DEV 模型和 SAHARA 效用下 DC 型养老金的最优投资策略

马敬堂*, 陈登胜, 鹿正阳

西南财经大学经济数学学院, 成都 611130

E-mail: mjt@swufe.edu.cn, cds@smail.swufe.edu.cn, luzzy@smail.swufe.edu.cn

收稿日期: 2020-03-18; 接受日期: 2020-06-16; 网络出版日期: 2021-02-22; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671323)、中央高校基本科研业务费 (批准号: JBK1805001) 和新世纪优秀人才支持项目 (批准号: NCET-12-0922) 资助项目

摘要 本文研究不完全金融市场中缴费确定型养老金的最优投资问题, 并假设金融市场由一种无风险资产和一种价格过程服从动态方差弹性模型的风险资产组成. 在对称渐近双曲绝对风险厌恶效用下, 养老金参与者旨在最大化其终端时刻财富的期望效用. 本文推导 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程, 给出验证结果和值函数的上界和下界, 然后应用对偶控制 Monte Carlo 算法计算最优策略. 数值算例验证了该方法的准确性.

关键词 缴费确定型养老金 不完全金融市场 动态方差弹性模型 对称渐近双曲绝对风险厌恶效用 对偶控制 Monte Carlo 算法 最优策略

MSC (2020) 主题分类 91B05, 91G05

1 引言

养老基金的收益直接影响老年人退休后的生活质量. 因此, 如何进行资产的最优化配置对养老金参与者而言是至关重要的. 根据缴存和给付设定的不同, 可以将养老基金分为两个主要类型: 收益确定 (defined benefit, DB) 型和缴费确定 (defined contribution, DC) 型. 与 DB 型养老金相比, DC 型的优势在于将投资和长寿风险从发起人转移到投保人身上, 从而可以缓解社保体系承受的压力. 从国际发展趋势看, DC 型养老金已成为国际企业年金最常用的管理模式. 因此, DC 型养老金的最优投资问题变得越来越普遍和重要.

对于 DC 型养老金参与者而言, 如何最大化其终端时刻的期望财富效用本质上取决于参与者的风险偏好和市场的设定. 我们通常可以用常数相对风险厌恶 (the constant relative risk aversion, CRRA) 效用函数或常数绝对风险厌恶 (the constant absolute risk aversion, CARA) 效用函数来刻画投资者的风险偏好. 在假定投资者为上述两种类型效用偏好下, 目前已经有很多文献对 DC 型养老金的最优资

英文引用格式: Ma J T, Chen D S, Lu Z Y. Optimal strategies for a defined contribution pension plan with SAHARA utility under DEV model (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 223–244, doi: 10.1360/SCM-2020-0228

产配置问题进行了研究, 如文献 [1–6]. 然而, 上述两种类型风险偏好不能适用于投资者因财富值极小而可能变得不那么厌恶风险这一情形. 为了克服这一困难, Chen 等^[7]首次提出了对称渐近双曲绝对风险厌恶 (the symmetric asymptotic hyperbolic absolute risk aversion, SAHARA) 效用. 关于这一类型效用函数的描述同样可参见文献 [8]. 最近, 一些学者在假定投资者为这一类型风险偏好下对期望效用最大化问题进行了研究, 如文献 [9–11].

除了风险偏好外, 股票价格模型的设定也会对投资者决策行为产生重要的影响. 在早期的研究工作中, 通常假设股票价格过程服从几何 Brown 运动 (geometric Brownian motion, GBM) 模型. 但在现实中 GBM 模型的假定与真实金融市场中波动率微笑和波动率聚类这些特征是相矛盾的. 不变方差弹性 (the constant elasticity of variance, CEV) 模型是 GBM 模型的拓展, 它首先由 Cox^[12] 提出, 该模型的波动率与风险资产价格相关. CEV 模型的优势在于, 可以解释模型中所表现出的经验偏差, 如波动率微笑等, 详细的描述可参见文献 [13]. 目前, 在假设股票价格过程服从 CEV 模型下, 对 DC 型养老金的最优资产配置问题的研究工作是相当成熟的. 例如, Xiao 等^[14]研究了养老金的最优投资组合问题, 并在对数效用函数下获得了最优策略的显式解. Gao^[15,16]假定投资者具有 CRRA 和 CARA 风险偏好, 分别在不同情形下研究了 DC 型养老金的最优投资问题, 同样获得了最优策略的显式解. 接着 Gao^[17]提出了拓展的 CEV 模型, 即 E-CEV (extended constant elasticity of variance) 模型, 在这一模型下研究了养老金的最优投资问题并用渐近展开的方法获得了最优策略的渐近解. Zhao 和 Rong^[18]考虑了多资产 CEV 模型, 推导出投资策略的显式解. Li 等^[19]在研究 DC 型养老金的均衡投资策略时考虑了违约风险及保费返还条款. 由于一些突发的碰撞事件使得股票的波动率在短时间内剧烈变化, 这一现象在 CEV 模型中无法得到很好的体现. 为了克服这一缺陷, Fan 等^[20]将 CEV 模型拓展到动态方差弹性 (the dynamic elasticity of variance, DEV) 模型, DEV 模型中波动函数的幂不是一个常数, 而是关于时间 t 的函数.

为了更好地描述金融市场, 一些学者在研究 DC 型养老金的最优投资问题时同样考虑了其他风险因素. 例如, Zhang 和 Ewald^[21]在研究 DC 型养老金的最优投资问题时考虑了通货膨胀风险. Han 和 Hung^[22]以及 Tang 等^[23]在研究 DC 型养老金的最优投资问题时考虑了通货膨胀、随机利率和最低保障. Guan 和 Liang^[24]在研究养老金的投资问题时考虑了利率和工资风险, 但没有考虑最低保障. Liang 和 Ma^[25]在研究 DC 型养老金的最优投资时考虑了利率风险和死亡风险. Dong 和 Zheng^[26]对 DC 型养老金的最优问题进行了研究, 并考虑了卖空和最低保障这两个局限因素且假设投资者具有 S 型风险偏好. 此外, 在研究养老金的投资组合问题时, 一些文献考虑了规避损失和风险价值约束, 如文献 [27–29]. 在这些风险因素中, 由于投资者更关心财富的实际购买力给他们带来的效用, 因此在研究中考考虑通货膨胀风险是很有必要的.

综上所述, 虽然很多学者对 DC 型养老金的最优投资问题进行了研究, 但是还没有学者考虑 SAHARA 效用和 DEV 股票模型. 因此, 本文研究 DC 养老金的最优投资问题并假设养老金参与者具有 SAHARA 效用, 并且股票价格过程由 DEV 模型刻画. 此外, 我们还考虑了通货膨胀风险, 并假设股票风险与通货膨胀风险具有相关系数 $-1 < \rho < 1$. 这些问题在现有的文献中都没有得到很好地解决. 在这种情形下, 对于股票价格过程服从 CEV 模型和 DEV 模型, 我们无法得到最优策略显式解. 因此, 在研究养老金的最优投资问题时, 我们应用对偶控制方法与 Monte Carlo 方法 (称之为对偶控制 Monte Carlo 方法) 来求解值函数的上界和下界以及最优策略的近似解.

对偶控制 Monte Carlo 方法已经成功地解决了在状态转移 (regime-switching) 模型和 Heston 模型下投资者具有一般风险偏好的最优投资问题, 参见文献 [30,31]. 本文将这一方法应用于求解股票价格过程服从 DEV 模型以及投资者具有 SAHARA 效用的 DC 型养老金的最优投资问题. 由于 DC 型养

老金中财富过程具有连续现金流入, 我们将其转化为一个等价的没有连续现金流入的投资组合问题, 从而可以应用对偶控制 Monte Carlo 方法进行求解. 由于转化得到的对偶控制问题仍然是一个难以解决的随机控制问题, 我们在假定某种控制形式下去求解值函数的上界, 然后使用上界获得的反馈控制计算值函数的下界. 上下界的计算类似于求解期权定价问题, 因而比较容易计算, 并且反馈控制可以很好地逼近最优投资策略, 计算结果可用于相应的敏感性分析.

本文余下内容的安排如下: 第 2 节介绍 DEV 模型和 DC 型养老金的最优投资模型. 第 3 节给出 HJB 方程和验证结果. 第 4 节应用对偶控制 Monte Carlo 方法推导出值函数上界和下界, 并得到最优策略的近似解. 第 5 节给出数值分析. 第 6 节给出总结.

2 DEV 模型与 DC 型养老金

考虑投资区间 $[0, T]$ 且假定本文所涉及的随机过程和随机变量均定义在一个带域流的完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$ 上, 这里 P 为真实的概率测度. $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 表示 t 时刻所获得的信息流, 其由两个相关系数为 ρ ($-1 < \rho < 1$) 的标准 Brown 运动 W_t^1 和 W_t^2 生成. 此外, 假设金融市场没有交易成本和税收且交易是连续的.

