



论文

弹塑性力学的复变量重构核粒子法

陈丽^{①②}, 程玉民^{②*}

① 长安大学理学院工程力学系, 西安 710064;

② 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

* 联系人, E-mail: ymcheng@shu.edu.cn; ymcheng@sh163.net

收稿日期: 2009-06-26; 接受日期: 2009-10-27

国家自然科学基金(批准号: 10571118, 10871124)和上海市教育委员会科研创新项目(编号: 09ZZ99)资助

摘要 在重构核粒子法的基础上, 引入复变量, 讨论了复变量重构核粒子法. 复变量重构核粒子法的优点是在构造形函数时采用一维基函数建立二维问题的修正函数. 然后, 将复变量重构核粒子法应用于弹塑性平面问题, 结合弹塑性力学问题的 Galerkin 积分弱形式, 采用罚函数法施加本质边界条件, 建立了基于增量本构关系的弹塑性力学的复变量重构核粒子法, 推导了相应的计算公式, 数值实现中采用了 Newton-Raphson 法. 最后通过数值算例证明了该方法的有效性.

关键词无网格方法
重构核粒子法
复变量重构核粒子法
修正函数
弹塑性问题

弹塑性问题是土木、机械、水利、航空和材料等工程领域的重要问题之一. 在弹塑性状态下, 材料的应力应变关系是非线性的, 这给问题的求解带来不少困难. 也正是由于这个原因, 只有极少数的简单问题才能得到解析解, 而对于形状较为复杂的问题需要采用数值方法求得近似解. 近年来, 随着计算机技术的不断发展, 数值方法已被广泛应用于各类工程结构弹塑性力学问题的求解. 目前有限元法、边界元法是解决弹塑性问题的主要数值方法. 但这类方法都是以单元为基础, 当变形较大时需要进行网格重构, 数据准备工作量大.

无网格方法采用基于点的近似构造近似函数, 避免了网格的初始划分和重构, 可以克服传统的数值方法对于单元或网格的依赖性^[1,2]. 无网格方法在处理动态裂纹扩展和非线性等问题时具有有限元法不可比拟的优点. 随着无网格方法研究的不断深入, 近年来一些学者已成功地将无网格方法应用于弹塑性问题^[3-9].

目前发展的无网格方法有无单元 Galerkin 法 (Element-Free Galerkin Method, 即 EFG)^[10]、重构核粒子法 (Reproducing Kernel Particle Method, 即 RKPM)^[11]、Hp-clouds 无网格方法^[12]、有限点法 (Finite Point Method, 即 FPM)^[13,14]、无网格局部 Petrov-Galerkin 方法 (Meshless Local Petrov-Galerkin Method, 即 MLPG)^[15]、无网格配点法 (Meshless Point Collocation Method, 即 PCM)^[16]、小波粒子方法 (Wavelet Particle Method, 即 WPM)^[17]、无网格有限元法 (Meshless Finite Element Method, 即 MFEM)^[18]、复变量无网格方法^[19-21]、无网格流形方法^[22,23]、以及无网格边界积分方程方法^[24-29]等.

重构核粒子法是在光滑粒子法的基础上发展起来的, 是无网格方法中最为重要的逼近函数形成方法之一. 光滑粒子法作为最早出现的无网格方法, 主要是处理无限域问题, 但对于有限域问题, 因为边界上不能满足相容性条件, 导致计算精度低、稳定性差. 为了克服光滑粒子法的不足, Liu 等人^[11]于 1995 年提

出了重构核粒子方法, 在光滑粒子法的权函数构造中引入修正函数来满足边界上的相容性条件, 从而消除了光滑粒子法的不稳定性^[11].

重构核粒子法与传统的数值方法相比具有形函数构造不需要网格、光滑性好、计算精度高等优点, 但是计算量大. 针对目前重构核粒子法当节点较多时计算量大的问题, 本文作者在文献[30]提出了复变量重构核粒子法 (Complex Variable Reproducing Kernel Particle Method, 简称 CVRKPM). 复变量重构核粒子法的优点是在形函数的构造中采用一维基函数建立二维问题的修正函数, 可以在保证精度的情况下减少求解域的节点数, 从而减少计算量.

本文对弹塑性问题, 采用增量形式的复变量重构核粒子法建立逼近函数, 利用增量形式的应力应变关系表征材料的弹塑性本构关系, 采用罚函数法引入本质边界条件, 推导了基于增量本构关系的复变量重构核粒子法的控制方程, 采用 Newton-Raphson 法求解, 建立了弹塑性力学的复变量重构核粒子法. 本文方法能方便地适应弹塑性行为与加载以及变形历史有关的特性. 最后通过数值算例, 验证了本文方法的有效性.

1 复变量重构核粒子法的形函数

设 $\bar{u}(z)$ 是在平面区域 Ω 上定义的连续可导的复变函数, 在复变量重构核粒子法中, 逼近函数构造过程中的关键步骤是, 通过修正核函数 $\bar{w}_h(z-z')$ 来构造函数 $\bar{u}(z)$ 的逼近函数 $\bar{u}^h(z)$, 即

$$\begin{aligned}\bar{u}^h(z) &= u_1^h(z) + iu_2^h(z) \\ &= \int_{\Omega} \bar{u}(z') \cdot \bar{w}_h(z-z') \cdot dz', \\ &\quad (z = x_1 + ix_2 \in \Omega),\end{aligned}\quad (1)$$

式中 $\bar{w}_h(z-z')$ 为修正核函数,

$$\bar{w}_h(z-z') = C(z; z-z') \cdot w_h(z-z'), \quad (2)$$

其中 $w_h(z-z')$ 是具有紧支特性的权函数, $C(z; z-z')$ 称为修正函数. 修正函数一般可表示为完备多项式基函数的线性组合, 即

$$\begin{aligned}C(z; z-z') &= \sum_{i=0}^m p_i(z-z') \cdot b_i(z) \\ &= \mathbf{p}^T(z-z') \mathbf{b}(z), \quad (z \in \Omega),\end{aligned}\quad (3)$$

$$\mathbf{p}^T(z-z') = (p_0(z-z'), p_1(z-z'), \dots, p_m(z-z')), \quad (4)$$

$$\mathbf{b}^T(z) = (b_0(z), b_1(z), \dots, b_m(z)), \quad (5)$$

其中 m 是完备多项式基的最高次数, $p_i(z-z')$ 是基函数, $b_i(z)$ 是对应的未知系数. 一般情况下, 对于二维问题, 完备多项式基函数通常取如下形式:

线性基:

$$\mathbf{p}^T = (1, z-z'), \quad (6)$$

二次基:

$$\mathbf{p}^T = (1, z-z', (z-z')^2). \quad (7)$$

对应于(1)式, 采用梯形积分法则得到复变量重构核近似的离散形式, 即

$$\begin{aligned}\bar{u}^h(z) &= \sum_{I=1}^n \bar{u}(z_I) \cdot \bar{w}_h(z-z_I) \cdot \Delta V_I \\ &= \sum_{I=1}^n c(z; z-z_I) \cdot w_h(z-z_I) \cdot \Delta V_I \cdot \bar{u}(z_I),\end{aligned}\quad (8)$$

其中 z_I 为点 z 影响域内的节点, n 为点 z 影响域内的节点总数.

$$\bar{u}(z_I) = u_1(z_I) + iu_2(z_I), \quad (9)$$

ΔV_I 是与节点 z_I 有关的区域度量,

$$\sum_{I=1}^{n_I} \Delta V_I = \Omega, \quad (10)$$

其中 n_I 为域内节点总数.

(8)式可用矩阵形式表示为

$$\bar{u}^h(z) = \mathbf{C}(z) \mathbf{W}(z) \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{u}}, \quad (11)$$

其中

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}(z_1), \bar{u}(z_2), \dots, \bar{u}(z_n))^T = \mathbf{Q} \mathbf{u}, \quad (12)$$

$$\mathbf{u} = (u_1(z_1), u_2(z_1), u_1(z_2), u_2(z_2), \dots, u_1(z_n), u_2(z_n))^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & i \end{bmatrix}_{n \times 2n}, \quad (14)$$

$$\mathbf{W}(z) = \begin{bmatrix} w(z-z_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(z-z_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w(z-z_n) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \Delta V_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta V_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta V_n \end{bmatrix}. \quad (16)$$

令

$$C_I(z) = C(z; z - z_I) = \mathbf{p}^T(z - z_I) \mathbf{b}(z), \quad (17)$$

则

$$\mathbf{C}(z) = (C_1(z), C_2(z), \cdots, C_n(z)) = \mathbf{b}^T(z) \mathbf{P}, \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(z - z_1) & p_1(z - z_2) & \cdots & p_1(z - z_n) \\ p_2(z - z_1) & p_2(z - z_2) & \cdots & p_2(z - z_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(z - z_1) & p_m(z - z_2) & \cdots & p_m(z - z_n) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{b}^T(z) = (b_0(z), b_2(z), \cdots, b_m(z)), \quad (20)$$

这里系数 $\mathbf{b}(z)$ 根据逼近函数的重构条件来确定^[30], 即

$$\mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{b}(z) = \mathbf{H}, \quad (21)$$

其中

$$\mathbf{M}(z) = \sum_{I=1}^n \mathbf{p}(z - z_I) \cdot \mathbf{p}^T(z - z_I) \cdot w_h(z - z_I) \cdot \Delta V_I, \quad (22)$$

$$\mathbf{H} = (1, 0, \cdots, 0)^T, \quad (23)$$

$$\mathbf{b}(z) = \mathbf{M}^{-1}(z) \cdot \mathbf{H}. \quad (24)$$

这样, 逼近函数 $\bar{u}^h(z)$ 的表达式为

$$\bar{u}^h(z) = \Phi(z) \bar{\mathbf{u}} = \sum_{I=1}^n \Phi_I(z) \bar{u}(z_I), \quad (25)$$

其中 $\Phi(z)$ 为形函数向量,

$$\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z), \cdots, \Phi_n(z)) = \mathbf{C}(z) \cdot \mathbf{W}(z) \cdot \mathbf{V}, \quad (26)$$

$$u_1^h(z) = \text{Re}[\Phi(z) \bar{\mathbf{u}}] = \text{Re} \left[\sum_{I=1}^n \Phi_I(z) \bar{u}(z_I) \right], \quad (27)$$

$$u_2^h(z) = \text{Im}[\Phi(z) \bar{\mathbf{u}}] = \text{Im} \left[\sum_{I=1}^n \Phi_I(z) \bar{u}(z_I) \right]. \quad (28)$$

复变量重构核粒子法的优点是其形成的二维问题的无网格方法可取较少的节点, 在同等精度下, 相比传统的重构核粒子法减小了计算量. 因为对任一节点来说, 在确定其形函数及其导数时会涉及矩阵求逆和多个矩阵的相乘, 在同阶精度的条件下, 采用复变量重构核粒子法可使修正函数中所含的待定系数减少, 进而导致矩阵的维数减小, 从而减少了计算

量. 比如对线性基, 原来的基函数为

$$\mathbf{p}^T = (1, x_1 - x'_1, x_2 - x'_2),$$

待定系数是 3 个, 现在的基函数为 $\mathbf{p}^T = (1, z - z')$,

待定系数是 2 个; 对二次基, 原来的基函数为

$$\mathbf{p}^T = (1, x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, (x_1 - x'_1)^2, (x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2), (x_2 - x'_2)^2),$$

待定系数是 6 个, 现在的基函数为

$$\mathbf{p}^T = (1, z - z', (z - z')^2),$$

待定系数是 3 个. 对任一场点来说, 其影响域中所需的最小节点数随待定系数的减少而减少, 进而在整个求解域中所需选取的节点数目可大大减少. 另外, 在相同节点分布时, 相比传统的重构核粒子法, 复变量重构核粒子法可提高计算精度.

2 弹塑性力学问题的复变量重构核粒子法

2.1 弹塑性平面问题的基本方程

结构的弹塑性边值问题, 由于非线性特点, 相比线弹性边值问题要复杂得多. 当结构在塑性阶段工作时, 其应力应变呈非线性关系, 其控制方程和边界条件可改为增量形式表示, 符号上面的“ $\cdot$ ”表示增量形式, 另外就是多了塑性项. 设物体经某一加载历史后, 在时刻 t 的位移场 $\mathbf{u}$ 、应变场 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和应力场 $\boldsymbol{\sigma}$, 如果给定在求解域 Ω 内的体力率 $\dot{\mathbf{b}}$, 在面力边界 Γ_t 上的面力率 $\dot{\mathbf{t}}$, 在位移边界 Γ_u 上的速度分布 $\dot{\mathbf{u}}$, 要求出该时刻相应的速度场 $\dot{\mathbf{u}}$ 、应变率场 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 和应力率场 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, 则弹塑性平面问题的平衡方程为

$$\mathbf{L}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{b}} = 0, \quad (\text{在 } \Omega \text{ 域}), \quad (29)$$

