

一类半参数回归模型的估计理论*

洪 圣 岩

(安徽大学数学系, 合肥 230039)

摘 要

考虑半参数回归模型 $Y = X'\beta + g(T) + e$, 其中 (X, T) 为取值于 $R^p \times [0, 1]$ 上的随机向量, β 为 $p \times 1$ 未知参数向量, g 为定义于 $[0, 1]$ 上的未知函数, e 为随机误差, $Ee = 0$, $Ee^2 = \sigma^2 > 0$, 且 (X, T) 与 e 独立. 本文综合最近邻和最小二乘的方法定义了 β, g 和 σ^2 的估计量 $\hat{\beta}_n, g_n^*$ 和 $\hat{\sigma}_n^2$. 在适当条件下证明了 $\hat{\beta}_n$ 和 $\hat{\sigma}_n^2$ 的渐近正态性, 并得到了 g_n^* 的最优收敛速度.

关键词: 半参数回归模型, 最近邻准则, 渐近正态性, 最优收敛速度

考虑半参数回归模型

$$Y = X'\beta + g(T) + e, \quad (1)$$

其中 (X, T) 为取值于 $R^p \times R^1$ 的随机向量, T 的支撑集为有界闭集, 不妨设为 $[0, 1]$. β 是 $p \times 1$ 未知参数向量, g 是定义于 $[0, 1]$ 上的未知函数. e 为随机误差, 均值为零, 方差 $\sigma^2 > 0$ 未知. 且 e 与 (X, T) 相互独立. 模型(1)属于一类可加模型, 它表明因变量 Y 关于自变量 (X, T) 的回归函数 $E(Y|(X, T))$ 呈偏线性的形式, 文献中亦称其为偏线性模型. 由于这一模型较单纯的参数或非参数模型有更大的适应性, 近年来关于模型(1)及相关模型的研究已成为统计领域的一个热门方向.

目前, 文献中已出现若干研究模型(1)中参数分量 β 和非参数分量 g 的估计问题的文章. 研究的重点是设法构造 β 和 g 的估计量, 使它们分别达到各自的最优收敛速度 $n^{-1/2}$ 和 $n^{-r/(2r+1)}$ (r 表 g 的光滑度). Chen^[1] 利用一种逐点多项式逼近研究了这一问题. 正如他指出的, 其方法应用不广. Speckman^[2] 利用核和最小二乘法得到了 β 估计量的最优收敛速度, 但他所施的条件较强且不易验证. 本文综合最近邻和最小二乘法构造了 β 和 g 的估计 $\hat{\beta}_n$ 和 g_n^* . 在简洁合理的条件下得到了 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ 的渐近正态性及 g_n^* 的最优收敛速度 $n^{-1/3}$. 另外, 出于对 β 进行假设检验的考虑, 本文定义了误差方差 σ^2 的一个估计, 并得到了它的渐近正态性. 关于这一问题的研究至今文献中还未出现过.

一、估计的构造和主要结果

假设 $\{X_i = (X_{i1}, \dots, X_{ip})', T_i, Y_i, 1 \leq i \leq n\}$ 为来自模型(1)的一组独立同分布随机

本文 1990 年 10 月 22 日收到, 1991 年 2 月 12 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

样本,即

$$Y_i = X_i' \beta + g(T_i) + e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

其中 $e_i, 1 \leq i \leq n$ 为 iid. 随机误差, $E e_1 = 0$, $E e_1^2 = \sigma^2 > 0$. $\{(X_i, T_i), 1 \leq i \leq n\}$ 与 $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ 相互独立. 为构造 β, g 和 σ^2 的估计, 对任意 $t \in [0, 1]$, 将 $T_1, \dots, T_n$ 按下面顺序重排

$$|T_{R(1,t)} - t| \leq |T_{R(2,t)} - t| \leq \dots \leq |T_{R(n,t)} - t| \quad (3)$$

