



星敏感器高精度星点提取系统误差分析及 补偿方法研究

贾辉^①, 杨建坤^{①②*}, 李修建^①, 杨俊才^{①②}, 杨孟飞^{②③}, 刘一武^②, 郝云彩^②

① 国防科技大学理学院技术物理研究所, 长沙 410073;

② 北京控制工程研究所, 空间智能控制技术国家级重点实验室, 北京 100190;

③ 中国空间技术研究院, 北京 100094

* E-mail: jkyang@nudt.edu.cn

收稿日期: 2010-05-24; 接受日期: 2010-08-13

摘要 星点质心位置提取系统误差是影响星敏感器姿态测量精度的重要因素, 从理论上提出这种误差的来源、大小和物理机制, 能够为进一步提高星敏感器精度提供有效的帮助. 根据星点质心提取的物理过程, 分析误差的来源和大小, 利用频域分析方法, 从采样频率限制及采样窗口限制 2 个角度出发对星点图像亚像元质心提取系统误差进行了理论分析, 导出了亚像元质心提取系统误差的解析表达式, 得到该系统误差与像点高斯半径、像点的真实位置及采样窗口像元数量的函数关系, 并在此基础上提出了以像点高斯半径为参数的误差补偿方法. 研究表明, 在进行了误差补偿后, 像点高斯半径在 0.2~1.4 像元范围内, 3 像元窗口质心提取残余误差小于 2×10^{-3} 像元, 而 5 像元窗口质心提取残余误差小于 2×10^{-4} 像元.

关键词

星敏感器
星点提取
亚像元质心估计
质心算法
频域分析
系统误差补偿

1 引言

星敏感器是一种三轴姿态测量装置, 具有高精度和绝对测量的优势, 在航天器的姿态测量中有广泛应用^[1,2]. 为突破平面阵列探测器像元所对应的精度, 目前一般通过焦斑弥散方法使得星点图像扩散到探测器的多个像元, 通过内插细分星点提取方法, 达到亚像元精度级别^[1,3,4]. 通过研究星点质心位置提取方法的系统误差及其补偿方法, 可以进一步提高星敏感器姿态测量精度, 在实际应用中具有重要意义.

从影响星敏感器精度的因素分析, 除光学系统像差、光电采集系统噪声等各方面因素外, 星点提取系统误差也是必须考虑的一个重要因素. 由于这种

因素可以通过理论分析和补偿的方法进行有效减小或消除, 在实用中能够得到较好的控制, 因而对星点提取误差进行补偿是一种提高星敏感器姿态测量精度的行之有效的简单方法.

一般认为, 星点提取过程的系统误差主要与成像星点的光强分布、采样窗口的大小、像点在探测器上的成像位置有关. 如 Stanton 等人^[5]在星敏感器星点提取实验中报道了以像元尺寸为周期的近似正弦函数周期性误差; Grossman 等人^[6]在像点提取实验中报道了近似锯齿形周期性误差; Alexander 等人^[7]用频域分析方法解释了误差随像点模糊而减小的现象; Hancock 等人^[8]通过仿真计算指出不同高斯半径大小及采样像元窗口数量都会影响星点提取精度; Fisher

等人^[9]对成像点能量分布采用简化高斯分布模型, 得到了有限采样窗口条件下像点高斯半径与星点提取误差的函数关系.

本文采用频域分析方法, 引入有限像元窗口限制因素, 从采样频率限制及采样窗口限制2个方面出发对星点质心提取系统误差进行了完整的理论分析. 得到高斯像点质心提取系统误差的解析表达式, 给出星点提取误差与像点高斯半径、像点的真实位置及采样窗口像元数量的函数关系. 并在此基础上提出以像点高斯半径为参数的星点提取误差补偿方法, 将能量分布变化等效为高斯半径变化, 从而实现复杂条件下的星点提取误差高精度补偿.

2 质心法星点提取的误差分析

目前, 星敏感器进行恒星位置提取的最常用方法是质心法^[5-8]. 当星点通过光学系统成像于多个探测器单元上时, 设第 (i, j) 像元中心的坐标为 (x_i, y_j) , 该像元探测到的能量为 U_{ij} , 则提取出的星点坐标为

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i,j} x_i U_{ij}}{\sum_{i,j} U_{ij}}, \quad \hat{y} = \frac{\sum_{i,j} y_j U_{ij}}{\sum_{i,j} U_{ij}}. \quad (1)$$

当星点经过光学系统成像, 光斑弥散后, 星点光强可以用高斯函数描述^[3,4,10,11]. 图像能量高斯分布模型如下式所示

$$I(x, y, x_0, y_0) = \frac{I_0}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] \exp\left[-\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2)$$