其中 $\mathbf{L}$ 是微分算子矩阵:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

几何方程为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L} \dot{\mathbf{u}}, \quad (\text{在 } \Omega \text{ 域内}). \quad (31)$$

物理方程为

$$\dot{\sigma} = D\dot{\varepsilon}, \quad (32)$$

式中, 在弹性阶段,

$$D = [D]_e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

在塑性阶段,

$$D = [D]_{ep}, \quad (34)$$

$[D]_{ep}$ 为增量理论的弹塑性矩阵, 有

$$[D]_{ep} = \frac{E}{Q} \times \begin{bmatrix} \sigma'_{22}{}^2 + 2P & -\sigma'_{11}\sigma'_{22} + 2\nu P & -\frac{\sigma'_{11} + \nu\sigma'_{22}}{1+\nu}\sigma'_{12} \\ \text{对} & \sigma'_{11} + 2P & -\frac{\sigma'_{22} + \nu\sigma'_{11}}{1+\nu}\sigma'_{12} \\ \text{称} & & \frac{R}{2(1+\nu)} + \frac{2H'}{9E}(1-\nu)\bar{\sigma}^2 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

式中 E , ν 分别为材料的弹性模量和泊松比, H' 为材料的塑性模量, 是反应硬化条件的参数, 可由材料试验中得到的应力与塑性应变的关系曲线来确定:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} = \frac{f'}{1 - \frac{f'}{E}} = \frac{EE'}{E - E'}, \quad (36)$$

其中 $f' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E'$, E' 称为切线模量.

在(35)式中,

$$P = \frac{2H'}{9E}\bar{\sigma}^2 + \frac{\sigma'_{12}{}^2}{1+\nu}, \quad (37)$$

$$R = \sigma'_{11}{}^2 + 2\nu\sigma'_{11}\sigma'_{22} + \sigma'_{22}{}^2, \quad (38)$$

$$Q = R + 2(1-\nu^2)P, \quad (39)$$

其中, $\bar{\sigma}$ 为等效应力, σ'_{11} 和 σ'_{22} 为应力偏量, 有

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma'_{11}{}^2 + \sigma'_{22}{}^2 - \sigma'_{11}\sigma'_{22} + 3\sigma'_{12}{}^2}, \quad (40)$$

$$\begin{cases} \sigma'_{11} = \sigma_{11} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{3}, \\ \sigma'_{22} = \sigma_{22} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{3}. \end{cases} \quad (41)$$

对于平面应变问题, 材料进入塑性后, Poisson 比 $\nu = 0.5$, 相应的弹塑性矩阵只要将平面应力问题

$[D]_{ep}$ 中的 E 换成 $\frac{E}{1-\nu^2}$, ν 换成 $\frac{\nu}{1-\nu}$ 即可.

边界条件为

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\bar{\mathbf{u}}}, \quad (\text{在边界 } \Gamma_u \text{ 上}), \quad (42)$$

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\bar{\mathbf{t}}}, \quad (\text{在边界 } \Gamma_t \text{ 上}), \quad (43)$$

其中 $\dot{\mathbf{u}}$ 是位移边界 Γ_u 上任意一点 z 的速度分布, $\dot{\bar{\mathbf{t}}}$ 是面力边界 Γ_t 上任意一点 z 的面力率; $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$, $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$, Γ 是 Ω 的边界; n_1 和 n_2 分别为边界 Γ_t 的外法线 N 的方向余弦:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

2.2 弹塑性平面问题的积分弱形式

本文采用罚函数法引入位移边界条件, 弹塑性问题的积分弱形式为^[6]

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\bar{\mathbf{t}}} d\Gamma \\ & + \alpha \int_{\Gamma_u} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{S}(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\bar{\mathbf{u}}}) d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

式中 α 是罚因子, 通常取为极大正常数,

$$\alpha = (1.0 \times 10^3 \sim 1.0 \times 10^5) \times E, \quad (46)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

当 x_1 (或 x_2) 方向有位移约束时, 相应的 s_1 (或 s_2) 等于 1, 否则为 0.

代入几何方程(31)和物理方程(32), 式(45)可以表达为

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\dot{\mathbf{u}})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\dot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\bar{\mathbf{t}}} d\Gamma \\ & + \alpha \int_{\Gamma_u} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{S}(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\bar{\mathbf{u}}}) d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

2.3 弹塑性问题的复变量重构核粒子法的离散方程

由复变量重构核粒子法的试函数表达式(25), 域内任意场点 z 的位移增量形式可表示为

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}(z) = \dot{\mathbf{u}}_1(z) + i\dot{\mathbf{u}}_2(z) = \boldsymbol{\Phi}(z)\dot{\bar{\mathbf{u}}} = \sum_{I=1}^n \boldsymbol{\Phi}_I(z)\dot{\bar{\mathbf{u}}}(z_I), \quad (49)$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}(z)$ 是形函数向量,

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}(z_I) = \dot{\mathbf{u}}_1(z_I) + i\dot{\mathbf{u}}_2(z_I). \quad (50)$$

结合(49)和(50)式可以得到

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(z) &= \begin{pmatrix} \dot{u}_1(z) \\ \dot{u}_2(z) \end{pmatrix} \\ &= \sum_I^n \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[\Phi_I(z)] & -\operatorname{Im}[\Phi_I(z)] \\ \operatorname{Im}[\Phi_I(z)] & \operatorname{Re}[\Phi_I(z)] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{u}_1(z_I) \\ \dot{u}_2(z_I) \end{pmatrix} \\ &= \sum_I^n \tilde{\Phi}_I(z) \cdot \dot{\mathbf{u}}_I = \tilde{\Phi}(z) \cdot \dot{\mathbf{U}},\end{aligned}\quad (51)$$

其中 $\tilde{\Phi}(z)$ 是形函数矩阵, n 是场点 z 影响域内的节点总数, $\dot{\mathbf{U}}$ 是节点位移增量向量, 有

$$\tilde{\Phi}(z) = (\tilde{\Phi}_1(z), \tilde{\Phi}_2(z), \dots, \tilde{\Phi}_n(z)), \quad (52)$$

$$\tilde{\Phi}_I(z) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}[\Phi_I(z)] & -\operatorname{Im}[\Phi_I(z)] \\ \operatorname{Im}[\Phi_I(z)] & \operatorname{Re}[\Phi_I(z)] \end{bmatrix}, \quad (53)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^T = (\dot{\mathbf{u}}^T(z_1), \dot{\mathbf{u}}^T(z_2), \dots, \dot{\mathbf{u}}^T(z_n)). \quad (54)$$