(按小下标在前的方式消结). 给定一组非负实数 $\{v_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ 和正整数列 $\{k = k_n, n \geq 1\}$ 满足

$$(a) \quad k/\sqrt{n \log n} \rightarrow \infty, \quad k/n^{3/4} \rightarrow 0,$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^n v_{ni} = 1, \quad k \max_{1 \leq i \leq k} v_{ni} = O(1), \quad \sum_{i>k} v_{ni} = o(n^{-1/2}).$$

利用(3)式可得一系列非负随机变量 $\{w_{ni}(t) = w_{ni}(t, T_1, \dots, T_n), 1 \leq i \leq n\}$, 使得

$$w_{nR(i,t)}(t) = v_{ni}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4)$$

注意显然有 $0 \leq v_{ni} \leq 1$, $0 \leq w_{ni}(t) \leq 1$, 对 $1 \leq i \leq n, 0 \leq t \leq 1$.

现在由(2)式知对真参数 β 有

$$Y_i - X_i' \beta = g(T_i) + e_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5)$$

因而若视 β 已知, 则依通常的最近邻法, 由(5)式可定义 g 的最近邻估计

$$\hat{g}_n(t) \triangleq \hat{g}_n(t, \beta) = \sum_{i=1}^n w_{ni}(t) (Y_i - X_i' \beta) \triangleq \hat{g}_{1n}(t) - \hat{g}_{2n}(t) \beta, \quad (6)$$

其中 $\hat{g}_{1n}(t) = \sum_{i=1}^n w_{ni}(t) Y_i$ 和 $\hat{g}_{2n}(t) = \sum_{i=1}^n w_{ni}(t) X_i$ 分别为 $g_1(t) = E(Y_1 | T_1 = t)$ 和 $g_2(t) = E(X_1 | T_1 = t)$ 的最近邻估计, $\hat{g}_{2n}$ 表向量 $\hat{g}_{2n}$ 的转置. 利用(6)和(2)式可由通常的最小二乘法定义 β 的估计为下式的解

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - X_i' \beta - \hat{g}_n(T_i, \beta))^2 = \min. \quad (7)$$

记 $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)'$, $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)'$, 其中

$$\tilde{X}_i = X_i - \hat{g}_{2n}(T_i), \quad \tilde{Y}_i = Y_i - \hat{g}_{1n}(T_i) \quad 1 \leq i \leq n, \quad (8)$$

后面将证明 $\frac{1}{n} \tilde{X}' \tilde{X}$ 以概率 1 趋于一正定阵, 因而可不妨假定 $\tilde{X}' \tilde{X}$ (当 n 充分大时)可逆. 那么由(7)式解得 β 的估计为

$$\hat{\beta}_n = (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' \tilde{Y}. \quad (9)$$

由此及(6)式可定义 g 的估计

$$g_n^*(t) = \hat{g}_{1n}(t) - \hat{g}_{2n}(t) \hat{\beta}_n, \quad (10)$$

而定义 σ^2 的估计为

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{Y}_i - \tilde{X}_i' \hat{\beta}_n)^2. \quad (11)$$

本文需要如下假定:

(i) T_1 有密度 $r(t)$, 且

$$0 < \inf_{0 \leq t \leq 1} r(t) \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} r(t) < \infty.$$

(ii) 函数 $g(t)$, $g_1(t)$ 和 $g_{2j}(t)$, $1 \leq j \leq p$ 满足 1 阶 Lipshitz 条件, 即存在常数 $M > 0$, 使对任意的 $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $|f(t_1) - f(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|$ 对 $f = g, g_1, g_{2j}$, $1 \leq j \leq p$ 均成立. 这里 $g_{2j}(t) = E(X_{1j}|T_1 = t)$ 是 $g_2(t)$ 的第 j 个分量.

(iii) $E(Y|T_1 = t)$ 和 $E(X_{1j}|T_1 = t)$, $1 \leq j \leq p$ 都是 t 的有界函数.

(iv) $\Sigma = \text{cov}(X_1 - E(X_1|T_1))$ 是正定阵.

