有关套管柱设计问题的讨论

刘崇建　　刘绘新

（西南石油学院）

《天然气工业》1981年第三、四期连载了《套管方程》（简称《套管》）的文章。为了加深对问题的认识，使套管柱的设计趋于完善、合理，本文就《套管》一文提到的应力函数与极角的关系；拉梅公式的适用性；总体安全系数的设计以及作者所推荐的抗挤强度公式，提出以下粗浅看法，供讨论。

一．受均匀内外压圆筒的变形特征

套管属于中厚壁圆筒，在井下液柱压力的作用下，主要是丧失稳定而破坏。即当外挤压力达到某一临界值，套管被挤扁。除此之外，还有一部分套管属于强度破坏。以下所讨论的套管问题，均属于强度破坏的弹性解。

在均匀内外压作用下，套管环形截面上的变形有以下特征：

1．由于外压力及物体本身的对称性，因此圆筒变形后，仍然是轴对称的。也就是说，由于圆筒横截面的变形是径向的均匀扩展和收缩，因此变形前后均为圆形。即横截面上每一点的位移只有径向分量，且在同一半径上各点相等，与极角无关；

2．由边界条件可知，在内外圆周上各点应力相等且分别等于内外压力。再根据变形的保圆性，则应力分布只沿径向变化，无论周向应力还是径向应力在同一半径上各点相等，与极角无关。

这两个变形特征，是众所周知的事实。以后的讨论，就是以此作为根据的。

应力函数与极角无关的必要充分条件是应力分量和应变分量与极角无关[1]。对于受均匀内外压的圆筒，其变形特征已表明了应力分量和应变分量与极角无关，那么结论就将是很清楚的：应力函数与极角无关。如果应力函数与极角有关，那么在同一圆周上的各点变形将不一致，使圆形的横截面变为椭圆。这一结果，显然与事实不相符合。

《套管》一文指出：横截面上，沿半径相邻的两层其周向应变不等，是剪应力不为零的最好证据。这一看法是不妥当的。在横截面上，剪应力是否存在，取决于同一半径上各点在变形前后有无相对位移，即变形前这些点在同一半径上，变形后是否仍在同一半径上。实际上就是有无周向位移的存在。鉴于圆环的变形只有径向位移而无周向位移，在同一半径上的各点在变形前后没有相对位移，故无剪应力存在。

《套管》一文在此出现弊病的原因就是混淆了周向应变和周向位移这两个不同的概念。虽然受均匀内外压的厚壁圆筒只有径向位移而无周向位移，但周向应变却是存在且随半径变化，因此用周向应变的存在来否定剪应力为零的条件是不能成立的。

二. 厚壁圆筒拉梅公式的适用性

当套管的径厚比约为12～17时，拉梅公式是适用的。在均匀受内外压作用下的套管（图1），其拉梅公式的普遍形式为：

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_2 - b^2 p_1}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_2 - p_1)}{r(b^2 - a^2)} \tag{1}$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_2 - b^2 p_1}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_2 - p_1)}{r(b^2 - a^2)} \tag{2}$$

式中　σ_r—管壁径向应力；

σ_t—管壁周向应力；

r—管壁内任意点的半径。

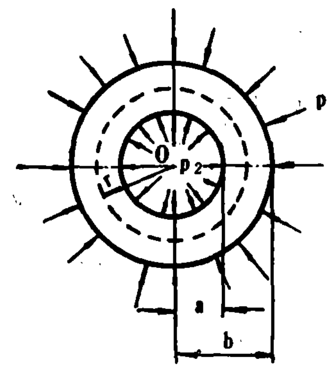

图1

1.拉梅公式适用于实心圆柱的求解

当套管不受内压只受外压时，拉梅公式可写成以下形式：

$$\sigma_r = \frac{-b^2 p_1}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{3}$$

$$\sigma_t = \frac{-b^2 p_1}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{4}$$