相应的式(48)中的 $\mathbf{L}\dot{\mathbf{u}}$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{L} \sum_I^n \tilde{\Phi}_I(z) \dot{\mathbf{u}}_I = \sum_I^n \mathbf{L} \tilde{\Phi}_I(z) \dot{\mathbf{u}}_I \\ &= \sum_I^n \mathbf{B}_I(z) \dot{\mathbf{u}}_I = \mathbf{B}(z) \cdot \dot{\mathbf{U}},\end{aligned}\quad (55)$$

$$\mathbf{B}(z) = (\mathbf{B}_1(z), \mathbf{B}_2(z), \dots, \mathbf{B}_n(z)), \quad (56)$$

$\mathbf{B}_I(z) =$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}[\Phi_{I,1}(z)] & -\operatorname{Im}[\Phi_{I,1}(z)] \\ \operatorname{Im}[\Phi_{I,2}(z)] & \operatorname{Re}[\Phi_{I,2}(z)] \\ \operatorname{Re}[\Phi_{I,2}(z)] + \operatorname{Im}[\Phi_{I,1}(z)] & -\operatorname{Im}[\Phi_{I,2}(z)] + \operatorname{Re}[\Phi_{I,1}(z)] \end{bmatrix}, \quad (57)$$

将(51)和(55)式代入(48)式得到

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} \delta \dot{\mathbf{U}}^T (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) \dot{\mathbf{U}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \dot{\mathbf{U}}^T \tilde{\Phi}^T \dot{\mathbf{b}} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_t} \delta \dot{\mathbf{U}}^T \tilde{\Phi}^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_u} \delta \dot{\mathbf{U}}^T (\tilde{\Phi}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \tilde{\Phi}) \dot{\mathbf{U}} d\Gamma \\ & + \alpha \int_{\Gamma_u} \delta \dot{\mathbf{U}}^T (\tilde{\Phi}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0,\end{aligned}\quad (58)$$

由节点位移增量变分 $\delta \dot{\mathbf{U}}^T$ 的任意性, 得到最后的增量形式的离散系统求解方程:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha) \dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^\alpha, \quad (59)$$

式中

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} d\Omega, \quad (60)$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \int_{\Omega} \tilde{\Phi}^T \dot{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \tilde{\Phi}^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma, \quad (61)$$

$$\mathbf{K}^\alpha = \alpha \int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \tilde{\Phi} d\Gamma, \quad (62)$$

$$\dot{\mathbf{F}}^\alpha = \alpha \int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Gamma. \quad (63)$$

令

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha, \quad (64)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{F}}} = \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^\alpha, \quad (65)$$

则方程式(59)可简写为

$$\bar{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{U}} = \dot{\bar{\mathbf{F}}}. \quad (66)$$

若在力边界 Γ_t 上某点 z_0 处作用一集中力 $\hat{\mathbf{T}}$, 集中力率为 $\dot{\hat{\mathbf{T}}}$, 即

$$\dot{\hat{\mathbf{T}}}(z_0) = \left(\dot{\hat{T}}_1(z_0), \dot{\hat{T}}_2(z_0) \right)^T, \quad (67)$$

同弹性问题的处理方式一样, 集中力对等效节点荷载增量的贡献为^[30]

$$\tilde{\Phi}^T(z_0) \cdot \dot{\hat{\mathbf{T}}}(z_0) \rightarrow \dot{\bar{\mathbf{F}}}, \quad (68)$$

因此, 对体力、面力和集中力都存在的情况下, 等效节点荷载增量可表示为

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{F}}} &= \int_{\Omega} \tilde{\Phi}^T \dot{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \tilde{\Phi}^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma + \tilde{\Phi}^T(z_0) \cdot \dot{\hat{\mathbf{T}}}(z_0) \\ &+ \alpha \int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}^T \mathbf{S} \dot{\mathbf{u}} d\Gamma.\end{aligned}\quad (69)$$

以上即为弹塑性力学问题的复变量重构核粒子法。

3 弹塑性力学问题的解法——增量切线刚度法

3.1 非线性问题线性化

对小变形弹塑性问题, 位移与应变的线性关系以及位移的连续性依然成立, 但在塑性区域内应力与应变的线性关系不再成立. 此时在荷载作微小增加时必须采用应力微分与应变微分之间的非线性关系.

为了求解非线性问题, 本文采取逐步增加荷载的方法将其化为一系列的线性问题. 在一定的应力和应变的水平上增加一次荷载, 将产生应力增量 $\Delta \sigma$ 和应变增量 $\Delta \epsilon$. 只要增加的荷载适当的小, 应力和应变的微分可用增量来代替, 应力增量与应变增量之间的关系可近似表示为

$$\Delta \sigma = [D]_{ep} \Delta \epsilon, \quad (70)$$

其中 $[D]_{ep}$ 仅与加载前的应力状态有关, 而与应力和应变的增量无关, 因此该式是线性关系式. 所以对每一步加载, 就可以采用同弹性情况完全类似的方法列出计算格式, 并求得这一步加载所产生的位移增量、应变增量和应力增量. 然后在此基础上修改原先的应力状态, 并进行下一步加载的计算. 对每一步加载都化解为一个线性问题, 从而得到整个弹塑性问题的解.

首先, 进行一次线弹性分析, 得到弹性极限荷载 $\bar{F}_0$ 下结构的位移、应变和应力, 分别记为 U_0 , ϵ_0 和 σ_0 . 此后开始进入屈服, 采取增量加载的方式作用荷载增量, 由此可得到相应的节点荷载增量 $\Delta\bar{F}_1$, 并形成相应的刚度矩阵. 在形成刚度矩阵时须注意对进入屈服的 Gauss 积分点必须用 $[D]_{ep}$ 来代替 $[D]_e$, 而 $[D]_{ep}$ 中的应力取加载前的状态 σ_0 , 因此刚度矩阵与加载前的应力水平有关, 记作 $\bar{K}(\sigma_0)$.

求解基本方程

$$\bar{K}(\sigma_0) \cdot \Delta U_1 = \Delta\bar{F}_1, \quad (71)$$

可得到 ΔU_1 , $\Delta\epsilon_1$ 和 $\Delta\sigma_1$, 由此可得到经过加载后的位移、应变和应力, 其中新的应力状态为 $\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta\sigma_1$. 以此类推, 经过 $i-1$ 次加载, 已知当时的位移、应变和应力, 其中应力为 σ_{i-1} , 在此基础上增加第 i 次荷载 $\Delta\bar{F}_i$, 就可通过求解基本方程

$$\bar{K}(\sigma_{i-1}) \cdot \Delta U_i = \Delta\bar{F}_i, \quad (72)$$

得到第 i 次加载后的位移增量 ΔU_i 、应变增量 $\Delta\epsilon_i$ 和应力增量 $\Delta\sigma_i$, 并得到新的应力状态:

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta\sigma_i, \quad (73)$$

重复上述过程直到施加完全部荷载, 最后得到的位移、应变和应力就是所求解的弹塑性问题的解.