假设金融市场由一种无风险资产 (如债券) 和一种风险资产 (如股票) 组成. 无风险资产的价格 B_t 满足如下微分方程:

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt,$$

这里常数 $r > 0$ 表示无风险利率. 假设 t 时刻风险资产的价格 S_t 服从 DEV 模型

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_1 dt + \sigma_1 S_t^{\frac{f(t)}{2}-1} dW_t^1, \quad (2.1)$$

这里常数 $\mu_1 > r$ 表示股票的期望收益率, $\sigma_1 > 0$ 表示股票的波动率, 函数 $f(t)$ 使得 DEV 模型 (2.1) 在 $[0, T]$ 上的解存在、唯一且有界.

注 2.1 在 DEV 模型中可令动态函数 $f(t) = a + Ae^{bt} \sin(\omega t)$ (参见文献 [20]), 这可以描述在发生崩溃的情形下, 股价急剧下跌而波动率急剧上升这一现象. 如果 $f(t) = 2\beta + 2$ 为常数, 则 DEV 模型退变为 CEV 模型.

记 t 时刻养老金参与者的财富为 $\hat{X}_t$, 并假设其投资于风险资产的量为 $\hat{\pi}_t$, 则投资于无风险资产的量为 $\hat{X}_t - \hat{\pi}_t$. 此外, 养老金参与者在退休时间 T 之前需要连续地向资金账户缴费, 假设缴费率为固定常数 k . 因此, 财富的动态过程 $\hat{X}_t$ 表示为

$$d\hat{X}_t = (r\hat{X}_t + k)dt + \hat{\pi}_t(\mu_1 - r)dt + \hat{\pi}_t\theta(t, S_t)dW_t^1, \quad (2.2)$$

这里 $\theta(t, S_t) := \sigma_1 S_t^{\frac{f(t)}{2}-1}$. 若 $\hat{\pi}_t$ ($t \in [0, T]$) 是 $\mathcal{F}_t$ 循序可测的且满足 $E[\int_0^T \hat{\pi}_t^2 \theta^2(t, S_t) dt] < \infty$, 同时微分方程 (2.2) 存在一个唯一的强解, 则称 $\hat{\pi}_t$ 是可容许策略. $\hat{\Pi}$ 表示所有可容许策略的集合.

此外, 我们还考虑通货膨胀风险. 通常, 我们用居民消费价格指数 (consumer price index, CPI) 来刻画通货膨胀, 并假设其服从如下随机微分方程:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2, \quad (2.3)$$

这里 $\mu_2 > 0$ 表示通货膨胀的期望增长率, $\sigma_2 > 0$ 表示通货膨胀的波动率.

DC 型养老金参加者的目标是最大化终端时刻相对财富 $\hat{X}_T/P_T$ 的期望效用, 即

$$\sup_{\hat{\pi} \in \hat{\Pi}} \mathbb{E} \left[U \left(\frac{\hat{X}_T}{P_T} \right) \right], \quad (2.4)$$

这里 $\hat{X}_t$ 和 P_t 分别由 (2.2) 和 (2.3) 给出. 效用函数 U 在 $[0, +\infty)$ 上是连续的、递增的和凹的 (但不一定严格递增或严格凹).

对于效用最大化问题 (2.4), 不能直接应用对偶控制方法去求解. 因此, 我们将最大化问题 (2.4) 转化为一个等价形式, 从而可以通过对偶控制方法进行求解. 注意到 $k > 0$, 财富过程是非自融资的, 因而先将财富过程 (2.2) 转化为自融资过程. 定义辅助过程

$$D(t) := k \int_t^T e^{-r(s-t)} ds,$$

同时令

$$\tilde{X}_t := \hat{X}_t + D(t), \quad \pi_t := \frac{\hat{\pi}_t}{\tilde{X}_t}, \quad X_t := \frac{\tilde{X}_t}{P_t}.$$

应用 Itô 公式, 财富过程 (2.2) 可以改写为

$$dX_t = \bar{r}X_t dt + X_t \pi_t \bar{\theta}(t, S_t) dt + X_t \pi_t \theta(t, S_t) dW_t^1 - X_t \sigma_2 dW_t^2, \quad (2.5)$$

这里 $\bar{r} := r - \mu_2 + \sigma_2^2$, $\bar{\theta}(t, S_t) := \mu_1 - r - \rho \sigma_2 \theta(t, S_t)$.

很显然, π 也是可容许策略, 它的集合用 Π 表示. 注意到 $X_T = \hat{X}_T/P_T$, 那么最大化期望效用问题 (2.4) 等价于

$$\sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}[U(X_T)], \quad (2.6)$$

这里 X_t 满足 (2.5).

定义值函数 $V(t, s, x)$ 如下:

$$V(t, s, x) := \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}[U(X_T) \mid S_t = s, X_t = x], \quad (2.7)$$

终端条件为

$$V(T, s, x) = U(x), \quad x \geq 0. \quad (2.8)$$

基于本文模型的设定, 最大化期望效用问题 (2.7) 很难得到显式解. 因此, 我们尝试着去求解其近似解. 接下来, 推导最大化期望效用问题 (2.7) 的 HJB 方程并给出验证结果, 然后通过对偶控制 Monte Carlo 方法求解值函数 V 的上界和下界以及最优策略的近似解.

3 HJB 方程和验证结果

本节推导效用最大化问题 (2.7) 的 HJB 方程并给出验证结果. 利用动态规划原理, 我们推导出效用最大化问题 (2.7) 的 HJB 方程如下:

$$V_t + s\mu_1 V_s + \frac{1}{2}\theta(t, s)^2 s^2 V_{ss} + x\bar{r}V_x + \frac{1}{2}\sigma_2^2 x^2 V_{xx} - \rho\theta(t, s)\sigma_2 x s V_{sx} + \sup_{\pi \in \Pi} H^\pi(t, s, x; V) = 0, \quad (3.1)$$

这里 V_t 、 V_s 、 V_{ss} 、 V_x 、 V_{xx} 和 V_{sx} 分别表示关于时间 t 、财富 x 和股票 s 的一阶或二阶偏导, 以及

$$H^\pi(t, s, x; \psi) := \pi \bar{\theta}(t, s) x \psi_x + \frac{1}{2} (\theta^2(t, s) \pi^2 - 2\rho\theta(t, s)\pi\sigma_2) x^2 \psi_{xx} + \theta^2(t, s) \pi x s \psi_{sx}.$$

应用一阶条件, 可以得到

$$\pi_t^* = \frac{\rho\sigma_2}{\theta(t, s)} - \frac{\bar{\theta}(t, s)V_x}{x\theta^2(t, s)V_{xx}} - \frac{sV_{sx}}{xV_{xx}}. \quad (3.2)$$

(3.2) 中 $\frac{\rho\sigma_2}{\theta(t, s)}$ 和 $\frac{sV_{sx}}{xV_{xx}}$ 这两项为修正因子, $\frac{\rho\sigma_2}{\theta(t, s)}$ 表明最优策略受通货膨胀的影响, 而 $\frac{\bar{\theta}(t, s)V_x}{x\theta^2(t, s)V_{xx}}$ 与 GBM 模型下得到的最优策略的形式类似. 注意到, 这 3 个指标都受到股价 S 的影响. 将 (3.2) 代入 (3.1), 则可得如下非线性偏微分方程:

$$\begin{aligned} V_t + s\mu_1 V_s + \frac{1}{2}\theta^2(t, s)s^2 V_{ss} + x\bar{r}V_x + \frac{1}{2}\sigma_2^2 x^2 V_{xx} \\ - \rho\theta(t, s)\sigma_2 x s V_{sx} - \frac{[\rho\sigma_2\theta(t, s)xV_{xx} - \bar{\theta}(t, s)V_x - \theta^2(t, s)sV_{sx}]^2}{2\theta^2(t, s)V_{xx}} = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

边界条件满足 (2.8).

下面给出的验证结果, 表明候选值函数 V 确实是最优策略下 HJB 方程的解. 为了完成验证结果的证明, 我们需要引入以下引理.