其中, I_0 为目标像点在探测器上的总能量, (x_0, y_0) 为像点真实的质心, σ 为像点的高斯半径. 由于高斯分布在 x 轴和 y 轴上相互独立, 对于一维情况, (2)式简化为

$$I(x, x_0) = \frac{I_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (3)$$

同样, (1)式简化为

$$\hat{x} = \frac{\sum_i x_i U_i}{\sum_i U_i}, \quad (4)$$

则像点质心位置估计值 \hat{x} 与真实值 x_0 的误差即为质心法的系统误差

$$\delta_x = \hat{x} - x_0 = \frac{\sum_i x_i U_i}{\sum_i U_i} - x_0. \quad (5)$$

以像元长度为单位长度, 则第 i 像元接收的能量

可以写为

$$U_i = \int_{x_i-1/2}^{x_i+1/2} I(x, x_0) dx, \quad (6)$$

由(3)~(6)式可知, 星点提取系统误差大小与真实质心位置 x_0 、像点高斯半径 σ 及采样窗口像元数量有关. 以下通过数值模拟讨论星点提取系统误差与上述因素的具体关系. 图1给出了不同高斯半径及真实质心位置条件下质心法星点提取系统误差的模拟计算结果.

由图1可见, 当像点高斯半径值较小时($\sigma < 0.3$, 以像元长度为单位长度, 后同), 星点质心提取系统误差与真实质心在探测器的位置成近似正弦函数关系, 而高斯半径较大时($\sigma > 0.6$)星点质心提取系统误差与真实质心位置成近似线性关系. 为进一步讨论误差原因, 图2给出几种典型条件下星点能量分布与探测器像元能量采样情况.

由图2可见, 当像点高斯半径值较小时, 星点像能量分布基本上限于一个像元内, 星点像空间频率高于像元采样频率, 使得质心真实值 x_0 的绝对值大于估计值 \hat{x} 的绝对值(图2(a)), 随着质心真实位置逐渐靠近像元边缘由于对称关系误差逐渐减小为0(图2(b)), 使得误差与像点真实位置呈现近似正弦函数关系, 且幅值随高斯半径减小而增大. 随着光斑尺寸逐渐变大, 星点像空间频率逐渐降低, 星点成像于多个像元上, 精度也逐渐提高(图2(c)和(d)). 当高斯半径比较大时, 像点能量分布超出了采样像元窗口范围(图2(e)), 窗口截断能量的不对称性使质心真实值 x_0 的绝对值大于估计值 \hat{x} 的绝对值, 当真实质心位于像元边缘时该偏差达到最大值(图2(f)), 因而误差与质心真实位置

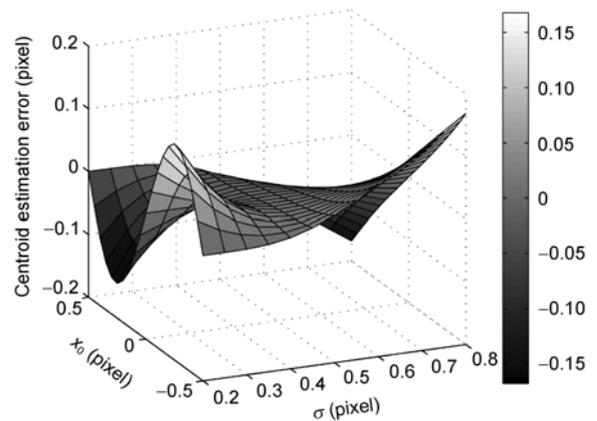


图1 不同高斯半径及真实质心位置下星点质心提取系统误差(3像元窗口)