注 1. 条件 (i)–(iii) 是研究非参数回归估计最优收敛速度所施的基本条件(见文献 [3, 4] 等), 因而为处理模型 (1) 中的非参数分量, 它们是必要的. 条件 (iv) 保证了 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ 的渐近协方差阵 $\sigma^2 \Sigma^{-1}$ 有意义. 实际中, (iv) 表明 X 的任何线性组合都不是 T 的函数. Chen^[4] 给出了 (iv) 成立的一个充分条件.

注 2. 条件 (ii) 和 (iii) 表明 g, g_1 和 g_2 都是 t 的有界函数, 且 $EY_1^2 < \infty, E\|X_1\|^2 < \infty$ ($\|X_1\|^2 = \sum_{j=1}^p X_{1j}^2$).

本文的主要结果如下:

定理 1. 在条件 (i)–(iv) 和 (a), (b) 下有

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2 \Sigma^{-1}). \quad (12)$$

注 3. 如 Chen^[4] 指出的, 当误差 e 服从正态时, $\sigma^2 \Sigma^{-1}$ 是 β 的正则估计 (定义见文献 [5]) 的最小渐近方差. 因而定理 1 表明 $\hat{\beta}_n$ 是 β 的自适应估计, 这正是我们所期待的结果.

定理 2. 设条件 (i)–(iv) 和 (a), (b) 成立, 若还有 $E\|X_1\|^3 < \infty$ 和 $E|e_1|^3 < \infty$, 则取 $k = [Cn^{2/3}]$ ($0 < C < \infty$) 时有

$$g_n^*(t) - g(t) = O_p(n^{-1/3}) \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (13)$$

定理 3. 设条件 (i)–(iv) 和 (a), (b) 成立, 若还有 $0 < \text{var} e_1^2 < \infty$, 则

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2)/(\text{var} e_1^2)^{1/2} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1). \quad (14)$$

注意到由第二节中引理 2 知 $\frac{1}{n} \tilde{X}' \tilde{X} \rightarrow \Sigma$ a.s., 由定理 1 和 3 得

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \tilde{X}' \tilde{X} \right)^{1/2} (\hat{\beta}_n - \beta) / \hat{\sigma}_n = (\tilde{X}' \tilde{X})^{1/2} (\hat{\beta}_n - \beta) / \hat{\sigma}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, I_p),$$

故由文献 [6] 中定理 10.2 d(p. 142) 我们得

定理 4. 在定理 3 的条件下有

$$(\hat{\beta}_n - \beta)' (\tilde{X}' \tilde{X}) (\hat{\beta}_n - \beta) / \hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_p^2. \quad (15)$$

此结果可用于关于 β 的大样本置信椭球估计以及假设检验.

注 4. 上述所有结果可方便地推至 T 为 $q > 1$ 维的情形.

二、定理的证明

引入记号

$$W_{ni} = (w_{ni}(T_1), \dots, w_{ni}(T_n))', \quad W = (W_{n1}, \dots, W_{nn})',$$

$$\begin{aligned} X &= (X_1, \dots, X_n)', e = (e_1, \dots, e_n)', Y = (Y_1, \dots, Y_n)', \\ m_{ij} &= g_{2j}(T_i), h_{ij} = X_{ij} - m_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p, \\ \tilde{G}(T) &= (g(T_1) - \hat{g}_n(T_1), \dots, g(T_n) - \hat{g}_n(T_n))', \end{aligned}$$

则易见有 $\tilde{X} = (I - W)X$, $\tilde{Y} = (I - W)Y$, 且

$$\tilde{Y} = \tilde{X}\beta + \tilde{G}(T) + e. \quad (16)$$

先给出如下若干引理. 为方便计, 用 C 表绝对正常数, 每次出现其值可不同.