引理 3.1 对任意初值条件 $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, 如果 $X_t^{t_0, x_0}$ (简记为 X_t) 是方程 (2.5) 的唯一强解, 则

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [t_0, T]} [X_t^{t_0, x_0}]^2 \right] < \infty. \quad (3.4)$$

证明 见附录 A. □

定理 3.1 假设 S_t 和 X_t 分别由 (2.1) 和 (2.5) 给出, 且 $G(t, s, x)$ 是定义在 $C^{1,2,2}(\mathfrak{R})$ 和 $\mathfrak{R} := [0, T] \times (0, \infty) \times [0, \infty)$ 上满足二次增长条件的函数, 即存在正的常数 C 使得

$$|G(t, s, x)| \leq C(1 + |s|^2 + |x|^2), \quad \forall (t, s, x) \in \mathfrak{R}.$$

此外, 假设

$$G_t + s\mu_1 G_s + \frac{1}{2}\theta(t, s)^2 s^2 G_{ss} + x\bar{r}G_x + \frac{1}{2}\sigma_2^2 x^2 G_{xx} - \rho\theta(t, s)\sigma_2 x s G_{sx} + \sup_{\pi \in \Pi} H^\pi(t, s, x; G) \leq 0, \quad (3.5)$$

以及

$$G(T, s, x) \geq U(x). \quad (3.6)$$

那么, 对任意的 $(t, s, x) \in \mathfrak{R}$, 都有 $G(t, s, x) \geq V(t, s, x)$. 如果存在策略 $\pi_t^* \in \Pi$ 使得

$$G_t + s\mu_1 G_s + \frac{1}{2}\theta(t, s)^2 s^2 G_{ss} + x\bar{r}G_x + \frac{1}{2}\sigma_2^2 x^2 G_{xx} - \rho\theta(t, s)\sigma_2 x s G_{sx} + H^{\pi^*}(t, s, x; G) = 0, \quad (3.7)$$

终端条件为 $G(T, s, x) = U(x)$, 且当 $\pi = \pi^*$ 时财富过程 (2.5) 有唯一的强解, 则 $G(t, s, x) = V(t, s, x)$, π_t^* 为最优策略.

证明 见附录 B. □

4 最优策略的近似解

定义 U 的凸对偶如下:

$$\widehat{U}(y) = \sup_{x \geq 0} [U(x) - xy], \quad (4.1)$$

这里 y 表示 x 的对偶变量. $\widehat{U}$ 在 $[0, \infty)$ 上是连续、单调递减且凸的. 下面找对偶过程. 假设对偶过程 Y_t 满足如下随机微分方程:

$$dY_t = Y_t(\alpha_t dt + \gamma_t dW_t^1 + \xi_t dW_t^2).$$

对 $X_t Y_t$ 应用 Itô 引理可以得到

$$\begin{aligned} d(X_t Y_t) &= X_t Y_t [\alpha_t + \bar{r} + \rho Q(t, s) \sigma_2 - (1 - \rho^2) \sigma_2 \xi_t] dt \\ &\quad + X_t Y_t \pi_t [\gamma_t + Q(t, s) + \rho \xi_t] dt + \text{鞅}, \end{aligned}$$

这里 $Q(t, s) := \frac{\bar{\theta}(t, s)}{\theta(t, s)}$. 对任意的控制 π , 为了使 $X_T Y_T$ 是一个上鞅, 我们有

$$\alpha_t \leq -\bar{r} - \rho Q(t, s) \sigma_2 + (1 - \rho^2) \sigma_2 \xi_t, \quad \gamma_t = -Q(t, s) - \rho \xi_t.$$

进一步, 由于 $\widehat{U}$ 是单调递减的凸函数, 因此一定有

$$\alpha_t = -\bar{r} - \rho Q(t, s) \sigma_2 + (1 - \rho^2) \sigma_2 \xi_t,$$

那么 $X_T Y_T$ 是一个鞅. 因此, 对偶过程可改写为

$$dY_t = Y_t [-(\bar{r} + \rho Q(t, s) \sigma_2 - (1 - \rho^2) \sigma_2 \xi_t) dt - (Q(t, s) + \rho \xi_t) dW_t^1 + \xi_t dW_t^2], \quad (4.2)$$

这里 ξ 是对偶控制过程. 类似文献 [26], 本文给出可容许对偶控制的定义. 若 ξ_t ($t \in [0, T]$) 是 $\mathcal{F}_t$ 循序可测的且满足 $E[\int_0^T \xi_t^2 dt] < \infty$, 则称 ξ_t 是可容许的. 对偶控制的集合用 $\mathcal{S}$ 表示. 此外, 对偶过程 (4.2) 在 T 的解可表示为

$$Y_T = y \exp(A_{t,T}),$$

这里 $Y_t = y$,

$$\begin{aligned} A_{t,T} &:= - \int_t^T \left[\bar{r} + \rho Q(u, s) \sigma_2 + \frac{1}{2} Q^2(u, s) + \frac{1}{2} (1 - \rho^2) (\xi_u^2 - 2 \sigma_2 \xi_u) \right] du \\ &\quad - \int_t^T [Q(u, s) + \rho \xi_u] dW_u^1 + \int_t^T \xi_u dW_u^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

根据对偶关系的定义, 显然有

$$U(X_T) \leq \widehat{U}(Y_T) + X_T Y_T,$$

故而可以得到如下约束关系:

$$\sup_{\pi} E[U(X_T)] \leq \inf_y \left(\inf_{\xi} (E[\widehat{U}(Y_T)] + xy) \right).$$

定义对偶值函数

$$\widehat{V}(t, s, y) = \inf_{\xi} E[\widehat{U}(Y_T) | S_t = s, Y_t = y], \quad (4.4)$$

其边界条件为

$$\widehat{V}(T, s, y) = \widehat{U}(y).$$

应用动态规划原理, 可以得到对偶 HJB 方程

$$\begin{aligned} \widehat{V}_t + s\mu_1\widehat{V}_s + \frac{1}{2}\theta^2(t, s)s^2\widehat{V}_{ss} - [\bar{r} + \rho Q(t, s)\sigma_2]y\widehat{V}_y + \frac{1}{2}Q^2(t, s)y^2\widehat{V}_{yy} \\ - \bar{\theta}(t, s)sy\widehat{V}_{sy} + \inf_{\xi} \left\{ (1 - \rho^2)\sigma_2\xi y\widehat{V}_y + \frac{1}{2}(1 - \rho^2)\xi^2 y^2\widehat{V}_{yy} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

为了使得 (4.5) 达到最小值, 我们有

$$\xi = -\frac{\sigma_2\widehat{V}_y}{y\widehat{V}_{yy}}. \quad (4.6)$$

将 (4.6) 代入 (4.5), 可以得到

$$\begin{aligned} \widehat{V}_t + s\mu_1\widehat{V}_s + \frac{1}{2}\theta^2(t, s)s^2\widehat{V}_{ss} - [\bar{r} + \rho Q(t, s)\sigma_2]y\widehat{V}_y \\ + \frac{1}{2}Q^2(t, s)y^2\widehat{V}_{yy} - \bar{\theta}(t, s)sy\widehat{V}_{sy} - \frac{1}{2}(1 - \rho^2)\frac{\sigma_2^2\widehat{V}_y^2}{\widehat{V}_{yy}} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

定理 4.1 定义

$$\widetilde{V}(t, s, x) = \inf_{y \geq 0} [\widehat{V}(t, s, y) + xy].$$

令 $y^* = y(t, s, x)$ 为方程

$$\widehat{V}_y(t, s, y) + x = 0 \quad (4.8)$$

的解, 则有 $\widetilde{V}(t, s, x) = \widehat{V}(t, s, y^*) + xy^*$, 同时 $\widetilde{V}$ 是非线性偏微分方程 (3.3) 的一个解. 此外, 最优策略满足

$$\pi_t^* = \frac{\rho\sigma_2}{\theta(t, s)} - \frac{\bar{\theta}(t, s)y^*\widehat{V}_{y^*y^*}}{\theta^2(t, s)\widehat{V}_{y^*}} + \frac{s\widehat{V}_{sy^*}}{\widehat{V}_{y^*}}. \quad (4.9)$$

证明 见附录 C. □

注 4.1 我们已经推导出了对偶最优化问题 (4.4) 的 HJB 方程 (4.5) 和对应的非线性偏微分方程 (4.7). 类似定理 3.1, 我们也可以得到对偶问题的验证结果.

定理 4.1 表明, 如果对偶控制满足 (4.6), 则不存在对偶误差. 如果我们可以求解对偶偏微分方程 (4.7), 那么通过定理 4.1 很快就可以求解最优化问题 (2.7). 然而, 直接获得 (4.7) 的显式解是几乎不可能的, 这促使我们用对偶控制 ξ 的逼近来求解值函数 V 的上界和下界. 根据 (2.7)、(4.1) 和 (4.4) 可知, 对任意的对偶控制 ξ , 有如下不等约束关系:

$$\sup_{\pi} E[U(X_T)] \leq \inf_y \left(\inf_{\xi} E[\widehat{U}(Y_T)] + xy \right) \leq \inf_y (E[\widehat{U}(Y_T)] + xy). \quad (4.10)$$

对每个固定的 ξ , 定义

$$Z(t, s, y) = E[\widehat{U}(Y_T) \mid S_t = s, Y_t = y], \quad (4.11)$$

则 $Z(t, s, y)$ 是值函数 V 的一个上界且可以通过 Monte Carlo 方法计算得到. 注意到 $Z(t, s, y)$ 的取值依赖对偶控制 ξ 的选择. 因此, 对固定的 t 和 s , 定义 $Z(t, s, y)$ 的共轭函数如下:

$$\bar{V}(t, s, x) = \inf_y [Z(t, s, y) + xy]. \quad (4.12)$$

基于不等约束关系 (4.10), 可以构造值函数 V 的上界和下界.