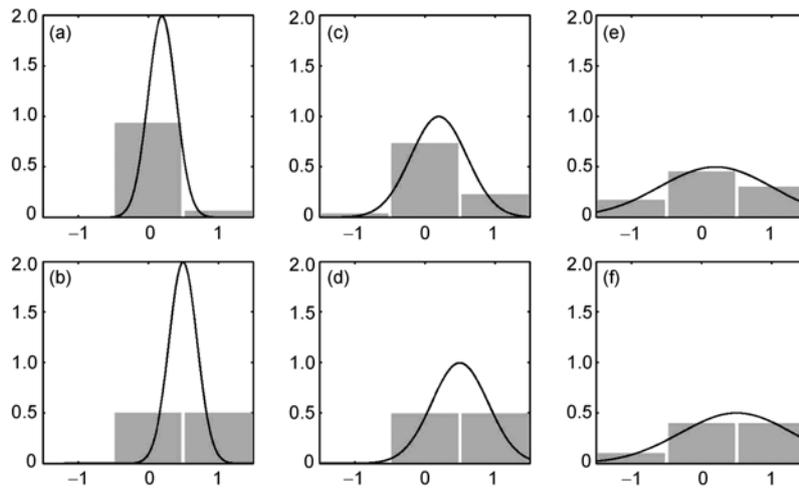


图2 几种典型条件下星点能量分布与探测器像元能量采样情况
 (实线: 星点能量分布; 条形: 探测器像元接收到的能量; 纵坐标: 相对能量值, 3像元窗口)
 (a) $x_0=0.2, \sigma=0.2$; (b) $x_0=0.5, \sigma=0.2$; (c) $x_0=0.2, \sigma=0.4$; (d) $x_0=0.5, \sigma=0.4$; (e) $x_0=0.2, \sigma=0.8$; (f) $x_0=0.5, \sigma=0.8$.

呈现近似线性关系且幅值随高斯半径增大而增大。

从图2中还可以看到上述误差均以像元为周期, 证明了引言中提到的近似正弦函数周期性误差及近似锯齿函数周期性误差。

当像点真实质心位于像元上任意位置时, 在各点位置上由于误差大小不同, 对提取精度的贡献大小要综合考虑. 设真实质心位置在单个像元(即坐标值为[-0.5, 0.5])范围内均匀分布, 则不同高斯半径条件下星点质心提取 RMS 误差表达式为

$$\delta_{\text{RMS}}(\sigma) = \left[\int_{-0.5}^{0.5} \delta(x_0, \sigma)^2 dx_0 \right]^{1/2}. \quad (7)$$

上述公式的模拟结果如图3所示。

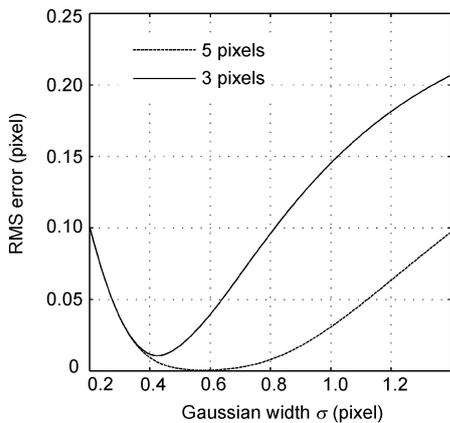


图3 不同高斯半径下质心提取系统误差 RMS 值

从图3中可见, 质心提取系统误差随像点高斯半径增大先减小后增加, 因而高斯半径存在最佳值, 对于3像元窗口最佳值为0.3~0.5像元, 而对于5像元窗口则为0.5~0.7像元。

3 星点提取系统误差频域分析

3.1 质心估计的傅里叶频域表达

星点图像采样过程可以分解为3个步骤, 如图4所示. 首先像点能量分布函数 $I(x)$ 与单个像元响应函数 $p(x)$ 卷积得到像元接收能量函数 $f(x)$, 再与像元采样函数 $s(x)$ 相乘得到 $f_s(x)$, 最后与窗口函数 $r(x)$ 相乘得到窗口像元采样函数 $g(x)$. 即有

$$g(x) = f(x) \times s(x) \times r(x), \quad (8)$$

其中,

$$f(x) = I(x, x_0) \otimes p(x). \quad (9)$$

考虑探测器像元填充率为100%, 各像元响应函数相同, 则像元响应函数 $p(x)$ 等效于矩形函数, (8)式可以写为

$$g(x) = I(x, x_0) \otimes \text{rect}\left(\frac{x}{T}\right) \times \text{comb}\left(\frac{x}{T}\right) \times \text{rect}\left(\frac{x}{mT}\right), \quad (10)$$

其中, $\text{rect}(x/T)$ 为矩形函数, $\text{comb}(x/T)$ 为梳状采样函数, T 为像元长度, m 为窗口像元数量. 若以像元长度为单位长度, 则上式可写为