引理 1 (见文献 [4]). 设条件(ii), (iii) 和 (b) 成立, 且有 $k/\sqrt{n \log n} \rightarrow \infty, k/n \rightarrow 0$. 则有

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| g_{2j}(t) - \sum_{i=1}^n w_{ni}(t) X_{ij} \right| \rightarrow 0 \text{ a.s.}, 1 \leq j \leq p, \quad (17)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| g_1(t) - \sum_{i=1}^n w_{ni}(t) Y_i \right| \rightarrow 0 \text{ a.s.} \quad (18)$$

引理 2. 在引理 1 的条件下有

$$\frac{1}{n} \tilde{X}'\tilde{X} \rightarrow \Sigma \text{ a.s.} \quad (19)$$

证. 因 $\tilde{X} = (I - W)X$, 其第 (i, j) 元为

$$\tilde{X}_{ij} = X_{ij} - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) X_{tj} = h_{ij} + m_{ij} - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) X_{tj}, \quad (20)$$

所以 $\tilde{X}'\tilde{X}$ 的第 (i, j) 元为

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n \tilde{X}_{ti} \tilde{X}_{tj} &= \sum_{t=1}^n h_{ti} h_{tj} + \sum_{t=1}^n h_{ti} \left(m_{tj} - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_t) X_{sj} \right) \\ &\quad + \sum_{t=1}^n h_{tj} \left(m_{ti} - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_t) X_{si} \right) \\ &\quad + \sum_{t=1}^n \left(m_{ti} - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_t) X_{si} \right) \left(m_{tj} - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_t) X_{sj} \right) \\ &\triangleq \sum_{m=1}^4 I_{ij}^{(m)}. \end{aligned} \quad (21)$$

由 $(X_i, T_i), 1 \leq i \leq n$ 的 iid. 性及强大数定律知对 $1 \leq i, j \leq p$ 有

$$\frac{1}{n} I_{ij}^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n h_{ti} h_{tj} \rightarrow E h_{ti} h_{tj} = \Sigma_{ij} \text{ a.s.}, \quad (22)$$

其中 $\Sigma_{ij} = \text{cov}(X_{ti} - E(X_{ti}|T_1), X_{tj} - E(X_{tj}|T_1))$ 正是 Σ 的第 (i, j) 元,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |h_{ti}| \rightarrow E |h_{ti}| < \infty \text{ a.s.}, \quad (23)$$

$$E(X_{ti}|T_t = t) = E(X_{ti}|T_1 = t), \quad 1 \leq s \leq n, 0 \leq t \leq 1, \quad (24)$$

因而由引理 1 及 (23), (24) 式得

$$\frac{1}{n} I_{ij}^{(2)} \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| g_{2j}(t) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(t) X_{sj} \right| \left| \sum_{t=1}^n |h_{ti}| \right| / n \rightarrow 0 \text{ a.s.},$$

$$\frac{1}{n} I_{ii'}^{(3)} \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| g_{2i}(t) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(t) X_{si} \right| \left| \sum_{s=1}^n |h_{sj}| / n \right| \rightarrow 0 \text{ a.s.},$$

$$\frac{1}{n} I_{ii'}^{(4)} \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| g_{2i}(t) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(t) X_{si} \right| \left| g_{2i}(t) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(t) X_{sj} \right| \rightarrow 0 \text{ a.s.},$$

由此及(21),(22)式即得(19)式.

引理 3. 设条件 (i) 成立, 且 $k/\log n \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow 0$. 则

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k,t)} - t| = O_p(k/n), \quad (25)$$

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k,t)} - t| \right)^2 = O \left(\left(\frac{k}{n} \right)^2 \right). \quad (26)$$

证. 只需证(26)式. 令 $t_i = \frac{ik}{n}$, $0 \leq i \leq i_n \triangleq [n/k]$. 由 $R(k, t)$ 的定义知对 $0 \leq i \leq i_n$

及 $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ 有

$$\begin{aligned} k &= \#(\{T_1, \dots, T_n\} \cap [t - |T_{R(k,t)} - t|, t + |T_{R(k,t)} - t|]) \\ &= \#(\{T_1, \dots, T_n\} \cap [t_i - |T_{R(k,t_i)} - t_i|, t_i + |T_{R(k,t_i)} - t_i|]) \\ &\leq \#(\{T_1, \dots, T_n\} \cap [t - (|t - t_i| + |T_{R(k,t_i)} - t_i|), t + (|t - t_i| \\ &\quad + |T_{R(k,t_i)} - t_i|)]), \end{aligned}$$