3.2 刚度矩阵 $\bar{K}(\sigma_{i-1})$ 的形成

用增量切线刚度法进行弹塑性应力分析, 对每一步加载都要形成刚度矩阵, 并进行应力计算.

刚度矩阵是按(64)式来计算的. 由(64)式可以看出它包括两项, 其中第一项 $K(\sigma_{i-1}) = \int_{\Omega} B^T \cdot D \cdot B d\Omega$ 是整个求解区域内的域积分, 采用 Gauss 积分, 有

$$K_{ij}(\sigma_{i-1}) = \int_{\Omega} B_i^T \cdot D \cdot B_j d\Omega$$

$$= \sum_i^{n_G} w_{Gi} \cdot B_i^T(z_i) \cdot D(z_i) \cdot B_j(z_i), \quad (74)$$

式中 n_G 是落入节点 z_i 和节点 z_j 影响域交集集中的 Gauss 积分点数, w_{Gi} 是对应第 i 个 Gauss 积分点 z_i 的积分权重.

但对于弹塑性问题, 随着荷载的逐步增加, 求解域内将会出现塑性区, 并随着荷载的增加而逐步扩大, 处于塑性区域内的 Gauss 积分点的应力应变关系不再成线性关系, 而且随着应力的变化而不断发生变化. 因此, 在每一步加载时, 必须先求出每个 Gauss 积分点在上一步加载完毕时的应力, 然后计算出该点的等效应力, 由等效应力是否大于材料的屈服应力来判定该 Gauss 积分点是否进入塑性区, 对于进入塑性区的 Gauss 积分点相应的有 $D(z_i) = [D]_{ep}$, 否则 $D(z_i) = [D]_e$.

3.3 等效节点荷载 $\bar{F}$ 的计算

在增加等效节点荷载增量 $\Delta\bar{F}$ 时, 有一些 Gauss 积分点, 它们在加载前处于弹性阶段, 而在加载后进入塑性阶段, 但还是取 $D(z_i) = [D]_e$, 因此在计算等效节点荷载的增量时, 就要对以前的荷载不平衡进行校正, 才能保证求解结果更贴近于实际情况, 具有较好的精度. 故对每一增量步, 增量形式的离散系统求解方程(72)作如下改动:

$$\Delta U_i = [\bar{K}(\sigma_{i-1})]^{-1} \cdot \left(\bar{F}_i - \int_{\Omega} B^T \sigma_{i-1} d\Omega \right), \quad (75)$$

其中右端最后一项积分 $\int_{\Omega} B^T \sigma_{i-1} d\Omega$ 是前一步增量加载完毕与结构中的应力等价的等效节点荷载; $\bar{F}_i$ 是本次增量加载完毕结构中承受的总的等效节点荷载, 即

$$\bar{F}_i = \bar{F}_0 + \Delta\bar{F}_1 + \Delta\bar{F}_2 + \cdots + \Delta\bar{F}_i, \quad (76)$$

实际求解中, 先把全部荷载作用在结构上, 作完全弹性的线性处理, 按(69)式计算出等效节点总荷载 $\bar{F}$, 将等效节点荷载 $\frac{1}{L} \bar{F}$ (其中 $L = \frac{\bar{\sigma}_{\max}}{\sigma_s}$) 作为弹性极限荷载 $\bar{F}_0$, 按照完全弹性的线性计算弹性极限荷载下的结构位移、应变和应力. 此后就要采取增量加载的方式, 并以 $\Delta\bar{F} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{L} \right) \bar{F}$ 作为以后每一步加载

的等效节点荷载增量, 由此, (76)式中的 $\bar{F}_i$ 可按下式计算:

$$\begin{aligned}\bar{F}_i &= \frac{1}{L} \bar{F} + i \cdot \Delta \bar{F} = \frac{1}{L} \bar{F} + i \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{L} \right) \bar{F} \\ &= \frac{n+i \cdot (L-1)}{nL} \bar{F}, \quad (i=1, 2, \dots, n),\end{aligned}\quad (77)$$

n 为加载步数.

4 数值算例

为了说明本文建立的弹塑性力学的复变量重构核粒子法的有效性, 本节对两个弹塑性力学问题进行了数值求解, 并与 RKPM 和 ANSYS 的计算结果进行了对比分析.

本文算例中, 构造逼近函数时修正函数采用二次基函数, 权函数采用三次样条函数, 影响域采用矩形区域, 决定影响域大小的比例参数 $d_{\max}$ 取为 3.5; 通过对计算结果分析, 罚因子取值 $\alpha = (1.0 \times 10^3) \times E$ 时计算结果较好, 因此本文所有算例中罚因子 α 均取此值; 每个背景网格单元上的积分均采用积分点数为 4×4 的 Gauss 数值积分. 本节算例的加载步数均取为 100 次.

4.1 受集中力作用的悬臂梁

图 1 所示的自由端部受集中力作用的悬臂梁, 梁的几何参数取为长 $L=8$ m, 高度 $h=1$ m, 厚度 $t=1$ m. 材料的弹性模量 $E=10^5$ Pa, Poisson 比 $\nu=0.25$, 屈服应力 $\sigma_s=25$ Pa, 采用线性强化模型, 并服从 Mises 屈服条件, $E'=0.2E$. 集中力 $P=1$ N, 不计自重, 按平面应力计算.

如图 2 所示, 在求解域内均匀布置了 11×5 个节点. 采用本文的复变量重构核粒子法, 可以得到从加载开始到加载完毕的各个阶段的梁内所布节点的位移、应力和应变. 表 1 列出了采用本文方法得到的悬臂梁轴线上部分节点竖向位移的数值解, 并与重构

核粒子法和 ANSYS 法求得的解进行了对比. 可以看出, 用本文方法得到的计算结果与 ANSYS 得到的结果相差很小, 且比重构核粒子法的计算精度要高, 更接近于 ANSYS 的结果. 也就是说, 在相同节点分布时, 相比传统的重构核粒子法, 复变量重构核粒子法可提高计算精度.

