n!}=0,\quad \|u_\infty\|_{L^1(M\setminus\Sigma,\omega,\hat{H})}=1\tag{4.22}$$

和

$$\int_{M\setminus\Sigma}\mathrm{tr}(u_\infty\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{\hat{H},\phi})+\langle\Upsilon(u_\infty)(\overline{\partial}_\phi u_\infty),\overline{\partial}_\phi u_\infty\rangle_{\hat{H}}\frac{\omega^n}{n!}\leqslant -r^{-\frac{1}{2}}\frac{C^*}{\hat{C}_1}.\tag{4.23}$$

上述估计的详细证明参见文献 [15]. 利用 Chern-Weil 公式 (4.10) 和 (4.23)、Uhlenbeck 和 Yau 的结果[4] 及 Simpson[7] 的讨论, 我们可构造 $(\mathcal{E},\phi)$ 的 Higgs 子层 E_α 使其 ω- 斜率大于 $\mu_\omega(\mathcal{E})$, 因而得到矛盾. 这样我们得到下面命题.

命题 4.1[15] 令 $H(t)$ 是热流 (2.1) 的长时间解. 如果自反 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 是半稳定的, 则当 $t\to+\infty$ 时, 必有

$$\int_{M\setminus\Sigma}|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t),\phi}-\lambda Id_{\mathcal{E}}|_{H(t)}^2\frac{\omega^n}{n!}\to 0.\tag{4.24}$$

命题 4.1、不等式 (2.29) 和推论 3.1 隐含了定理 1.2 中关于半稳定 Higgs 层上渐近相容 Hermite-Einstein 度量结构的存在性结论. 再次利用 Fatou 引理, 可得当 $t>0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&4\pi^2\int_M\left(2c_2(\mathcal{E})-\frac{r-1}{r}c_1(\mathcal{E})\wedge c_1(\mathcal{E})\right)\wedge\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}4\pi^2\int_{\tilde{M}}\left(2c_2(E)-\frac{r-1}{r}c_1(E)\wedge c_1(E)\right)\wedge\frac{\omega_{k,\epsilon}^{n-2}}{(n-2)!}\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\tilde{M}}\mathrm{tr}(F^{\perp}_{H_{k,\epsilon}(t),\phi}\wedge F^{\perp}_{H_{k,\epsilon}(t),\phi})\wedge\frac{\omega_{k,\epsilon}^{n-2}}{(n-2)!}\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\tilde{M}}|F^{\perp}_{H_{k,\epsilon}(t),\phi}|^2_{H_{k,\epsilon}(t),\omega_{k,\epsilon}}-|\Lambda_{\omega_{k,\epsilon}}F^{\perp}_{H_{k,\epsilon}(t),\phi}|^2_{H_{k,\epsilon}(t)}\frac{\omega_{k,\epsilon}^{n}}{n!}\\
&\geqslant\int_{M\setminus\Sigma}|F^{\perp}_{H(t),\phi}|^2_{H(t),\omega}\frac{\omega^n}{n!}-\int_{M\setminus\Sigma}\bigg|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t),\phi}-\lambda Id_{\mathcal{E}}\\
&\quad-\frac{1}{r}\mathrm{tr}(\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H(t),\phi}-\lambda Id_{\mathcal{E}})Id_{\mathcal{E}}\bigg|^2_{H(t)}\frac{\omega^n}{n!},
\end{aligned}\tag{4.25}$$

其中 $F^{\perp}_{H,\phi}$ 为 $F_{H,\phi}$ 的无迹部分. 令 $t\to+\infty$, 由 (4.24) 可得 Bogomolov 型不等式 (1.6).