定理 4.2 如果 $\bar{V}(t, s, x)$ 满足 (4.12), 则由 (2.7) 所定义的值函数 V 满足

$$V(t, s, x) \leq \inf_{\xi \in \mathcal{S}} \bar{V}(t, s, x). \quad (4.13)$$

接下来, 令 $y^* = y(t, s, x; \xi)$ 表示方程

$$Z_y(t, s, y) + x = 0 \quad (4.14)$$

的解, 定义反馈控制 π 如下:

$$\bar{\pi}_t = \frac{\rho\sigma_2}{\theta(t, s)} - \frac{\bar{\theta}(t, s)y^*Z_{y^*y^*}}{\theta^2(t, s)Z_{y^*}} + \frac{sZ_{sy^*}}{Z_{y^*}}. \quad (4.15)$$

进一步, 对 $t \in [0, T]$ 和反馈控制 $\pi_t = \bar{\pi}(t, S_t, \bar{X}_t)$, 假设 $\bar{X}$ 是随机微分方程 (2.5) 的一个解, 定义

$$\underline{V}(t, s, x) = E[U(\bar{X}_T)],$$

于是有

$$V(t, s, x) \geq \sup_{\xi \in \mathcal{S}} \underline{V}(t, s, x). \quad (4.16)$$

证明 直接应用 (4.10) 及 $\bar{V}(t, s, x)$ 和 $\underline{V}(t, s, x)$ 的定义可以得到 (4.13) 和 (4.16). 证毕. $\square$

如果可以选择合适的 ξ 使得上界和下界的差值非常小, 那么可以认为对应的反馈控制 π_t 能够很好地逼近最优策略 π_t^* . 在进行数值算例分析之前, 我们需要生成对偶控制 ξ 以及对股票价格过程 (2.1)、财富过程 (2.5) 和对偶过程 (4.2) 进行离散. 假设对偶控制 ξ 是集合 $\mathcal{S}$ 上的一个常数, 对于每一个产生的 ξ , 可以计算得到值函数的上界和下界, 然后选择最小的上界和最大的下界.

注意到对于固定的对偶控制 ξ , 计算 (4.11) 正如同计算期权定价一样, 我们可以通过 Monte Carlo 方法进行高效的计算. 因此, 对偶上界 (4.12) 的计算同样可以实现. 称使用 Monte Carlo 计算定理 4.2 中的紧上界 $\inf_{\xi \in \mathcal{S}} \bar{V}(t, s, x)$ 和紧下界 $\sup_{\xi \in \mathcal{S}} \underline{V}(t, s, x)$ 为对偶控制 Monte Carlo 方法. 对偶控制 Monte Carlo 方法的具体实施步骤与文献 [30] 类似, 这里不详细说明.

5 数值算例

本节通过数值算例验证对偶控制 Monte Carlo 方法的准确性, 并分析不同风险偏好和股票模型下 DC 型养老金参与者投资决策的变化.

5.1 CRRA 效用

我们使用对偶控制 Monte Carlo 方法研究 DC 型养老金的最优投资问题的主要想法是, 在计算紧下界时反馈控制 $\bar{\pi}$ (参见定理 4.2 中的 (4.15)) 可以很好地逼近最优策略. 但是, 这一方法的缺点是, 无法从理论上证明. 因此, 考虑如下特殊情形来说明对偶控制 Monte Carlo 方法的准确性和可行性.

考虑 CRRA 效用函数

$$U(x) = \frac{x^p}{p}, \quad 0 < p < 1, \quad (5.1)$$

其为 SAHARA 效用函数的一个特例. 此外, 令股票模型 (2.1) 中的动态函数 $f(t) = 2\beta + 2$ 为常数以及通货膨胀的波动率 $\sigma_2 = 0$. 考虑这一特殊情形, 我们可以得到值函数 (2.7) 和最优策略 (3.2) 的显式解. 此外, 在 CRRA 效用函数下, 我们给出值函数的上界和下界的具体计算表达式如下.

命题 5.1 在 CRRA 效用函数 (5.1) 下, 值函数的紧上界为

$$\inf_{\xi \in \mathcal{S}} \bar{V}(t, s, x) = \inf_{\xi \in \mathcal{S}} \left\{ \frac{1-p}{p} (y^*)^{\frac{p}{p-1}} \nu(t, s) + x y^* \right\}, \quad (5.2)$$

紧下界为

$$\sup_{\xi \in \mathcal{S}} \underline{V}(t, s, x) = \sup_{\xi \in \mathcal{S}} \mathbb{E}[U(\bar{X}_T)], \quad (5.3)$$

这里 $\bar{X}_T$ 的产生过程如下:

$$\bar{X}_{t+h} = \bar{X}_t + \bar{r} \bar{X}_t h + \bar{X}_t \bar{\pi}_t \bar{\theta}(t, s) h + \bar{X}_t \bar{\pi}_t \theta(t, s) \sqrt{h} Z_1 - \bar{X}_t \sigma_2 \sqrt{h} (\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2),$$

其中反馈控制 $\bar{\pi}_t$ 如下给出:

$$\bar{\pi}_t = \frac{\rho \sigma_2}{\theta(t, s)} + \frac{\bar{\theta}(t, s) y^*}{(p-1) \theta^2(t, s) Z_{y^*}} (y^*)^{\frac{2-p}{p-1}} \nu(t, s) - \frac{s}{Z_{y^*}} \left[(y^*)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\nu(t, s+h) - \nu(t, s-h)}{2h} \right],$$

这里

$$\nu(t, s) = \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{p}{p-1} A_{t,T} \right) \middle| S_t = s \right], \quad y^* = \left(\frac{x}{\nu(t, s)} \right)^{p-1}.$$

证明 见附录 D. □

例 5.1 这个例子主要用来验证定理 4.2 的结果, 基本参数赋值如下给定: 在股票模型 (2.1) 中, 令初值 $s = 5$, $f(t) = 2\beta + 2$, $\mu_1 = 0.1309$, $\sigma_1 = 9.1771$, $\beta = -2.0131$, 无风险利率 $r = 0.0328$, 投资期限 $T = 0.8333$ 年. 这些值由实证估计得到 (参见文献 [20]). 在财富过程 (2.2) 中, 令缴费率 $k = 0.2$, 财富初值 $\hat{x}_0 = 1$. 在通货膨胀过程 (2.3) 中, 令 $\mu_2 = 0.08$, $\sigma_2 = 0$, 初值 $p_0 = 1$. 在转换的财富过程 (2.5) 中, $\bar{r} := r - \mu_2 + \sigma_2^2 = -0.0472$, $x_0 = (\hat{x}_0 + k \int_0^T e^{-rs} ds) / p_0 = 1.1644$, Brown 运动 W_t^1 和 W_t^2 的相关系数 $\rho = 0.5$. 此外, 通过试错可令 $\mathcal{S} = [-1, 1]$, 控制 ξ 以均匀步长 0.02 从 -1 到 1 取值. Monte Carlo 模拟的路径数为 5,000. 在 CRRA 效用函数中, 分别取 p 为 0.1、0.3 和 0.5 并在这 3 种情形下计算值函数和最优策略的数值解和真解. 值函数的上界、下界和最优策略分别由 (5.2)–(5.4) 计算得到. 令 $\pi_t^* - \bar{\pi}_t$ 和 $\frac{\pi_t^* - \bar{\pi}_t}{\pi_t^*}$ 分别表示最优策略的误差和相对误差. 数值结果分别由表 1、2 及图 1 和 2 给出. “真解”这一列的计算公式来自文献 [16]. 此外, 图 3 给出数值解和真解下终端时刻财富的分布图像.