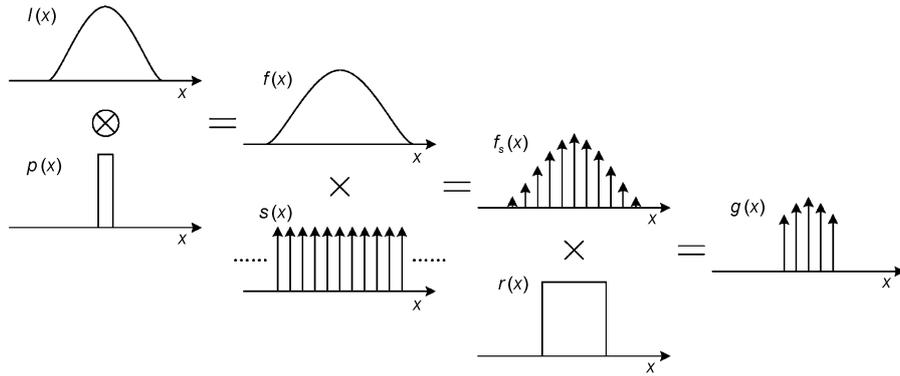


图4 星点图像采样过程分解示意图

$$g(x) = I(x, x_0) \otimes \text{rect}(x) \times \text{comb}(x) \times \text{rect}\left(\frac{x}{m}\right). \quad (11)$$

由上述窗口像元采样函数 $g(x)$ 定义可知, 质心位置坐标估计值 \hat{x} 可用 $g(x)$ 表示为

$$\hat{x} = \frac{\sum_i x_i U_i}{\sum_i U_i} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)}, \quad (12)$$

又由傅里叶变换的导数定律及面积对应关系可知^[7]

$$\hat{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)} = -\frac{G'(0)}{2\pi i G(0)}, \quad (13)$$

其中, $G(s)$ 为 $g(x)$ 的傅里叶变换函数.

3.2 星点提取系统误差

如果目标像点质心所在像元中心为坐标原点, 则像元接收能量函数 $f(x)$ 为偶函数 $f_e(x)$ 平移 d 得到. 则有

$$f(x) = f_e(x-d), \quad (14)$$

又由(3)和(9)式知 $d=x_0$, 即为像点真实质心.

在频域有

$$F(s) = \exp(-2\pi i d s) F_e(s), \quad (15)$$

其中, $F(s)$ 及 $F_e(s)$ 分别为 $f(x)$ 和 $f_e(x)$ 的傅里叶变换函数. 由(8)和(15)式可得

$$\begin{aligned} G(s) &= F(s) \otimes R(s) \otimes S(s) \\ &= \exp(-2\pi i d s) F_e(s) \otimes R(s) \otimes S(s), \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $R(s)$ 及 $S(s)$ 分别为 $r(x)$ 和 $s(x)$ 的傅里叶变换函数.

由卷积的导数性质可知

$$\begin{aligned} G'(s) &= \frac{\partial F(s)}{\partial s} \otimes R(s) \otimes S(s) \\ &= [-2\pi i d \exp(-2\pi i d s) F_e(s) \\ &\quad + \exp(-2\pi i d s) F_e'(s)] \otimes R(s) \otimes S(s). \end{aligned} \quad (17)$$

把(16)和(17)式代入(13)式可得

$$\begin{aligned} \hat{x} &= -\frac{G'(0)}{2\pi i G(0)} = -\frac{G'(s)}{2\pi i G(s)} \Big|_{s=0} \\ &= d - \frac{\exp(-2\pi i d s) F_e'(s) \otimes R(s) \otimes S(s)}{2\pi i \exp(-2\pi i d s) F_e(s) \otimes R(s) \otimes S(s)} \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (18)$$

因而星点提取系统误差可写为

$$\begin{aligned} \delta_x &= \hat{x} - d \\ &= -\frac{\exp(-2\pi i d s) F_e'(s) \otimes R(s) \otimes S(s)}{2\pi i \exp(-2\pi i d s) F_e(s) \otimes R(s) \otimes S(s)} \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (19)$$

由于梳状采样函数 $\text{comb}(x)$ 在频域同样为梳状采样函数, 所以(19)式可写为

$$\delta_x = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi i d (s-n)) F_e'(s-n) \otimes R(s-n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi i d (s-n)) F_e(s-n) \otimes R(s-n)} \Big|_{s=0}. \quad (20)$$

上式即为质心法星点提取系统误差表达式. 以下根据实际情况做适当简化, 得到明确的解析表达式.