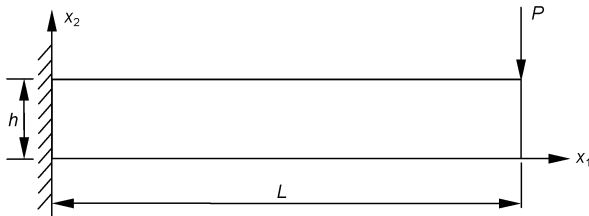


图 1 悬臂梁受集中力作用

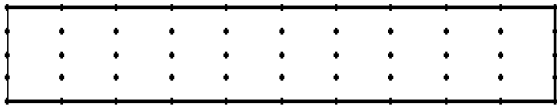


图 2 节点分布

图 3 给出了梁右端中点挠度与荷载的关系, 从该图可以很直观地看到, 当荷载超过弹性极限时, 材料就开始屈服, 进入弹塑性阶段.

4.2 受轴向均布荷载作用的中心圆孔板

图 4 所示为受拉的中心圆孔板, 长 $l=10$ m, 高 $h=4$ m, 圆孔半径为 1 m, 取单位厚度. 左端固定, 右端受轴向均布荷载作用, 荷载集度 $q=1000$ N/m. 材料的弹性模量 $E=1.0 \times 10^5$ Pa, Poisson 比 $\nu=0.25$, 屈服应力 $\sigma_s=250$ Pa, 采用线性强化模型, 并服从 Mises 屈服条件, $E'=0.2E$.

如图 5 所示, 用复变量重构核粒子法计算时, 在求解域内布置了 116 个节点, 在应力集中的孔边布置了较密的节点, 其他参数的选择同 4.1 节的算例. 表 2 列出了部分节点的位移数值解. 同样可以看出, 采

表 1 集中力作用下悬臂梁的竖向位移(单位: mm)

节点坐标		(1.6, 0.5)	(3.2, 0.5)	(4.8, 0.5)	(6.4, 0.5)	(8.0, 0.5)	与 ANSYS 解相比的 最大相对差(%)
弹性解		1.180	4.334	8.963	14.575	20.672	
弹 塑 性 解	ANSYS	2.020	6.837	13.227	20.600	28.460	
	RKPM	1.938	6.709	13.067	20.316	28.143	4.06
	CVRKPM	2.087	6.954	13.389	20.806	28.712	3.32

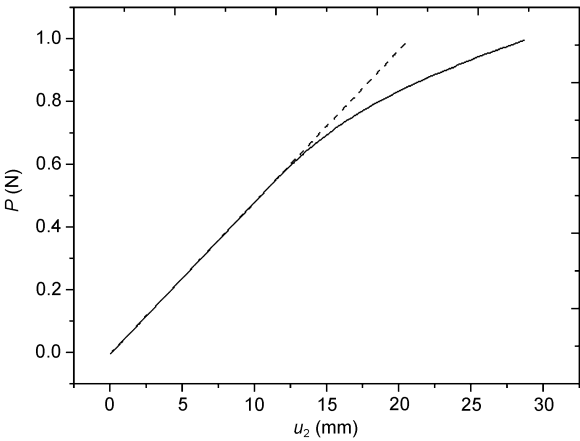


图 3 梁右端中点的挠度与荷载的关系

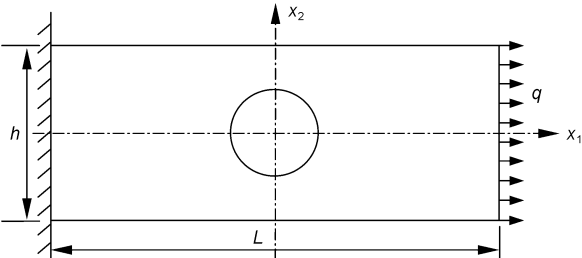


图 4 受轴向均布荷载的中心圆孔板

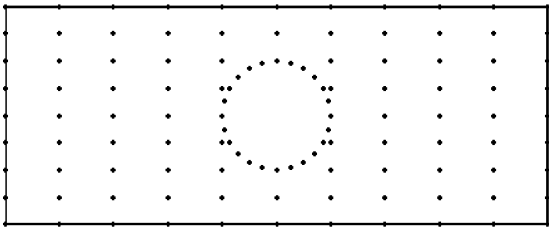


图 5 节点分布

用本文方法得到的数值解与 ANSYS 的解相差很小. 图 6 给出了受拉物体右端中点的轴向位移与荷载的关系图线. 同样当荷载超过弹性极限时, 材料就开始屈服, 进入弹塑性阶段.

可以看出, 本文将复变量重构核粒子法应用于有应力集中现象的弹塑性问题时, 同样也是有效的.

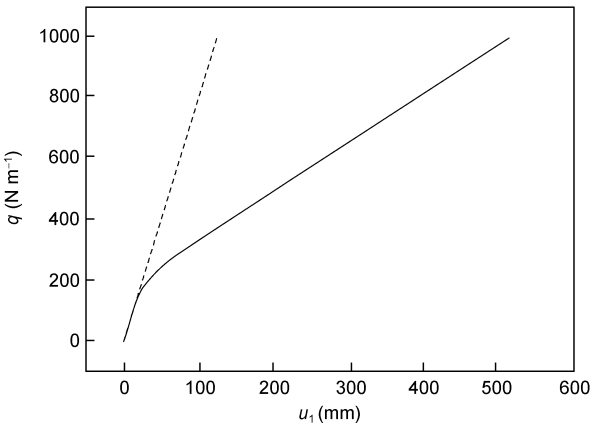


图 6 右端中点的轴向位移与荷载的关系

5 关于计算精度的讨论

本文通过多个算例的计算分析了节点影响域的大小、域内节点数和加载步数等对计算精度和计算效率的影响, 得到的结论类似, 限于篇幅本节仅以受均布荷载作用的悬臂梁的算例来阐述相关结论.