表 1 Monte Carlo 方法下值函数的上界、下界和真解 (exact) 比较 (例 5.1)

p	下界	上界	真解	误差	相对误差
0.1	10.0486	10.0514	10.0498	2.8E-4	2.9E-4
0.3	3.4013	3.4046	3.4042	3.3E-3	9.7E-4
0.5	2.1116	2.1190	2.1172	7.4E-3	3.5E-3

表 2 Monte Carlo 方法最优策略 (MC) 与真解 (exact) 比较 (例 5.1)

p	MC	真解	误差	相对误差
0.1	0.8451	0.8454	3.0E-4	2.6E-3
0.3	1.1669	1.1640	2.9E-3	2.5E-3
0.5	1.8787	1.8536	2.1E-2	1.4E-2

(a)

(b)

(c)

(d)

图 1 (网络版彩图) $x = 1.1644$ 下最优策略 π 的三维图像 (例 5.1). (a) 真解; (b) 近似解; (c) 误差; (d) 相对误差

图 2 (网络版彩图) $s = 5$ 下最优策略 π 的三维图像 (例 5.1). (a) 真解; (b) 近似解; (c) 误差; (d) 相对误差

正如表 1 所示, 我们可以看出最小上界与最大下界的差值非常小, 且真解落在这两者之间. 这些结果与定理 4.2 的理论结果 (见 (4.13) 和 (4.16)) 是完全吻合的. 这表明对偶控制 Monte Carlo 方法是可靠且精确的.

表 2、图 1 和 2 均给出了最优策略的计算结果. 表 2 给出了 $t = 0$ 时刻在不同 p 值下真解和数值解的计算结果, 从中可以看出数值解与真解的误差和相对误差都很小. 图 1 和 2 分别描绘了 $p = 0.3$ 时不同财富值和股票价格下真解与数值解之间的误差和相对误差随时间变化的三维图像. 可以看出数值解与真解的误差或相对误差同样很小, 这表明数值解可以很好地逼近真解.

图 3 描绘了真解和数值解下终端财富的分布图像, 可以看出在两种情形下得到终端财富的分布图像几乎完全相同. 此外, 通过计算可知, 真解下终端财富的标准差为 1.23905 而数值解下得到的标准差为 1.23613. 这进一步验证了 Monte Carlo 算法的精确性.

注 5.1 从养老金投资的角度看, 投资期限一般很长, 如 20 或 40 年, 这指退休之前积累阶段的时长. 但是, 我们考虑 DEV 模型, 该模型主要是用于刻画市场发生崩溃的短期内股票的波动率会发生剧烈变化这一现象. 我们主要考虑 DC 养老金参与者在一种情形下如何制定最佳的投资策略. 因此, 我们可以选择一个很小的投资周期 $T = 0.8333$, 参见文献 [20].

CEV 模型是 GBM 模型的一个拓展, 它的优势是, 可以描述市场中股票价格波动率微笑这一特征. 但是, CEV 模型的缺点是, 它不能反映市场崩溃等现象发生时股票价格真实的变化情形, 而 DEV 模型是可以的. 下面说明在 CEV 模型和 DEV 模型下投资者的决策随时间的变化情形.

例 5.2 这个例子用于描绘 CEV 模型和 DEV 模型下投资者决策的变化情形, 参见文献 [20]. DEV 模型的参数如下给定: $\mu_1 = 0.1309$, $\sigma_1 = 2.0861$, $a = -0.2832$, $A = 27.4763$, $b = -312.84$, $\omega = 126.036$. 通货膨胀的波动率 $\sigma_2 = 0.25$, $\bar{r} := r - \mu_2 + \sigma_2^2 = 0.0153$. 其他需要用到的参数取值与例 5.1 中给定的相同. 在 CRRA 效用函数下分别取 p 为 0.3、0.5 和 0.7, 我们绘制图 4. 图 4 分别描绘了在 CEV 模型和 DEV 模型下养老金参与者最优投资策略随时间的变化情形. 可以看出, 在 CEV 和 DEV 股票市场中最优投资策略都随着时间的推移而减少. 在这两个股票市场中, 风险资产的投资比例除了刚开始很短的时间以外几乎相同. 但是, DEV 模型下的最佳策略 π_t 在开始时急剧下降, 然后

图 3 (网络版彩图) 真解和数值解下终端财富的分布 ($x = 1.164$, $s = 5$, 例 5.1). (a) 真解下 X_T 的分布; (b) 数值解下 $\bar{X}_T$ 的分布

图 4 (网络版彩图) DEV 模型和 CEV 模型下最优策略的比较 (例 5.2). (a) CEV 模型下投资策略的变化; (b) DEV 模型下投资策略的变化

迅速上升并最终稳定在一个新水平. 这种现象表明, 在市场崩溃这段时间内, 投资者应该先恐慌抛售股票然后立即遵从其最初的投资偏好.

5.2 SAHARA 效用

本小节研究 SAHARA 效用函数下养老金参与者的最优投资. 这一效用函数由 Chen 等^[7]首次提出并加以探讨, 也可参见文献 [8]. SAHARA 效用函数允许绝对风险厌恶是非单调的, 可用于描述在极低的财富下投资者可能会减少风险规避, 这与经济直觉相一致. SAHARA 效用函数的定义如下: 若 U 在 $\mathbb{R}$ 上是连续、递增、凹的效用函数且满足

$$-\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma^2 + (x-d)^2}}, \quad (5.4)$$

这里 $\alpha, \gamma > 0$ 分别表示风险厌恶和尺度参数, 非负常数 d 表示财富门槛, 则称效用函数 U 是 SAHARA 效用. 不失一般性, 假定 $d = 0$. 由 (5.4), 有

$$U'(x) = c_1(x + \sqrt{x^2 + \gamma^2})^\alpha,$$

则有 $U(x) = c_1 g(x) + c_2$, 这里 $c_1 > 0$, c_2 是给定的常数, $g(x)$ 定义为

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha^2 - 1}(x + \sqrt{\gamma^2 + x^2})^{-\alpha}(x + \alpha\sqrt{\gamma^2 + x^2}), & \alpha \neq 1, \\ \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{\gamma^2 + x^2}) + \frac{1}{2} \gamma^{-2} x(\sqrt{\gamma^2 + x^2} - x), & \alpha = 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

不失一般性, 假设 $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, 即 $U(x) = g(x)$, 这里 g 由 (5.5) 给定.

注 5.2 如果 $\gamma \rightarrow 0$, $\alpha \in (0, 1)$, 那么 SAHARA 可以退化为 CRRA 效用函数. 如果 $\alpha = \eta\gamma$, $\gamma \rightarrow \infty$, 那么 SAHARA 可以退化为绝对风险厌恶参数为 η 的指数效用.

接下来引入 SAHARA 效用函数的相对谨慎度 (relative prudence) 函数

$$\text{RP}(x) := -\frac{xU'''(x)}{U''(x)} = \frac{\alpha x \sqrt{x^2 + \gamma^2} + x}{x^2 + \gamma^2}, \quad (5.6)$$

其特性可以刻画“当财富减少时投资于风险资产的比例增加”这一情形 (如图 5). SAHARA 效用函数的相对风险厌恶函数定义如下:

$$\text{RRA}(x) := -\frac{xU''(x)}{U'(x)} = \frac{\alpha x}{\sqrt{\gamma^2 + x^2}}, \quad (5.7)$$

它随财富单调增加并收敛于 α . α 越大或 γ 越小, 则 $\text{RRA}(x)$ 越大, 即风险资产的投资比例与风险厌恶系数成反比, 与尺度参数成正比. 最后, 我们重点研究 SAHARA 效用下最优投资策略的变化情形. 像 CRRA 效用函数一样, 我们可以得到 SAHARA 效用函数下值函数的上界、下界和最优策略 π_t 的具体表达式.

命题 5.2 考虑 SAHARA 效用函数 (5.5) 以及股票价格服从 DEV 模型 (2.1). 当 $\alpha \neq 1$ 时, 值函数的紧上界为

$$\inf_{\xi \in \mathcal{S}} \bar{V}(t, s, x) = \inf_{\xi \in \mathcal{S}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma^2 (y^*)^{1+\frac{1}{\alpha}} H(t, s)}{1 + \frac{1}{\alpha}} - \frac{(y^*)^{1-\frac{1}{\alpha}} J(t, s)}{1 - \frac{1}{\alpha}} \right] + xy^* \right\},$$

图 5 (网络版彩图) SAHARA 效用的相对谨慎度随财富的变化

最优策略满足

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_t = & \frac{\rho\sigma_2}{\theta(t,s)} - \frac{\bar{\theta}(t,s)y^*}{2\theta^2(t,s)Z_{y^*}} \left[\frac{\gamma^2}{\alpha} (y^*)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} H(t,s) + \frac{1}{\alpha} (y^*)^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} J(t,s) \right] \\ & + \frac{s}{2Z_{y^*}} \left[\gamma^2 (y^*)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{H(t,s+h) - H(t,s-h)}{2h} - (y^*)^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{J(t,s+h) - J(t,s-h)}{2h} \right], \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} y^* &= \left(\frac{-x + \sqrt{x^2 + \gamma^2 J(t,s) H(t,s)}}{\gamma^2 H(t,s)} \right)^\alpha, \\ H(t,s) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) A_{t,T} \right) \middle| S_t = s \right], \\ J(t,s) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) A_{t,T} \right) \middle| S_t = s \right], \end{aligned}$$

$A_{t,T}$ 由 (4.3) 给定.