3.3 无采样窗口限制星点提取系统误差分析

当像点能量分布比较集中, 即像点高斯半径较小时, 像点的空间频率较大, 大于探测器像元采样频率, 造成星点提取误差. 这种情况下通常大部分能量

集中于采样窗口内, 即窗口像元数可以认为是无限大, 窗口函数的傅里叶变换函数 $R(s)$ 等效于 δ 函数, 由 δ 函数卷积性质可得

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{-1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi id(s-n)) F_e'(s-n)}{2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi id(s-n)) F_e(s-n)} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{-1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi idn) F_e'(-n)}{2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi idn) F_e(-n)}. \end{aligned} \quad (21)$$

由于 $F_e(s)$ 为偶函数, $F_e'(s)$ 为奇函数, 上式可写为

$$\delta_x = \frac{1}{\pi} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2\pi dn) F_e'(n)}{F_e(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi dn) F_e(n)}. \quad (22)$$

由(9)式可得

$$\begin{aligned} F_e(s) &= \mathcal{F}\{f_e(x)\} = \mathcal{F}\{I(x,0) \otimes \text{rect}(x)\} \\ &= I_0 \exp[-2(\pi\sigma s)^2] \sin(s). \end{aligned} \quad (23)$$

因而有

$$F_e(0) = I_0, \quad F_e(n) = 0 \quad (n \neq 0), \quad (24)$$

又有

$$\begin{aligned} F_e'(n) &= I_0 \exp[-2(\pi\sigma n)^2] \cos(\pi n) / n \\ &= (-1)^n I_0 \exp[-2(\pi\sigma n)^2] / n. \end{aligned} \quad (25)$$

把(24)和(25)式代入(22)式, 注意到 $d=x_0$, 可得

$$\delta_x = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp[-2(\pi\sigma n)^2] \sin(2\pi x_0 n) / n. \quad (26)$$

上式即为无采样窗口限制条件下, 高斯光斑质心估计系统误差的解析表达式. 可以看出, 误差幅值随像点高斯半径增大而减小.

实际上, 当 $\sigma > 0.2$, $\exp[-2(\pi\sigma)^2] \gg \exp[-2(\pi\sigma n)^2]$, ($n > 1$), (26)式可写为

$$\delta_x \approx -\frac{1}{\pi} \exp[-2(\pi\sigma)^2] \sin(2\pi x_0). \quad (27)$$

由上式可以看出, 星点提取系统误差与像点真实位置近似成正弦函数关系, 且随像点高斯半径增大而减小, 与前述模拟计算结果一致. 这就说明, 当像点能量分布比较集中, 采样窗口限制可以忽略的情况下, 星点提取误差主要来源于采样频率限制, 且与像点真实位置成近似正弦函数关系, 也就是前述的正弦周期性误差, 同时高斯半径大小反映了像点能量集中程度, 因而星点提取误差随像点能量弥散而减小.

极限情况下, 当光斑大小足够小, 即 $\sigma \rightarrow 0$, $\exp[-2(\pi\sigma n)^2] \rightarrow 1$, 可以得到

$$\begin{aligned} \delta_x &\rightarrow -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(2\pi x_0 n) / n \\ &\rightarrow -x_0. \end{aligned} \quad (28)$$

由上式可知, 当像点能量过于集中, 则质心坐标估计值始终为 0, 因而误差等于负的真实质心坐标.

3.4 采样窗口限制条件下星点提取系统误差分析

由(26)和(27)式知, 当无采样窗口限制时, 只要增大像点高斯半径就可以减小星点提取误差. 但在实际条件下, 增大像点高斯半径使得单个像元接收的星点能量减少, 从而使得星点信号的信噪比减小, 因而使噪声引起的姿态测量误差增加, 所以实际中往往采用有限个像元, 如 3 像元或 5 像元窗口^[8]. 当像点高斯半径较大, 使得像点能量分布超出采样窗口范围时, 需要考虑采样窗口限制因素. 将(20)式中的卷积表达式展开为积分, 可以写为

$$\delta_x = \frac{-1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi id\alpha) F_e'(\alpha) R(n-\alpha) d\alpha \right)}{2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi id\alpha) F_e(\alpha) R(n-\alpha) d\alpha \right)}. \quad (29)$$

由(12)和(13)式知, (29)式中分母的连加项实际上为像点能量分布函数 $I(x)$ 在整个窗口范围积分, 因而(29)式可写为

$$\delta_x = \frac{-1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi id\alpha) F_e'(\alpha) R(n-\alpha) d\alpha \right)}{2\pi i \int_{-m/2}^{m/2} I(x, x_0) dx}. \quad (30)$$

注意到窗口函数的傅里叶变换函数 $R(s)$ 为偶函数, 则 $R(n-\alpha) + R(-n-\alpha)$ 也为偶函数, 且 $F_e(s)$ 为偶函数, $F_e'(s)$ 为奇函数, 则有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(-2\pi d\alpha) F_e'(\alpha) R(n-\alpha) d\alpha \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi d\alpha) F_e'(\alpha) (R(n-\alpha) + R(-n-\alpha)) d\alpha \right) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi d\alpha) F_e'(\alpha) R(\alpha) d\alpha \\ &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