图 7 所示的受均布荷载作用的悬臂梁, 梁长 $L = 8\text{ m}$, 梁高 $h = 1\text{ m}$, 取单位厚度, 按平面应力计算. 分布荷载集度 $q = 1\text{ N/m}$, 不计自重. 材料的弹性模

表 2 中心圆孔板节点位移的弹塑性解

节点坐标	$u_1\text{ (mm)}$		$u_2\text{ (mm)}$	
	ANSYS	CVRKPM	ANSYS	CVRKPM
(-4.0, 2.0)	42.433	42.889	24.924	24.889
(-3.0, 2.0)	84.524	83.872	27.557	28.471
(-2.0, 2.0)	145.610	143.03	34.790	34.376
(-1.0, 2.0)	225.550	220.14	77.695	75.728
(0.0, 2.0)	274.670	267.25	126.600	117.962
(1.0, 2.0)	323.040	313.20	76.718	74.658
(2.0, 2.0)	403.350	391.37	34.099	33.361
(3.0, 2.0)	466.270	451.45	27.784	28.275
(4.0, 2.0)	512.480	497.51	30.547	30.235
(5.0, 2.0)	552.920	537.79	32.323	32.225

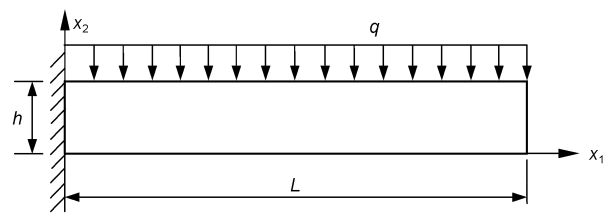


图 7 悬臂梁受均布荷载作用

量 $E = 10^5$ Pa, Poisson 比 $\nu = 0.25$, 屈服应力 $\sigma_s = 25$ Pa, 采用线性强化模型, 并服从 Mises 屈服条件, $E' = 0.2E$.

5.1 节点影响域的大小对计算精度的影响

同 4.1 节的算例, 在求解域内均匀布置了 11×5 个节点, 其他参数的选择也相同, 权函数影响域仍采用矩形区域, 决定影响域大小的比例参数 $d_{\max}$ 分别取值 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 6.0, 7.0, 计算结果如表 3 所示. 可以看出, 复变量重构核粒子法中影响域的选取对计算结果的精度有一定影响. 以梁轴线节点挠度为例, 与 ANSYS 计算结果的最大相对差, 随着 $d_{\max}$ 取值的增大, 计算精度先是提高, 后有所下降, 计算时间持续增加. 因此对于复变量重构核粒子法来说, 从精度和计算时间两方面综合考虑, 比例参数 $d_{\max}$ 的取值在 3.5~4.5 之间时最为合适.

5.2 节点分布对计算精度的影响

在求解域内分别按照四种布点方案均匀布点, 决定影响域大小的比例参数 $d_{\max}$ 取值 3.5, 其他参数的选择同前, 图 8 给出了加载完毕后轴线上点的挠度按本文方法所得数值解与 ANSYS 解的对比. 可以看出, 不同布点方案下, 本文方法计算结果与 ANSYS

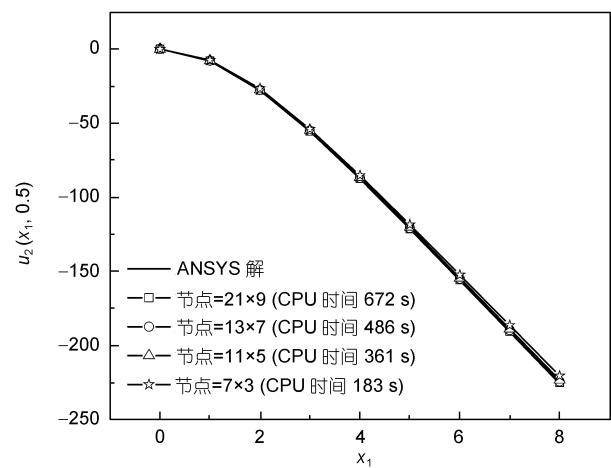


图 8 不同节点分布时轴线上场点位移 u_2

计算结果相吻合; 随着布点数目的增加, 本文方法所得数值解与 ANSYS 解吻合更好.

5.3 加载步数的影响

由于本文在弹塑性力学的复变量重构核粒子法中采用了增量切线刚度法, 因此增量步长的选择对计算结果的精度会有一定的影响. 因为增量步长 $\Delta \bar{F} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{L} \right) \bar{F}$, n 是加载步数, 故可由加载步数来控制增量步长的取值. 从理论上讲, 加载步数越大, 增量步长越小, 则由增量形式的方程代替微分形式的方程引起的误差就越小, 计算结果的精度就会越高. 但在实际计算中也不能无限制地增加加载步数, 那样会导致计算量增加, 降低计算效率. 因此, 如何选取适当的加载步数既能满足精度要求又能保证效率, 是个关键问题.

仍然采用 5.1 节的算例, 加载步数分别取 10, 30,

表 3 不同影响域时悬臂梁的节点位移 u_2

节点坐标	(1.6, 0.5)	(3.2, 0.5)	(4.8, 0.5)	(6.4, 0.5)	(8.0, 0.5)	与 ANSYS 解相比的 最大相对差(%)	计算时间 (s)
ANSYS	18.279	60.587	113.12	167.96	223.19		
$d_{\max}$	2.0	16.957	57.495	108.12	160.99	7.23	161
	2.5	17.885	59.496	111.26	165.29	2.16	222
	3.0	18.15	59.989	111.97	166.23	1.03	293
	3.5	18.231	60.249	112.39	166.77	0.74	361
	4.0	18.295	60.398	112.6	167.05	0.58	432
	4.5	18.15	60.142	112.24	166.62	0.98	491
	5.0	18.058	60.017	112.01	166.37	1.21	535
	6.0	18.032	60.038	111.99	166.3	1.05	620
	7.0	17.905	59.841	111.64	165.88	2.05	692

表 4 不同加载步数时悬臂梁的节点位移 u_2

节点坐标	(1.6, 0.5)	(3.2, 0.5)	(4.8, 0.5)	(6.4, 0.5)	(8.0, 0.5)	与 ANSYS 解相比的 最大相对差(%)	计算时间 (s)
ANSYS	18.279	60.587	113.12	167.96	223.19		
10	16.363	54.69	102.08	151.55	201.41	10.48	41
30	17.531	58.28	108.88	161.66	214.83	4.09	112
50	17.894	59.428	110.96	164.71	218.85	2.11	185
70	18.044	59.775	111.57	165.6	220.02	1.42	257
90	18.139	60.051	112.06	166.31	220.95	1.0	328
100	18.231	60.249	112.39	166.77	221.54	0.74	361
130	18.402	60.643	113.03	167.66	222.68	0.67	473
150	18.398	60.82	113.3	168.04	223.16	0.65	543

50, 70, 90, 100, 130, 150 次, 其他参数不变, 计算结果见表 4. 从该表可以看出, 加载步数仅为 30 次时, 最大相对差就只有 4.09%, 这是因为本文采用了 Newton-Raphson 法, 采用较少的加载步数, 就可获得较高的计算精度.