当 $\alpha = 1$ 时, 值函数的紧上界为

$$\inf_{\xi \in \mathcal{S}} \bar{V}(t,s,x) = \inf_{\xi \in \mathcal{S}} \left\{ \frac{1}{4} [\gamma^2 (y^*)^2 K(t,s) - 1] - \frac{1}{2} \ln y^* - \frac{1}{2} M(t,s) + xy^* \right\},$$

最优策略满足

$$\bar{\pi}_t = \frac{\rho\sigma_2}{\theta(t,s)} - \frac{\bar{\theta}(t,s)y^*}{2\theta^2(t,s)Z_{y^*}} [\gamma^2 K(t,s) + (y^*)^{-2}] + \frac{s}{2Z_{y^*}} \left[\gamma^2 y^* \frac{K(t,s+h) - K(t,s-h)}{2h} \right],$$

这里

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{-x + \sqrt{x^2 + \gamma^2 K(t,s)}}{\gamma^2 K(t,s)}, \\ K(t,s) &= \mathbb{E}[\exp(2A_{t,T}) | S_t = s], \\ M(t,s) &= \mathbb{E}[A_{t,T} | S_t = s]. \end{aligned}$$

当 $\alpha = 1$ 或者 $\alpha \neq 1$ 时, 值函数的紧下界的计算与命题 5.1 类似.

证明 根据 (4.1), 可以得到 SAHARA 效用函数的凸对偶如下:

$$\hat{U}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma^2 y^{1+\frac{1}{\alpha}}}{1+\frac{1}{\alpha}} - \frac{y^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}} \right), & \alpha \neq 1, \\ \frac{1}{4} (\gamma^2 y^2 - 1) - \frac{1}{2} \ln y, & \alpha = 1. \end{cases}$$

其余部分的证明与命题 5.1 类似. □

下面通过如下例子给出敏感性分析.

例 5.3 这个例子主要为了分析 DEV 模型和 SAHARA 效用下养老金参与者投资决策的变化情形. 相关参数赋值如下: 对 SAHARA 效用, 取 $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, 通货膨胀的波动率取为 $\sigma_2 = 0.25$, 于是计算得到 $\bar{r} = 0.0153$, DEV 模型的参数与例 5.2 给定的相同, 其他的参数由例 5.1 给出. 我们绘制了图 6–8. 图 6 描述了在 $s = 5$ 的情形下最优策略随时间和财富初值变化的三维图像. 图 7 和 8 描述了不同参数下最优投资策略随时间的变化.

图 6 展示了 DEV 模型下 SAHARA 效用下投资决策的变化. 我们可以看到, 风险资产的投资比例在初始时刻附近迅速下降, 然后又趋于稳定. 这与例 5.2 中的 CRRA 效用下投资决策的变化形式相同. 此外, 对于 SAHARA 效用而言, 投资者的相对谨慎函数 $RP(x)$ 和渐近相对风险厌恶函数 $RRA(x)$ 随着财富的增加而增加, 并分别收敛于常数 α 和 $\alpha + 1$. 也就是说, 具有 SAHARA 效用的投资者的绝对风险偏好随财富的增加而趋于稳定. 因此, 对于 SAHARA 风险偏好的投资者而言, 他(她)对风险资产的投资比例随着财富的增加而逐渐减少并趋于稳定. 这些现象也很好地反映在图 6 中.

图 7 描述了通货膨胀期望增长率 μ_2 、相关系数 ρ 和缴费率 k 对最优策略的影响. 在财富过程 (2.5) 中, μ_2 影响平均保证收益, ρ 影响风险溢价. 如果 μ_2 变大, 投资者将投资更多的财富于风险资产以获得更多的财富效用. 然而, ρ 越大意味着投资者需要承担更多来自于通货膨胀的风险, 这使得投资者投资于风险资产的比例降低从而达到规避风险的目的. 因此, 最优投资策略随着 μ_2 的增加而增加, 但随着 ρ 的增加而减少. 这些表明通货膨胀在很大程度上影响着投资者投资决策的制定. 国内生产总值 (gross domestic product, GDP) 增长过快导致财富贬值, 投资者将倾向于风险资产的投资. 相反, GDP 波动过大使投资者更倾向于无风险资产的投资. 缴款率 k 是 DC 型养老金投资者需考虑的一个重要因素. 本文将养老金的最优投资问题转化为经典的最优投资问题. 注意到, k 对投资决策的影响间

图 6 (网络版彩图) DEV 模型和 SAHARA 效用函数下最优策略变化的三维图像 (例 5.3)

图 7 (网络版彩图) CEV 模型和 SAHARA 效用下参数 μ_2 、 ρ 和 k 对投资策略的影响 (例 5.3). (a) μ_2 对 π_t 的影响; (b) ρ 对 π_t 的影响; (c) k 对 π_t 的影响

图 8 (网络版彩图) CEV 模型和 SAHARA 效用下参数 α 和 γ 对投资策略的影响 (例 5.3). (a) α 对 π_t 的影响; (b) γ 对 π_t 的影响

接反映在转换后的财富过程 (2.5) 中. 很显然, 财富 x 随着 k 的增加而增加, 因此, k 对投资决策的影响与财富相同. 缴费率的提高意味着养老金参与者初始财富更多, 因而投资者在制定投资计划时将变得更加谨慎, 其旨在追求稳定的收益.

图 8 展示了 SARAHA 效用函数的风险厌恶参数 α 和尺度参数 γ 对最优策略的影响. 从 (5.6) 和 (5.7) 可以看出, 随着 α 的增加或 γ 的减少, 投资者越来越保守. 因此, 风险资产的投资比例与 α 成反比, 而与 γ 成正比. 这些解释在图 8 中得到很好的反映.

6 总结

本文应用对偶控制 Monte Carlo 方法研究了不完全金融市场中 DC 型养老金的最优投资策略. 本文假设金融市场中存在两个风险源: 一个由股票价格的 DEV 模型产生, 另一个由通货膨胀的 GBM 模型产生. 通常这两个风险具有相关性, 对于相关系数 $\rho \neq 0$ 和 $|\rho| \neq 1$ 的情形, 该类问题在现有文献中

没有得到有效计算. 本文解决了这种情形下的这类问题. 另外, 本文重点研究了投资者具有 SAHARA 效用的情形, 应用对偶控制 Monte Carlo 方法计算最优值函数的上下界, 从而得到投资策略的近似解.

致谢 作者对审稿人提出的宝贵意见表示感谢.

参考文献

- 1 Blake D, Wright D, Zhang Y. Target-driven investing: Optimal investment strategies in defined contribution pension plans under loss aversion. *J Econom Dynam Control*, 2013, 37: 195–209
- 2 Boulier J F, Huang S J, Taillard G. Optimal management under stochastic interest rates: The case of a protected defined contribution pension fund. *Insurance Math Econom*, 2001, 28: 173–189
- 3 Cairns A J G, Blake D, Dowd K. Stochastic lifestyling: Optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans. *J Econom Dynam Control*, 2006, 30: 843–877
- 4 Devolder P, Princep M B, Fabian I D. Stochastic optimal control of annuity contracts. *Insurance Math Econom*, 2003, 33: 227–238
- 5 Gao J. Stochastic optimal control of DC pension funds. *Insurance Math Econom*, 2008, 42: 1159–1164
- 6 Haberman S, Vigna E. Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes. *Insurance Math Econom*, 2002, 31: 35–69
- 7 Chen A, Pelsser A, Vellekoop M. Modeling non-monotone risk aversion using SAHARA utility functions. *J Econom Theory*, 2011, 146: 2075–2092
- 8 Cui Z Y. Comment on “Modeling non-monotone risk aversion using SAHARA utility functions” [*J. Econ. Theory* 146 (2011) 2075–2092]. *J Econom Theory*, 2014, 153: 703–705
- 9 Bernard C, Kwak M. Dynamic preferences for popular investment strategies in pension funds. *Scand Actuar J*, 2016, 2016: 398–419
- 10 Chen A, Vellekoop M. Optimal investment and consumption when allowing terminal debt. *European J Oper Res*, 2017, 258: 385–397
- 11 Li W, Ma J. Optimal investment strategies for general utilities under dynamic elasticity of variance models. *Quant Finance*, 2018, 18: 1379–1388
- 12 Cox J C, Ross S A. The valuation of options for alternative stochastic processes. *J Financ Econ*, 1976, 3: 145–166
- 13 Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. *J Political Economy*, 1973, 81: 637–654
- 14 Xiao J, Hong Z, Qin C. The constant elasticity of variance (CEV) model and the Legendre transform-dual solution for annuity contracts. *Insurance Math Econom*, 2007, 40: 302–310
- 15 Gao J. Optimal portfolios for DC pension plans under a CEV model. *Insurance Math Econom*, 2009, 44: 479–490
- 16 Gao J. Optimal investment strategy for annuity contracts under the constant elasticity of variance (CEV) model. *Insurance Math Econom*, 2009, 45: 9–18
- 17 Gao J. An extended CEV model and the Legendre transform-dual-asymptotic solutions for annuity contracts. *Insurance Math Econom*, 2010, 46: 511–530
- 18 Zhao H, Rong X. Portfolio selection problem with multiple risky assets under the constant elasticity of variance model. *Insurance Math Econom*, 2012, 50: 179–190
- 19 Li D, Rong X, Zhao H, et al. Equilibrium investment strategy for DC pension plan with default risk and return of premiums clauses under CEV model. *Insurance Math Econom*, 2017, 72: 6–20
- 20 Fan C, Xiang K, Chen P. Efficient option pricing in crisis based on dynamic elasticity of variance model. *Discrete Dyn Nat Soc*, 2016, 2016: 7496539
- 21 Zhang A, Ewald C O. Optimal investment for a pension fund under inflation risk. *Math Methods Oper Res*, 2010, 71: 353–369
- 22 Han N W, Hung M W. Optimal asset allocation for DC pension plans under inflation. *Insurance Math Econom*, 2012, 51: 172–181
- 23 Tang M L, Chen S N, Lai G C, et al. Asset allocation for a DC pension fund under stochastic interest rates and inflation-protected guarantee. *Insurance Math Econom*, 2018, 78: 87–104
- 24 Guan G H, Liang Z X. Optimal management of DC pension plan in a stochastic interest rate and stochastic volatility framework. *Insurance Math Econom*, 2014, 57: 58–66
- 25 Liang Z X, Ma M. Optimal dynamic asset allocation of pension fund in mortality and salary risks framework. *Insurance Math Econom*, 2015, 64: 151–161