把(31)式代入(30)式, 可得

$$\delta_x = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi d\alpha) F'_e(\alpha) R(\alpha) d\alpha + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi d\alpha) F'_e(\alpha) R(n-\alpha) d\alpha \right)}{\int_{-m/2}^{m/2} I(x, x_0) dx}. \quad (32)$$

一般地, 只有当星点像高斯半径 σ 较大的条件下能量分布才会超出采样窗口范围, 在此条件下 $F'_e(\alpha)$ 的绝对值随 α 的绝对值增加而急剧减小(参见附录(A2)式), 因而分子的第二项相对于第一项很小, (32)式可写为

$$\delta_x \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi d\alpha) F'_e(\alpha) R(\alpha) d\alpha}{\int_{-m/2}^{m/2} I(x, x_0) dx}. \quad (33)$$

再由(3)和(9)式, 同时对单像元响应函数进行 Taylor 展开(详见附录), 最终得到

$$\delta_x \approx \frac{(12\sigma^2 + 1)m \exp\left(-\frac{m^2}{8\sigma^2}\right) \left(-x_0 + \frac{12\sigma^2 - m^2}{24\sigma^4} x_0^3\right)}{12\sigma^3 \sqrt{2\pi} \operatorname{erf}(m/(2\sqrt{2}\sigma))}, \quad (34)$$

其中, $\operatorname{erf}(x)$ 为误差函数. 上式即为采样窗口限制条件下, 高斯光斑质心提取误差的近似解析表达式.

由(34)式可见, 当星点像高斯半径 σ 较大, 能量分布超出采样窗口范围, 不能忽略采样窗口限制的情况下, 星点提取误差主要来源于采样窗口限制且与像点真实位置成近似线性关系, 因而像点在多个像元移动时误差呈现出锯齿形, 符合模拟计算结果. 随着高斯半径增大, 弥散程度增加, 星点质心提取误差也逐渐增大.

极端情况下, 当 $\sigma \rightarrow \infty$, $\exp(-m^2/(8\sigma^2)) \rightarrow 1$, $\operatorname{erf}(m/(2\sqrt{2}\sigma)) \rightarrow m/(\sqrt{2\pi}\sigma)$, 代入(34)式得

$$\delta_x \rightarrow -x_0, \quad (35)$$

上式说明, 当像点能量过于分散, 则窗口像元内各像元能量大小相同, 质心坐标估计值始终为 0, 因而误差等于负的真实质心坐标.

4 星点质心提取误差及其补偿

3.3 和 3.4 节分别讨论了在星点像高斯半径较小(无窗口限制)及高斯半径较大(有窗口限制)的条件下星点提取系统误差函数, 2 种条件下误差分别源于像元采样频率限制及采样窗口限制, 得到近似解析表

达式(27)和(34)式. 一般地, 星点质心提取系统误差可认为是 2 种误差源同时作用的结果, 可以得到高斯像点质心提取系统误差近似解析表达式为

$$\delta_x \approx -\frac{1}{\pi} \exp[-2(\pi\sigma)^2] \sin(2\pi x_0) + \frac{(12\sigma^2 + 1)m \exp\left(-\frac{m^2}{8\sigma^2}\right) \left(-x_0 + \frac{12\sigma^2 - m^2}{24\sigma^4} x_0^3\right)}{12\sigma^3 \sqrt{2\pi} \operatorname{erf}(m/(2\sqrt{2}\sigma))}. \quad (36)$$

上式给出了星点提取系统误差与像点高斯半径、真实质心位置及采样窗口像元数量的函数关系, 经模拟计算知, 上式与数值模拟结果差值小于 10^{-4} . 因而可以利用上式以像点高斯半径及采样窗口像元数量为参数对星点提取误差进行补偿, 从而实现复杂条件下的高精度星点质心提取误差补偿.

设高斯像点经过星点提取误差补偿后的质心估计值为 \hat{x}_c , 则其估计表达式可写为

$$\hat{x}_c - \frac{1}{\pi} \exp[-2(\pi\sigma)^2] \sin(2\pi \hat{x}_c) + \frac{(12\sigma^2 + 1)m \exp\left(-\frac{m^2}{8\sigma^2}\right) \left(-\hat{x}_c + \frac{12\sigma^2 - m^2}{24\sigma^4} \hat{x}_c^3\right)}{12\sigma^3 \sqrt{2\pi} \operatorname{erf}(m/(2\sqrt{2}\sigma))} = \frac{\sum_i x_i U_i}{\sum_i U_i}. \quad (37)$$

通过数值迭代方法求解上式, 可以得到误差补偿后的质心估计值. 设真实质心位置在单个像元(即坐标值为 $[-0.5, 0.5]$) 范围内均匀分布, 求不同高斯半径条件下经误差补偿后的残余误差的 RMS 值 $\varepsilon(\sigma)$, 即有

$$\varepsilon(\sigma) = \left[\int_{-0.5}^{0.5} (x_0 - \hat{x}_c(\sigma))^2 dx_0 \right]^{1/2}. \quad (38)$$

计算结果见图 5.