图 9 给出了用本文方法得到的悬臂梁挠度数值解与 ANSYS 解的最大相对差随加载步数的变化曲线, 可以看到随着加载步数的增加, 计算精度增加的幅度逐渐趋于平缓, 但从表 4 可以看出计算时间的增长

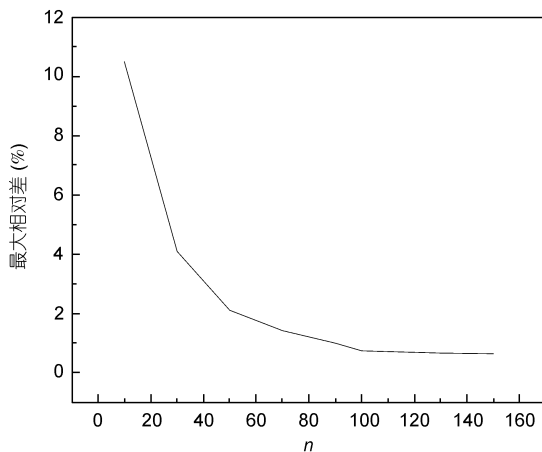


图 9 数值解的最大相对差与加载步数的关系

幅度却很大, 大大降低了计算效率. 因此, 在计算中, 加载步数不必选取过大, 否则会造成计算量的大幅度增加.

6 结论

本文在重构核粒子法的基础上建立了弹塑性力学的复变量重构核粒子法. 复变量重构核粒子法的优点是在形函数的构造中采用一维基函数建立二维问题的修正函数, 进而得到了二维问题的逼近函数. 建立了弹塑性力学的复变量重构核粒子法的计算公式, 给出了算例, 和 ANSYS 的计算结果进行了比较, 证明了将复变量重构核粒子法应用于弹塑性平面问题是有效的.

本文从节点影响域的大小、域内所布节点数和加载步数等方面, 讨论了对计算精度和计算效率的影响, 得到如下结论: 节点影响域的大小对计算结果的影响较大, 节点影响域比例参数 $d_{\max}$ 在 3.5~4.5 之间取值时精度较高; 随着域内所布节点数的增加, 计算精度将提高, 但计算时间会相应增加; 随着加载步数的增加, 计算精度将提高, 计算时间的增长幅度却很大, 降低了计算效率.

参考文献

- Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1996, 139(1): 3—47[DOI]
- Li S F, Liu W K. Meshless and particles methods and their applications. *Appl Mech Rev*, 2002, 55(1): 1—34
- Kargarnovin M H, Toussi H E, Fariborz S J. Elasto-plastic element-free galerkin method. *Comput Mech*, 2003, 466—521
- Chen Y, Eskandarian A, Oskard M, et al. Meshless analysis of plasticity with application to crack growth problems. *Theor Appl Fract Mech*, 2004, 41: 83—94[DOI]
- Kwon K C, Park S H, Youn S K. The least-squares meshfree method for elasto-plasticity and its application to metal forming analysis. *Int J*

- Numer Methods Eng, 2005, 64: 751—788^[DOI]
- 6 龙述尧, 陈莘莘. 弹塑性力学问题的无单元伽辽金法. 工程力学, 2003, 20(2): 66—70
 - 7 熊渊博, 龙述尧, 刘凯远. 弹塑性力学问题的无网格分析. 机械强度, 2004, 26(6): 647—651
 - 8 李卧东, 王元汉, 谭国焕. 无网格法在弹塑性问题中的应用. 固体力学学报, 2001, 22(4): 361—367
 - 9 赵光明, 宋顺成, 杨显杰. 基于增量本构关系弹塑性分析的无网格伽辽金法. 中国矿业大学学报, 2005, 34(4): 509—513
 - 10 Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods. Int J Numer Methods Eng, 1994, 37(2): 229—256^[DOI]
 - 11 Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods. Int J Numer Methods Eng, 1995, 20: 1081—1106^[DOI]
 - 12 Duarte C A, Oden J T. An h-p adaptive method using clouds. Comput Methods Appl Mech Eng, 1996, 139: 237—262^[DOI]
 - 13 Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, et al. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. Int J Numer Methods Eng, 1996, 39: 3839—3866^[DOI]
 - 14 程荣军, 程玉民. 带源参数的热传导反问题的无网格方法. 物理学报, 2007, 56(10): 5569—5574
 - 15 Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. Comput Mech, 1998, 22(2): 117—127^[DOI]
 - 16 Aluru N R. A point collocation method based on reproducing kernel approximations. Int J Numer Methods Eng, 2000, 47: 1083—1121^[DOI]
 - 17 Liu W K, Chen Y J. Wavelet and multiple scale reproducing kernel methods. Int J Numer Methods Fluids, 1995, 21: 901—931^[DOI]
 - 18 Idelsohn S R, Onate E, Calvo N, et al. The meshless finite element method. Int J Numer Methods Eng, 2003, 58: 893—912^[DOI]
 - 19 程玉民, 彭妙娟, 李九红. 复变量移动最小二乘法及其应用. 力学学报, 2005, 37(6): 719—723
 - 20 程玉民, 李九红. 弹性力学的复变量无网格方法. 物理学报, 2005, 54(10): 4463—4471
 - 21 程玉民, 李九红. 断裂力学的复变量无网格方法. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2005, 35(5): 548—560
 - 22 李树忱, 程玉民. 基于单位分解法的无网格数值流形方法. 力学学报, 2004, 36(4): 496—500
 - 23 李树忱, 程玉民, 李术才. 动态断裂力学的无网格流形方法. 物理学报, 2006, 55(9): 4760—4766
 - 24 Zhu T, Zhang J D, Atluri S N. A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics and a meshless discretization approach. Comput Mech, 1998, 21: 223—235^[DOI]
 - 25 Kothnur V S, Mukherjee S, Mukherjee Y X. Two dimensional linear elasticity by the boundary node method. Int J Solids Struct, 1999, 36(8): 1129—1147^[DOI]
 - 26 程玉民, 陈美娟. 弹性力学的一种边界无单元法. 力学学报, 2003, 35(2): 181—186
 - 27 程玉民, 彭妙娟. 弹性动力学的边界无单元法. 中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学, 2005, 35(4): 435—448
 - 28 秦义校, 程玉民. 弹性力学的重构核粒子边界无单元法. 物理学报, 2006, 55(7): 3215—3222
 - 29 戴保东, 程玉民. 势问题的径向基函数——局部边界积分方程方法. 物理学报, 2007, 56(2): 597—603
 - 30 陈丽, 程玉民. 弹性力学的复变量重构核粒子法. 物理学报, 2008, 57(1): 1—10