下面证明, 若 Higgs 层 $(\mathcal{E},\phi)$ 上存在渐近相容 Hermite-Einstein 度量结构, 则必是半稳定的, Higgs 丛情形可参见文献 [33]. 令 s 是 Higgs 层 $(\mathcal{G},\theta)$ 上 θ- 不变全纯截面, 在 $M\setminus\Sigma_{\mathcal{G}}$ 上, 必成立下列 Weitzenböck
公式:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta_\omega|s|^2_H&=\sqrt{-1}\Lambda_\omega\partial\overline{\partial}|s|^2_H\\
&=|D_H^{1,0}s|^2_{H,\omega}+\sqrt{-1}\Lambda_\omega\langle s,F_Hs\rangle_H\\
&=|D_H^{1,0}s|^2_{H,\omega}-\langle s,\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H,\theta}s\rangle_H-\sqrt{-1}\Lambda_\omega\langle s,[\theta,\theta^{*H}]s\rangle_H\\
&\geqslant|D_H^{1,0}s|^2_{H,\omega}-\langle s,\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H,\theta}s\rangle_H.
\end{aligned}\tag{4.26}$$

假设 Higgs 层 $(\mathcal{G},\theta)$ 存在渐近相容 Hermite-Einstein 度量结构, 即对任意小的 δ, 都存在相容 Hermite 度量 H_δ 使得

$$\sup_{x\in M\setminus\Sigma_{\mathcal{G}}}|\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_\delta,\theta}-\lambda(\mathcal{G})Id|_{H_\delta}(x)<\delta.\tag{4.27}$$

如果 $\lambda(\mathcal{G})<0$, 则取 δ 充分小, 在 $M\setminus\Sigma_{\mathcal{G}}$ 上, 必成立

$$\Delta_\omega|s|^2_{H_\delta}\geqslant 2|D_H^{1,0}s|^2_{H_\delta,\omega}-\lambda(\mathcal{G})|s|^2_{H_\delta}.\tag{4.28}$$

由于 H_δ 是相容的, 根据文献 [8, 定理 2] 可知, $|s|_{H_\delta}\in L^\infty(M)$. 因此, 不等式 (4.28) 可延拓至整个紧致流形 M, 则可得

$$s\equiv 0.\tag{4.29}$$

设 $\mathcal{F}$ 是 $(\mathcal{E},\phi)$ 的 Higgs 子层, 其秩为 p. 令 $\mathcal{G}=\wedge^p\mathcal{E}\otimes\det(\mathcal{F})^{-1}$, θ 是自然诱导的 $\mathcal{G}$ 的 Higgs 场, 则 $(\mathcal{G},\theta)$ 是一个 Higgs 层, 其上存在渐近相容 Hermite-Einstein 度量结构, 并且

$$\lambda(\mathcal{G})=\frac{2p\pi}{\mathrm{Vol}(M,\omega)}(\mu_\omega(\mathcal{E})-\mu_\omega(\mathcal{F})).\tag{4.30}$$

另一方面, 包含映射 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E}$ 诱导了 $\mathcal{G}$ 上的一非平凡的 θ- 不变全纯截面. 由前面可知必有 $\lambda(\mathcal{G}) \geqslant 0$, 因此, $(\mathcal{E}, \phi)$ 是 ω- 半稳定的. 这样我们完成了定理 1.2 的证明.

致谢　作者感谢审稿人对本文的建议和帮助.

参考文献

1 Narasimhan M S, Seshadri C S. Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface. Ann of Math (2), 1965, 82: 540–567

2 Donaldson S K. Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles. Proc Lond Math Soc (3), 1985, 50: 1–26

3 Donaldson S K. Infinite determinants, stable bundles and curvature. Duke Math J, 1987, 54: 231–247

4 Uhlenbeck K, Yau S T. On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles. Comm Pure Appl Math, 1986, 39: 257–293

5 Li J, Yau S T. Hermitian-Yang-Mills connections on non-Kähler manifolds. In: Mathematical Aspects of String Theory. Singapore: World Scientific, 1987, 560–573

6 Hitchin N J. The self-duality equations on a Riemann surface. Proc Lond Math Soc (3), 1987, 55: 59–126

7 Simpson C T. Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization. J Amer Math Soc, 1988, 1: 867–918

8 Bando S, Siu Y T. Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics. In: Geometry and Analysis on Complex Manifolds. Singapore: World Scientific, 1994, 39–50