从图 5 中可见, 经过误差补偿后, 像点高斯半径在 0.2 像元到 1.4 像元的范围内, 3 像元窗口质心提取残余误差小于 2×10^{-3} 像元, 而 5 像元窗口质心提取残

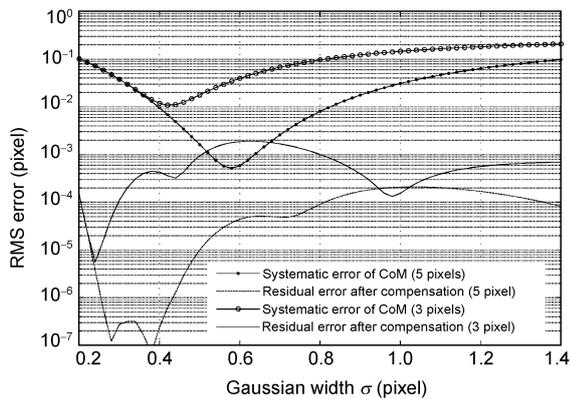


图5 星点提取系统误差补偿后的残余误差 RMS 值 (COM, Center of Mass, 质心法)

余系统误差小于 2×10^{-4} 像元. 计算结果表明, 该补偿方法在不同高斯半径及不同采样窗口像元数量条件下均可实现高精度误差补偿, 由于不同能量弥散程度可以等效为不同高斯半径, 因而该方法可适用于不同的星点能量弥散分布情况.

5 结论

本文从星点提取的物理过程入手, 采用频域分析方法, 从采样频率限制和有限像元窗口限制 2 个方面, 对亚像元星点质心提取系统误差进行了完整的

理论分析. 得到高斯像点星点质心提取系统误差的近似解析表达式, 并经过适当简化后得到星点质心提取误差与像点高斯半径、像点的真实位置及采样窗口像元数量的函数关系, 合理解释了星点质心提取的近似正弦周期性误差及近似锯齿形周期性误差, 理论分析结果与数值仿真结果一致.

在理论分析基础上提出相应的星敏感器星点图像质心提取误差补偿方法, 将能量分布变化等效为高斯半径变化, 从而实现复杂条件下的质心提取误差高精度补偿. 数值模拟表明: 在进行了质心提取误差补偿后, 像点高斯半径在 0.2 像元到 1.4 像元的范围内, 3 像元窗口质心定位残余系统误差小于 2×10^{-3} 像元, 而 5 像元窗口质心定位残余系统误差小于 2×10^{-4} 像元. 该方法有效克服了传统星点质心误差标定补偿方法不能适应像点能量分布变化的情况, 完全能够满足星敏感器在复杂空间环境条件下高精度姿态测量的要求. 同时也适用于其他需要点状图像高精度质心提取的领域, 如目标位置探测与跟踪、光电非接触几何测量、天文学测量、机器视觉等.

本文所讨论的对象是在星点能量为高斯分布的情况下, 对于实际星点图像能量分布有可能为非高斯甚至是非对称的情况下, 需要在以后的工作中进一步对非高斯星点能量分布的情况进行分析.

参考文献

- 1 Liebe C C. Accuracy performance of star trackers -A Tutorial. IEEE T Aero Elec Sys, 2002, 38: 587—599
- 2 Liebe C C. Star trackers for attitude determination. IEEE Aero El Sys Mag, 1995, 10: 10—16
- 3 Quine B M, Tarasyuk V, Mebrahtu H, et al. Determining star-image location: A new sub-pixel interpolation technique to process image centroids. Comput Phys Commun, 2007, 177: 700—706
- 4 李玉峰, 郝志航. 星点图像超精度亚像元细分定位算法的研究. 光学技术, 2005, 31: 666—671
- 5 Stanton R H, Alexander J W, Dennison E W, et al. Optical tracking using charge-coupled devices. Opt Eng, 1987, 26: 930—938
- 6 Grossman S B, Emmons R B. Performance analysis and size optimization of focal planes for point-source tracking algorithm applications. Opt Eng, 1984, 23: 167—176
- 7 Brian F, Alexander K C N. Elimination of systematic error in subpixel accuracy centroid estimation. Opt Eng, 1991, 30: 1320—1330
- 8 Hancock B R, Stirbl R C, Cunningham T J, et al. CMOS active pixel sensor specific performance effects on star tracker/imager position accuracy. Proc SPIE, 2001, 4284: 43—53
- 9 Fisher R B, Naidu D K. A comparison of algorithms for subpixel peak detection. In: Sanz J L C, eds. Image Technology, Advances in Image Processing, Multimedia and Machine Vision. Berlin: Springer-Verlag, 1996. 385—404
- 10 周锐, 房建成, 祝世平. 图像测量中光斑尺寸优化及性能分析. 仪器仪表学报, 2000, 21: 177—210
- 11 Li H, Song H, Rao C, et al. Accuracy analysis of centroid calculated by a modified center detection algorithm for Shack-Hartmann wavefront sensor. Opt Commun, 2008, 281: 750—755