由式(3)、(4)可知，$\sigma_t > \sigma_r$，且在管内壁 $r = a$ 处，σ_t最大，记为σ_{tmax}，

$$\sigma_{tmax} = -\frac{2p_1 b^2}{b^2 - a^2}$$

以材料最小屈服极限σ_s代换上式的σ_{tmax}，移项后可得套管抗挤强度公式：

$$p_1 = -\frac{\sigma_s (b^2 - a^2)}{2b^2}$$

即：

$$p_c = \frac{2((D/t) - 1)}{(D/t)^2}\sigma_s \tag{5}$$

式中　p_c—套管抗挤强度；

D—套管外径；

t—套管壁厚。

《套管》一文认为，公式(4)、(5)不适用于实心圆柱 $a = 0$ 的情况，因为 $a = 0$，即 $D = 2t$时，

$$p_c = \frac{1}{2}\sigma_s$$

这个结论与实际情况是不相符合的，因为实心圆柱的抗挤强度p_c应为σ_s，从而对拉梅公式的正确性提出了异议。

《套管》在此产生了两种错觉：

①误认为式（5）适用于 $a = 0$ 的情况，$a = 0$ 时，式（5）是无法从式（4）得到的；

②误认为 $\lim\limits_{r \to 0, a \to 0} \frac{a^2}{r^2} = 1$

上述问题均归咎到 $\lim\limits_{r\to0,a=0}\frac{a^2}{r^2}=?$，我们知道$\frac{a^2}{r^2}=\frac{0}{0}$为不定解。

从式(3)、(4)不难看出，当受外压圆筒为实心圆柱时，即 $a=0$ 时，圆形截面 $r\neq0$ 的任意点，径向应力与周向应力均等于外挤压力。即$\sigma_r=\sigma_t=-p_1$，而从应力函数在各点的连续性出发，当 $r=0$ 时，其径向应力与周向应力同样是满足上述关系的。

为使证明更加严密，用极限概念求解$\left[\frac{a^2}{r^2}\right]_{\substack{a=0\\r\to0}}$。

上述两个无穷小量比值的极限[2]，视其各自的阶数而定，当分子较分母为更高阶无穷小量时，此比值极限恒为零。分子 a 本身是常量零，阶数当然比 $r\to0$ 高，故其比值极限恒为零。

即 $\left[\frac{a^2}{r^2}\right]_{\substack{a=0\\r\to0}}=0$ 将该关系式代入式(3)、(4)则得，实心圆柱内任意各点，其周向应力和径向应力均与位置无关，恒等于外挤压力p_1。

当以套管钢材的最小屈服极限作为校核套管的强度标准时，实心圆柱各点的抗挤强度就是钢材的屈服极限。这一结论说明拉梅公式适用于实心圆柱在外力作用下的求解。

2.应力函数求解与拉梅公式求解是一致的

《套管》否定拉梅公式的第二个根据是，应用应力函数求解极角为零的周向应力时，$\sigma_t=0$；而拉梅公式求解，则$\sigma_t\neq0$，从而说明拉梅公式存在问题。

对此，我们作如下分析。

从前面分析可知，套管变形问题，实际是个平面应力问题，现用应力函数ϕ的一般形式求解σ_r、σ_t（图2）

$$\sigma_r=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$

$$\sigma_t=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

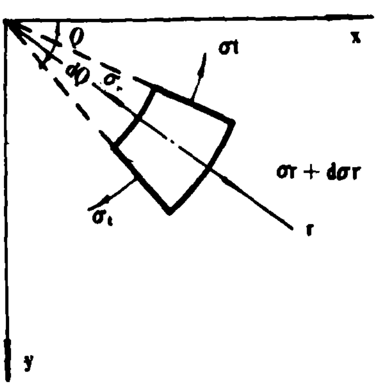

图2

由于一般平面问题中，应力函数ϕ是半径r和极角θ的函数[3]，但同时又是x和y的函数。因此必须找出直角坐标和极坐标的关系，从而找出$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$，再求 $\theta=0$ 时的σ_t值。

直角坐标与极坐标的相互关系为：

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta \tag{6}$$

或

$$r^2=x^2+y^2 \qquad \theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} \tag{7}$$

由(7)式有：

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta \tag{8}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{1}{r}\sin\theta \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{r}\cos\theta \tag{9}$$

现求应力函数$\phi(x,y)$对x及y的微分，并将(8)、(9)两式代入得到：

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\sin\theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{\partial \phi}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\cos^2\theta-2\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\sin\theta}{r}$$
$$+2\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\sin^2\theta+2\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r}$$
$$-2\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} \tag{11}$$