9 Bartolomeis P D, Tian G. Stability of complex vector bundles. J Differential Geom, 1996, 43: 232–275

10 Biquard O. Sur les fibrés paraboliques sur une surface complexe. J Lond Math Soc (2), 1996, 53: 302–316

11 Li J Y, Narasimhan M S. Hermitian-Einstein metrics on parabolic stable bundles. Acta Math Sin Engl Ser, 1999, 15: 93–114

12 Li J Y. Hermitian-Einstein metrics and Chern number inequalities on parabolic stable bundles over Kähler manifolds. Comm Anal Geom, 2000, 8: 445–475

13 Fu J X, Yau S T. The theory of superstring with flux on non-Kähler manifolds and the complex Monge-Ampère equation. J Differential Geom, 2008, 78: 369–428

14 Biswas I, Schumacher G. Yang-Mills equation for stable Higgs sheaves. Internat J Math, 2009, 20: 541–556

15 Li J Y, Zhang C J, Zhang X. Semi-stable Higgs sheaves and Bogomolov type inequality. Calc Var Partial Differential Equations, 2017, 56: 81

16 Kobayashi S. Differential Geometry of Complex Vector Bundles. Princeton: Princeton University Press, 1987

17 Jacob A. Existence of approximate Hermitian-Einstein structures on semi-stable bundles. Asian J Math, 2014, 18: 859–884

18 Li J Y, Zhang X. Existence of approximate Hermitian-Einstein structures on semi-stable Higgs bundles. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 52: 783–795

19 Bogomolov F A. Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties. Izv Akad Nauk SSSR, 1978, 42: 1227–1287

20 Langer A. Bogomolov's inequality for Higgs sheaves in positive characteristic. Invent Math, 2015, 199: 889–920

21 Lan G, Sheng M, Zuo K. Semistable Higgs bundles and representations of algebraic fundamental groups: Positive characteristic case. ArXiv:1210.8280, 2012

22 Hironaka H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I. Ann of Math (2), 1964, 79: 109–203

23 Hironaka H. Flattening theorem in complex-analytic geometry. Amer J Math, 1975, 97: 503–547

24 Griffiths P, Harris J. Principles of Algebraic Geometry. New York: John Wiley & Sons, 1978

25 Cheng S Y, Li P. Heat kernel estimates and lower bound of eigenvalues. Comment Math Helv, 1981, 56: 327–338

26 Grigor'yan A. Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds. J Differential Geom, 1997, 45: 33–52

27 Sibley B. Asymptotics of the Yang-Mills flow for holomorphic vector bundles over Kähler manifolds: The canonical structure of the limit. J Reine Angew Math, 2015, 706: 123–191

28 Li J Y, Zhang X. The limit of the Yang-Mills-Higgs flow on Higgs bundles. Int Math Res Not IMRN, 2017, 2017: 232–276

29 Li J Y, Zhang X. The gradient flow of Higgs pairs. J Eur Math Soc (JEMS), 2011, 13: 1373–1422

30 Simpson C T. Higgs bundles and local systems. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 1992, 75: 5–95

31 Gilbarg D, Trudinger N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed. Grundlehren der Math-

ematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224. Berlin: Springer-Verlag, 1983

32 Bruasse L. Harder-Narasimhan filtration for complex bundles or torsion-free sheaves. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2003, 53: 541–564

33 Bruzzo U, Grana Otero B. Metrics on semistable and numerically effective Higgs bundles. J Reine Angew Math, 2007, 612: 59–79

Canonical metric structures on semi-stable Higgs sheaves

Jiayu Li, Chuanjing Zhang & Xi Zhang

Abstract In this paper, we first recall some classical results of canonical metrics on holomorphic vector bundles. Then, we introduce our results about the existence of admissible approximate Hermitian-Einstein structures on semi-stable reflexive Higgs sheaves and the related Bogomolov type inequality.

Keywords Higgs sheaf, approximate Hermitian-Einstein structure, Bogomolov type Chern's numbers inequality

MSC(2010) 53C07, 58E15

doi: 10.1360/N012016-00168