附录 A

给出 3.4 节(34)式的详细推导过程.

3.4 节(33)式中

$$R(s) = \mathcal{F}\{r(x)\} = \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{x}{m}\right)\right\} = m\sin(ms). \quad (\text{A1})$$

又有

$$\begin{aligned} F'_e(\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\exp(-2(\pi\sigma\alpha)^2) \sin(\alpha) \right] \\ &= \exp(-2(\pi\sigma\alpha)^2) \\ &\quad \times \left(-4\pi\sigma^2 \sin(\pi\alpha) + \frac{\cos(\pi\alpha)}{\alpha} - \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

注意到在星点像高斯半径 σ 较大条件下, $F'_e(\alpha)$ 的绝对值随 α 的绝对值增加而急剧减小, 对乘积第二项在 $\alpha=0$ 处 Taylor 展开, 可得

$$F'_e(\alpha) \approx \exp(-2(\pi\sigma\alpha)^2) \left(-4\pi\sigma^2 - \frac{1}{3}\pi^2 \right) \alpha, \quad (\text{A3})$$

则有

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi d\alpha) F'_e(\alpha) R(\alpha) d\alpha \\ &= I_0 \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi d\alpha) \exp(-2(\pi\sigma\alpha)^2) \\ &\quad \times \left(-4\pi^2\sigma^2 - \frac{1}{3}\pi^2 \right) \frac{\sin(m\pi\alpha)}{\pi} d\alpha \\ &= I_0 \left(-4\pi\sigma^2 - \frac{1}{3}\pi \right) \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi d\alpha) \exp(-2(\pi\sigma\alpha)^2) \sin(m\pi\alpha) d\alpha \\ &= I_0 \left(2\pi\sigma^2 + \frac{1}{6}\pi \right) \int_{-\infty}^{\infty} [\cos((2d+m)\pi\alpha) - \cos((2d-m)\pi\alpha)] \\ &\quad \times \exp(-2(\pi\sigma\alpha)^2) d\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

又由

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(ax) \exp(-bx^2) ds = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(-\frac{a^2}{4b}\right), \quad (\text{A5})$$

代入(A4)式可得

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi d\alpha) F'_e(\alpha) R(\alpha) d\alpha \\ &= \left(1 + \frac{1}{12\sigma^2} \right) I_0 \sqrt{2\pi} \sigma \\ &\quad \times \left[\exp\left(-\frac{(2d+m)^2}{8\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(2d-m)^2}{8\sigma^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

对乘积最后一项在 $d=0$ 处 Taylor 展开, 注意到 $d=x_0$, 可得

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi d\alpha) F'_e(\alpha) R(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{12\sigma^2+1}{12\sigma^3} I_0 \sqrt{2\pi} m \exp\left(-\frac{m^2}{8\sigma^2}\right) \\ &\quad \times \left(-x_0 + \frac{12\sigma^2-m^2}{24\sigma^4} x_0^3 \right), \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

又有

$$\begin{aligned} &\int_{-m/2}^{m/2} I(x, x_0) dx = \int_{-m/2}^{m/2} \frac{I_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \frac{I_0}{2} \left[\text{erf}\left(\frac{m/2-x_0}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \text{erf}\left(\frac{-m/2-x_0}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] \\ &\approx I_0 \text{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{2}\sigma}\right). \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

把(A7)和(A8)式代入(33)式, 可得

$$\delta_x \approx \frac{(12\sigma^2+1)m \exp\left(-\frac{m^2}{8\sigma^2}\right) \left(-x_0 + \frac{12\sigma^2-m^2}{24\sigma^4} x_0^3 \right)}{12\sigma^3 \sqrt{2\pi} \text{erf}(m/(2\sqrt{2}\sigma))}, \quad (\text{A9})$$

即为(34)式.