若使 θ = 0，即 x 轴与 y 轴重合，y 轴与 θ 轴重合，式(10)、(11)则为：

$$\sigma_r=(\sigma_x)_{\theta=0}=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_{\theta=0}$$
$$=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\neq 0 \tag{12}$$

$$\sigma_t=(\sigma_y)_{\theta=0}=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_{\theta=0}=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \tag{13}$$

由式（12）可知，不管应力函数与极角是否有关，当极角 σ_r为零时，都不为零。而当所讨论的问题是均匀受内外压的厚壁筒时，即应力函数与极角无关时，有：

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} \tag{14}$$

$$\sigma_t=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \tag{15}$$

式（14）、（15）正是拉梅问题求解的条件。既然这两个式子是正确的，那么拉梅公式的正确将是确信无疑了。《套管》在对应力函数求二阶导数后，不是将θ = 0的条件带入式子内求解，而是认为在θ = 0 的条件下整个导数与θ无关，从而得到了 $\sigma_r = 0$ 的错误结论。显然这种方法是不对的。

3.拉梅公式说明了圆筒变形的特征

将拉梅公式普遍形式（1）、（2）相加，则得：

$$\sigma_r+\sigma_t=2\frac{a^2p_2-b^2p_1}{b^2-a^2} \tag{16}$$

从式（16）不难看出，管壁上任意点 $\sigma_r+\sigma_t$ = 常数，与半径 r 无关。又由广义虎克定律可知，各点的轴向应力同样也与 r 无关，因此厚壁筒的横截面，在圆筒受均匀内外压力作用时保持为圆形平面。这就是圆筒变形的主要特征，和我们前面的分析是一致的。

下面将式（16）进一步变换，可得出横截面内任一层的单位体积变形ε_V的表达式[4]：

$$\varepsilon_v=\frac{V_1-V_0}{V_1}=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_r+\sigma_t) \tag{17}$$

式中　V_1——某一层变形前的体积；　　V_0——某一层变形后的体积；

μ——钢材的泊桑系数；　　E——钢材的弹性系数。

分析（17）式可知：

（1）只有当 $\sigma_r+\sigma_t=0$ 时，或者是 $\mu=0.5$ 时，ε_v 才为零。对于套管的情况这是无法做到的。因为它的应力和不为零，泊桑系数 $\mu<0.5$。因此，只要有外力作用，就将有体积变形。《套管》一文假设变形前后体积不变来讨论问题，是不符合实际情况的。

（2）由于圆筒横截面任一点的 $\sigma_r+\sigma_t=$ 常数，因此每一层的单位体积变形也为一常数。《套管》在此，混淆了体积变形和单位体积变形的概念。正确的说法，不是变形前后体积不变而是各层单位体积变形相等。

三．总体安全系数的合理性

《套管》一文所提出的总体安全系数，其观点是正确的，但具体进行套管柱设计，尚有以下问题需要考虑。

（1）总体安全系数如何取值；

（2）不同井段套管所受外力均有侧重，如井底套管只考虑外挤压力的作用；而井口的套管却只考虑拉伸载荷的作用；

（3）由于井下情况的复杂性，实际拉伸载荷是难以准确计算的，而外挤压力却能较合理地计算出来，即从单一的安全系数考虑，抗拉安全数 $m_{拉}$ 和抗挤安全系数 $m_{挤}$ 有较大的差异，总体安全系数能否正确地反映出来。

1.总体安全系数的合理值

为便于使用总体安全系数进行套管柱设计，本文将根据有关关系找出总体安全系数m和 $m_{拉}$，$m_{挤}$ 的关系，以便寻求合理的m值。

总体安全系数m的表达式为：

$$\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_0}\right)^2+\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_0}\right)\left(\frac{P_{cc}}{P_c}\right)+\left(\frac{P_{cc}}{P_c}\right)^2=\frac{1}{M^2} \tag{18}$$

式中　σ_z——轴向拉应力；

P_c——无轴向拉力时套管抗挤强度；

P_{cc}——有轴向拉力时套管抗挤强度。

当考虑套管承受轴向拉应力时，拉应力 σ_z 与 $m_{拉}$ 的关系为：

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_0}=\frac{1}{m_{拉}} \tag{19}$$

而井下套管在 σ_z 的作用下，套管抗挤强度从 P_c 降到 P_{cc}，

$$P_{cc}=\frac{P_c\sigma_z}{2\sigma_0}\left(\sqrt{4\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_z}\right)^2-3}-1\right) \tag{20}$$