- 26 Dong Y, Zheng H. Optimal investment of DC pension plan under short-selling constraints and portfolio insurance. Insurance Math Econom, 2019, 85: 47–59
- 27 Chen Z, Li Z, Zeng Y, et al. Asset allocation under loss aversion and minimum performance constraint in a DC pension plan with inflation risk. Insurance Math Econom, 2017, 75: 137–150
- 28 Dong Y, Zheng H. Optimal investment with S-shaped utility and trading and Value at Risk constraints: An application to defined contribution pension plan. European J Oper Res, 2020, 281: 341–356
- 29 Guan G H, Liang Z X. Optimal management of DC pension plan under loss aversion and Value-at-Risk constraints. Insurance Math Econom, 2016, 69: 224–237
- 30 Ma J, Li W, Zheng H. Dual control Monte-Carlo method for tight bounds of value function in regime switching utility maximization. European J Oper Res, 2017, 262: 851–862
- 31 Ma J, Li W, Zheng H. Dual control Monte-Carlo method for tight bounds of value function under Heston stochastic volatility model. European J Oper Res, 2020, 280: 428–440
- 32 Pham H. Continuous-Time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications. Berlin-Heidelberg: Springer, 2009

附录 A 引理 3.1 的证明

对每个整数 n , 定义停时

$$\varsigma_n = T \wedge \inf\{t \in [0, T] : |X_t| \geq n\}.$$

显然, $\varsigma_n \uparrow T$. 考虑随机微分方程 (2.5), 对任意的 $t \in [t_0, T]$, 有

$$\begin{aligned} X_{t \wedge \varsigma_n} &= x_0 + \int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} \bar{r} X_u du + \int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} X_u \pi_u \bar{\theta}(u, S_u) du \\ &\quad + \int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} X_u \pi_u \theta(u, S_u) dW_u^1 - \int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} X_u \sigma_2 dW_u^2. \end{aligned}$$

故而, 可以得到如下不等式:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{t \wedge \varsigma_n}^2] &\leq 5x_0^2 + 5\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} \bar{r} X_u du\right]^2 + 5\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} X_u \pi_u \bar{\theta}(u, S_u) du\right]^2 \\ &\quad + 5\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} X_u \pi_u \theta(u, S_u) dW_u^1\right]^2 + 5\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} X_u \sigma_2 dW_u^2\right]^2. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

通过使用 Doob 不等式 (参见文献 [32, 第 7 页]), 可以得到

$$\mathbb{E}\left[\sup_{u \in [t_0, t \wedge \varsigma_n]} X_u^2\right] \leq 4\mathbb{E}[X_{t \wedge \varsigma_n}^2]. \quad (\text{A.2})$$

本文考虑的最优化 (2.6) 是非奇异的, 所以对可容许策略 π , 根据积分收敛的必要条件知 π_t 在 $t \in [0, T]$ 上是有界的. 应用 Cauchy-Schwarz 不等式可以得到

$$\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} \bar{r} X_u du\right]^2 \leq \mathbb{E}\left[(t \wedge \varsigma_n - t_0) \bar{r}^2 \int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} X_u^2 du\right] \leq (T - t_0) \bar{r}^2 \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} X_u^2 du\right] \quad (\text{A.3})$$

和

$$\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} X_u \pi_u \bar{\theta}(u, S_u) du\right]^2 \leq K_1 (T - t_0)^2 \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t \wedge \varsigma_n} X_u^2 du\right]. \quad (\text{A.4})$$

通过使用 Itô 等距公式, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{t \wedge \zeta_n} X_u \pi_u \theta(u, S_u) dW_u^1 \right]^2 &= \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{t \wedge \zeta_n} X_u^2 \pi_u^2 \theta^2(u, S_u) du \right] \\ &\leq K_2 (T - t_0)^2 \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{t \wedge \zeta_n} X_u^2 du \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

和

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{t \wedge \zeta_n} X_u \sigma_2 dW_u^2 \right]^2 = \sigma_2^2 \mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{t \wedge \zeta_n} X_u^2 du \right], \quad (\text{A.6})$$

这里 $K_1, K_2 > 0$ 是有界的常数. 此外,

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_0}^{t \wedge \zeta_n} X_u^2 du \right] \leq \int_{t_0}^{t \wedge \zeta_n} \mathbb{E} \left[\sup_{\eta \in [t_0, u]} X_\eta^2 \right] du. \quad (\text{A.7})$$

则将 (A.2)–(A.7) 与 (A.1) 结合, 得到

$$\mathbb{E} \left[\sup_{u \in [t_0, t \wedge \zeta_n]} X_u^2 \right] \leq C_1 + C_2 \int_{t_0}^{t \wedge \zeta_n} \mathbb{E} \left[\sup_{\eta \in [t_0, u]} X_\eta^2 \right] du, \quad (\text{A.8})$$

这里常数 $C_1, C_2 > 0$. 最后对 (A.8) 应用 Gronwall 不等式 (参见文献 [32, 第 24 页]) 可得到 (3.4). 证毕.

附录 B 定理 3.1 的证明

对任意 $\pi \in \Pi$, $\zeta \in [t, T)$ 和停时 $\tau \in [t, \infty)$, 通过应用 Itô 引理可以得到

$$\begin{aligned} G(\zeta \wedge \tau, S_{\zeta \wedge \tau}, X_{\zeta \wedge \tau}) &= G(t, s, x) + \int_t^{\zeta \wedge \tau} J(u, s, x) du - \int_t^{\zeta \wedge \tau} x \sigma_2 G_x dW_u^2 \\ &\quad + \int_t^{\zeta \wedge \tau} \theta(u, s) (s G_s + x \pi_u G_x) dW_u^1, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

这里

$$J(u, s, x) = G_u + s \mu_1 G_s + \frac{1}{2} \theta^2(u, s) s^2 G_{ss} + x \bar{r} G_x + \frac{1}{2} \sigma_2^2 x^2 G_{xx} - \rho \theta(u, s) \sigma_2 x s G_{sx} + H^\pi(u, s, x; G).$$

令

$$\tau = \tau_n := \inf \left\{ \varrho \geq t : \int_t^\varrho |\theta(u, s) (s G_s + x \pi_u G_x)|^2 du \geq n \text{ 和 } \int_t^\varrho |x \sigma_2 G_x|^2 du \geq n \right\}.$$

注意到, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\tau_n \rightarrow \infty$, 则 $\int_t^{\zeta \wedge \tau_n} \theta(u, s) [s G_s + x \pi_u G_x] dW_u^1$ 和 $\int_t^{\zeta \wedge \tau_n} x \sigma_2 G_x dW_u^2$ 都是鞅. 对 (B.1) 求期望, 有

$$\mathbb{E}[G(\zeta \wedge \tau_n, S_{\zeta \wedge \tau_n}, X_{\zeta \wedge \tau_n})] = G(t, s, x) + \mathbb{E} \left[\int_t^{\zeta \wedge \tau_n} J(u, s, x) du \right].$$