如考虑 $\sigma_z=0$ 时套管的抗挤安全系数，则上式应扣除抗挤余量，即除以 $m_{挤}$，并将（19）式代入（20）式得：

$$\frac{P_{cc}}{P_c}=\frac{1}{2m_{挤}m_{拉}}\left(\sqrt{4m_{拉}^2-3}-1\right) \tag{21}$$

将（19）、（20）两式代入（18）式中，整理后得到m与m拉、m挤的关系式：

$$m=\left\{\frac{1}{m_{拉}^{2}}+\frac{1}{m_{挤}^{2}}+\frac{1}{2m_{拉}^{2}m_{挤}^{2}}\left[\sqrt{4m_{拉}^{2}-3(m_{挤}-1)}-(m_{挤}+1)\right]\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{22}$$

式（22）表明，如果$m_{拉}$、$m_{挤}$在单向应力状态下的强度条件是可靠的，则m在双向应力状态下强度条件一定是可靠的。

对于API套管规范来说，现场实践证明，抗拉安全系数和抗挤安全系数可分别取如下经验数值：$m_{拉}=1.8$；$m_{挤}=1.1$。

将此数值代入式（22）中，可得出m的合理值$m=1.05$。

从道理上讲，当$m=1.05$时，套管一般是处于安全状态的。

2.总体安全系数的使用条件

以式（22）取$m=1.05$为例，$m_{拉}$、$m_{挤}$的组合（见表1）。

为了方便，我们把表1的数值做成图，（见图3）。

表1

总体安全系数 m	抗拉安全系数 $m_{拉}$	抗挤安全系数 $m_{挤}$
1.05	1.80	1.10
1.05	1.60	1.12
1.05	1.50	1.14
1.05	1.40	1.16
1.05	1.20	1.29

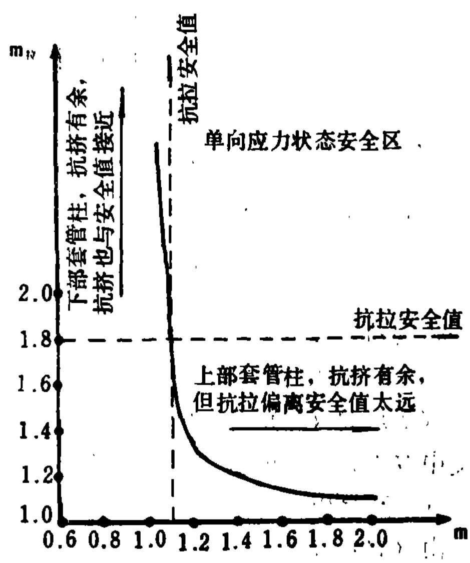

图3

由表1或图3可知：

（1）当总体安全系数为定值（如$m=1.05$）时，$m_{挤}$的变化趋于稳定，而$m_{拉}$的变化幅度较大。

（2）当m一定时，$m_{拉}$所满足的条件是：

$$\left(\frac{2m_{拉}}{m}\right)^{2}>4$$

否则，方程将有虚解，不能使用。

（3）一定的总体安全系数并不能适应套管柱在井下不同位置对外力余量的不同要求。

这些分析进一步说明，对于各个位置受有不同外力的井下套管，即使总体安全系数达到规定的要求，还可能出现不安全的情况（图3）。特别对于上部井段的套管和受拉力载荷较大的深井套管，这个问题尤为突出。因为，在满足一定的m时，$m_{挤}$稍有增加，$m_{拉}$就会大幅度下降，这是总体安全系数不够完善的地方。对于下部套管，由于主要力系是外挤压力，而抗挤安全系数又与m相吻合，变化幅度不大，因此，就方法本身而言是合理的。

总体安全系数除了存在上述不足之处外，在具体设计中，还会碰到如下问题。大家都知道，套管柱的设计首先是以外挤压力为准，从下面开始而逐渐到上面进行套管选择的。那么

什么情况下用总体安全系数进行设计，设计后是否需要分别满足套管不同位置对不同外力余量的要求。如需要，则运算就要反复进行，可能会带来较大的工作量。

上述问题的讨论，对我们进一步研究和完善如何用总体安全系数进行井下套管柱的设计是有益的。

为了使用方便，现将常用$m_{挤}$、m 的数值所对应的合理总体安全系数计算如表 2 。

表 2

抗拉安全系数	$m_{拉}$	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80
各类安全系数	$m_{挤}$	1.05				
	m	1.022	1.023	1.024	1.025	1.026
	$m_{挤}$	1.10				
	m	1.042	1.044	1.046	1.048	1.050

四. 对《套管》一文中抗挤强度公式的讨论

《套管》应用第四强度理论所建立的抗挤强度表达式如下：

$$P_C=\frac{1}{2}\sigma_0\ln\frac{D/t}{(D/t)-2} \tag{24}$$

式（24）有以下几个问题需要商榷：

（1）公式推导的前提存在问题。均匀受外压圆环截面上剪应力不为零是错误的；

（2）式（24）采用能量观点进行推导时，附加有$\mu=0.5$的条件，不仅与实际不符，且与文中按积分推导的方法也不一致；

（3）会出现与实际情况不相符的结论。

由（24）式可知，如使套管承受的外挤压力等于屈服极限，则：

$$\ln\frac{D/t}{(D/t)-2}=2$$

即 $D/t\approx2.313$

当套管直径是壁厚的 2.313 倍时，套管就能承受相当于屈服极限的外挤压力。

由此不难推断，当 $2<D/t<2.313$时，$P_C>\sigma_0$。

且 $\frac{D}{t}=2$ 时，$P_C\longrightarrow\infty$

这一结果说明，当套管径厚比达到某一值后，套管能承受的外挤压力可大于套管的屈服极限。这是违背弹性力学的根本原则，也是无法做到的事实。

《套管》一文企图用变形占据中间的空心使得圆环变成实心刚体来解释，也是不妥当的。实际上满足上式的中心空间仍然可能是很大的，而弹性力学讨论的都是小变形问题，因此作者的解释是不能自圆其说的。 （下转49页）

根据，但是对于不同规范参数的管可以有不同的选择，譬如椭圆度、不均质、不均载等等。不过要注意抓住诸因素中起决定性作用的因素，并照顾到一般。否则将脱离实际结果而失去意义。（参考文献略）

更　　正

期次	页行	错误	正确
81年第三期	61页倒4	$-1/2$	应改为"$-1/2$"幂
	66页7行	$\sqrt{F}=0.\gamma_c$	$\sqrt{F}=0.1\gamma_c$
	66页8行	P^2	P_2
81年第四期	51页倒3	0	∞
	52页1行	$\frac{t}{\nabla}=1Pc=0$	$\frac{t}{D}=1$时，$Pc=0$
	52页13、14	许用、$\frac{公斤}{厘米^2}$	应删去
	55页3行	$\sin a\int_0^t$	$\sin\frac{a}{2}$
	55页图2.4	$\frac{D-t}{2}$	$\frac{D-2t}{2}$
	55页倒1—6	σ	δ
	55页1—2	σ	δ
	57页20行	"引起管体增长"	后加"若Δh为外挤力所引起"
	59页13行	$\frac{1}{2}$	应删去
	66页表中	$P_1=\frac{c\pi(C^2-d^2)}{4}$	$P_1=\frac{c\pi(D^2-d^2)}{4}Yp$

（上接56页）

结　　语

（1）均匀受内外压的圆筒，应力函数与极角无关，剪应力为零；

（2）拉梅公式的静力平衡方程与应力函数的表达式完全一致，拉梅公式完全适用于实心圆柱的情况；

（3）保持圆筒受外力后为对称平面变形的基本条件是环形截面各层的单位体积变形相等，因此剪应力应为零。各层周向应变不等，是不能反映剪应力是否存在的；

（4）《套管》一文所推荐的抗挤强度公式，从公式的推导和实际应用都是不正确的；

（5）总体安全系数的合理值尚需进一步通过实践进行总结，应用总体安全系数设计下部套管柱较为合理，而对上部套管柱则需进一步商榷。

参 考 文 献

〔1〕钱伟长、叶开源　《弹性力学》　p225～231　科学出版社　1980年
〔2〕樊映川等编　《高等数学讲义》上册 p236～238　人民教育出版社　1964年
〔3〕杨桂通　《弹塑性力学》　p136～147　人民教育出版社　1980年
〔4〕同济大学材料力学教研组　《材料力学教程》 p130～132　上海科技出版社　1964年