通过 (3.5), 有

$$\mathbb{E}[G(\zeta \wedge \tau_n, S_{\zeta \wedge \tau_n}, X_{\zeta \wedge \tau_n})] \leq G(t, s, x). \quad (\text{B.2})$$

结合 $G(t, s, x)$ 满足二次增长条件和引理 3.1, 可以得到

$$|G(\zeta \wedge \tau_n, S_{\zeta \wedge \tau_n}, X_{\zeta \wedge \tau_n})| \leq C \left(1 + \sup_{\zeta \in [t, T]} (|S_\zeta|^2 + |X_\zeta|^2) \right) < \infty.$$

通过使用控制收敛定理以及令 (B.2) 中 $n \rightarrow \infty$, 可以得到

$$\mathbb{E}[G(\zeta, S_\zeta, X_\zeta)] \leq G(t, s, x).$$

由于 $G(t, s, x)$ 在 $\mathfrak{R}$ 上连续, 令 $\zeta \rightarrow T$ 以及结合 (3.6), 可以得到

$$\mathbb{E}[G(T, S_T, X_T)] = \mathbb{E}[U(X_T)] \leq G(t, s, x). \quad (\text{B.3})$$

对 (B.3) 左右两边基于 $\mathcal{F}_t$ 求取条件期望, 可以得到

$$V(t, s, x) = \mathbb{E}[U(X_T) \mid S_t = s, X_t = x] \leq G(t, s, x).$$

由于 $\pi \in \Pi$ 的任意性, 故而有 $V(t, s, x) \leq G(t, s, x)$.

接下来, 如果存在一个策略 π_t^* 满足 (3.7), 则有

$$\mathbb{E}[G(\zeta \wedge \tau_n, S_{\zeta \wedge \tau_n}, X_{\zeta \wedge \tau_n})] = G(t, s, x).$$

令 $\zeta \rightarrow T$, 则有

$$G(t, s, x) = \mathbb{E}[G(\zeta \wedge \tau_n, S_{\zeta \wedge \tau_n}, X_{\zeta \wedge \tau_n})] = U(X_T).$$

这表明 $G(t, s, x) \leq V(t, s, x)$. 最后, 当 $\pi = \pi_t^*$ 时, $V(t, s, x) = G(t, s, x)$. 证毕.

附录 C 定理 4.1 的证明

由于 $\hat{V}(t, s, y)$ 是 C^2 连续的, 且对任意 $y > 0$ 是严格凸的, 因此它满足

$$\frac{\partial \hat{V}(t, s, 0)}{\partial y} = -\infty, \quad \frac{\partial \hat{V}(t, s, \infty)}{\partial y} = 0,$$

这表明方程 (4.8) 的解存在且唯一, 令 $y^* = y(t, s, x)$ 表示方程 (4.8) 的解. 因此, 有

$$\tilde{V}(t, s, x) = \hat{V}(t, s, y^*) + xy^*. \quad (\text{C.1})$$

对 (C.1), 通过简单的计算得到如下偏导关系:

$$\begin{aligned} y^* &= \tilde{V}_x, \quad \hat{V}_t = \tilde{V}_t, \quad \hat{V}_s = \tilde{V}_s, \quad \hat{V}_{y^*} = -x, \\ \hat{V}_{y^*y^*} &= -\frac{1}{\tilde{V}_{xx}}, \quad \hat{V}_{ss} = \tilde{V}_{ss} - \frac{\tilde{V}_{sx}^2}{\tilde{V}_{xx}}, \quad \hat{V}_{sy^*} = -\frac{\tilde{V}_{sx}}{\tilde{V}_{xx}}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

将 (C.2) 代入 (4.7), 可以得到

$$\begin{aligned} &\tilde{V}_t + s\mu_1\tilde{V}_s + \frac{1}{2}\theta^2(t, s)s^2\tilde{V}_{ss} - \theta(t, s)\rho\sigma_2xs\tilde{V}_{sx} + x\bar{r}\tilde{V}_x \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_2^2x^2\tilde{V}_{xx} - \frac{[\rho\sigma_2\theta(t, s)x\tilde{V}_{xx} - \bar{\theta}(t, s)\tilde{V}_x - \theta^2(t, s)s\tilde{V}_{sx}]^2}{2\theta^2(t, s)\tilde{V}_{xx}} = 0, \end{aligned}$$

其终端条件为

$$\begin{aligned}\tilde{V}(T, s, x) &= \inf_{y \geq 0} \{\hat{V}(T, s, y) + xy\} \\ &= \inf_{y \geq 0} \{\hat{V}(T, s, y) + xy\} = U(x).\end{aligned}$$

因此, $\tilde{V}$ 是非线性偏微分方程 (3.3) 的一个解. 进一步, 将 (C.2) 代入 (3.2) 可以得到 (4.9). 证毕.

附录 D 命题 5.1 的证明

通过计算, 可以得到效用函数 (5.1) 的对偶形式

$$\hat{U}(y) = \frac{1-p}{p} y^{\frac{p}{p-1}}.$$

将 $Y_T = y \exp(A_{t,T})$ 代入 (4.11), 可以得到

$$Z(t, s, y) = \frac{1-p}{p} y^{\frac{p}{p-1}} \nu(t, s), \quad (\text{D.1})$$

这里 $\nu(t, s) = \mathbb{E}[\exp(\frac{p}{p-1} A_{t,T}) | S_t = s]$, $A_{t,T}$ 由 (4.3) 给定. 那么, (4.14) 的解为

$$y^* = \left(\frac{x}{\nu(t, s)} \right)^{p-1}.$$

因此, 值函数的紧上界为

$$\begin{aligned}\inf_{\xi \in \mathcal{S}} \bar{V}(t, s, x) &= \inf_{\xi \in \mathcal{S}} \{Z(t, s, y^*) + xy^*\} \\ &= \inf_{\xi \in \mathcal{S}} \left\{ \frac{1-p}{p} (y^*)^{\frac{p}{p-1}} \nu(t, s) + xy^* \right\}.\end{aligned}$$

接下来通过 (4.15) 计算反馈控制 π_t . 通过 (D.1), 得到

$$\begin{aligned}Z_{y^*} &= -(y^*)^{\frac{1}{p-1}} \nu(t, s), \\ Z_{y^* y^*} &= -\frac{1}{p-1} (y^*)^{\frac{2-p}{p-1}} \nu(t, s), \\ Z_{y^* s} &= -(y^*)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\nu(t, s+h) - \nu(t, s-h)}{2h}.\end{aligned}$$

故而, 反馈控制 π_t 满足

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_t &= \frac{\rho \sigma_2}{\theta(t, s)} + \frac{\bar{\theta}(t, s) y^*}{(p-1) \theta^2(t, s) Z_{y^*}} (y^*)^{\frac{2-p}{1-p}} \nu(t, s) \\ &\quad - \frac{s}{Z_{y^*}} \left[(y^*)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\nu(t, s+h) - \nu(t, s-h)}{2h} \right].\end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

我们对财富过程 (2.5) 进行如下离散:

$$\bar{X}_{t+h} = \bar{X}_t + \bar{r} \bar{X}_t h + \bar{X}_t \bar{\theta}(t, s) h + \bar{X}_t \bar{\pi}_t \theta(t, s) \sqrt{h} Z_1 - \bar{X}_t \sigma_2 \sqrt{h} (\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2),$$

这里 π_t 由 (D.2) 给出. 故而可以计算 $\bar{X}_T$, 从而计算紧下界

$$\sup_{\xi \in \mathcal{S}} \underline{V}(t, s, x) = \sup_{\xi \in \mathcal{S}} \mathbb{E}[U(\bar{X}_T)].$$

证毕.

Optimal strategies for a defined contribution pension plan with SAHARA utility under DEV model

Jingtang Ma, Dengsheng Chen & Zhengyang Lu

Abstract This paper investigates the optimal investment problems for a defined contribution pension plan in an incomplete financial market that consists of a risk-free asset and a risky asset whose price process obeys the dynamic elasticity of variance model and a correlated inflation risk model. The pension plan participant aims to maximize the expected utility of the terminal wealth under the symmetric asymptotic hyperbolic absolute risk aversion utility. This paper derives the Hamilton-Jacobi-Bellman equations and the verification results, develops lower and upper bounds for the value function, and computes optimal strategies by applying the dual control Monte Carlo algorithm. Numerical examples are presented to verify the accuracy of the approach.

Keywords defined contribution pension plan, incomplete financial market, dynamic elasticity of variance model, symmetric asymptotic hyperbolic absolute risk aversion utility, dual control Monte Carlo algorithm, optimal strategy

MSC(2020) 91B05, 91G05

doi: 10.1360/SCM-2020-0228