因而 $|T_{R(k,t)} - t| \leq |T_{R(k,t_i)} - t_i| + |t - t_i|$, 由此得

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k,t)} - t| \leq \max_{0 \leq i \leq i_n} |T_{R(k,t_i)} - t_i| + \frac{k}{n},$$

于是为证(26)式, 只需证

$$E \left(\max_{0 \leq i \leq i_n} |T_{R(k,t_i)} - t_i| \right)^2 = O \left(\left(\frac{k}{n} \right)^2 \right). \quad (27)$$

我们有

$$\begin{aligned} E \left(\max_{0 \leq i \leq i_n} |T_{R(k,t_i)} - t_i| \right)^2 &= \int_0^2 P \left\{ \max_{0 \leq i \leq i_n} |T_{R(k,t_i)} - t_i| \geq t^{1/2} \right\} dt \\ &\leq M \left(\frac{k}{n} \right)^2 + \sum_{i=0}^{i_n} \int_{M(\frac{k}{n})^2}^2 P \{ |T_{R(k,t_i)} - t_i| \geq t^{1/2} \} dt \\ &\leq M \left(\frac{k}{n} \right)^2 + 2 \sum_{i=0}^{i_n} P \left\{ |T_{R(k,t_i)} - t_i| \geq \sqrt{M} \frac{k}{n} \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $M > 0$. 记 $Q_{ni} = \# \left(\{T_1, \dots, T_n\} \cap \left[t_i - \sqrt{M} \frac{k}{n}, t_i + \sqrt{M} \frac{k}{n} \right] \right)$, 则有

$$P \left\{ |T_{R(k,t_i)} - t_i| \geq \sqrt{M} \frac{k}{n} \right\} \leq P \left\{ \frac{Q_{ni}}{n} - p_i \leq \frac{k}{n} - p_i \right\}. \quad (29)$$

其中由条件 (i) 知存在某常数 $c_1 > 0$ 使

$$p_i = P \left\{ T_1 \in \left[t_i - \sqrt{M} \frac{k}{n}, t_i + \sqrt{M} \frac{k}{n} \right] \right\} \geq c_1 \sqrt{M} \frac{k}{n}.$$

因此取 $M > (2/c_1)^2$, 则由 Hoeffding 不等式及(29)式得

$$\begin{aligned}
 P \left\{ |T_{R(k, i)} - t_i| \geq \sqrt{M} \frac{k}{n} \right\} &\leq P \left\{ \frac{Q_{ni}}{n} - p_i \leq -\frac{p_i}{2} \right\} \\
 &\leq \exp \left\{ -n \left(\frac{p_i}{2} \right)^2 / \left(2 p_i + \frac{1}{2} p_i \right) \right\} \leq e^{-k/3}.
 \end{aligned} \quad (30)$$

因 $k/\log n \rightarrow \infty$, 由(28)和(30)式即得(27)式.

引理 4. 在定理 1 的条件下对 $1 \leq j \leq p$ 有

$$\frac{1}{\sqrt{n}} J \triangleq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n h_{ij}(g(T_i) - \hat{g}_n(T_i)) \xrightarrow{P} 0. \quad (31)$$

证. 由(6)和(2)式有

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{i=1}^n h_{ij} \left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_i) g(T_s) \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n h_{ij} w_{ns}(T_i) e_s \\
 &\triangleq J_1 - J_2.
 \end{aligned}$$

首先由 $\{(X_i, T_i), 1 \leq i \leq n\}$ 与 $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ 的独立性及 $E e_i = 0$ 得

$$E J_1 J_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n E(J_1 h_{ij} w_{ns}(T_i)) E e_s = 0, \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 E J_2^2 &= E \left(\sum_{i=1}^n h_{ij}^2 \left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_i) e_s \right)^2 \right) \\
 &+ E \left[\sum_{i_1 \neq i_2} h_{i_1 j} h_{i_2 j} \left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_1}) e_s \right) \left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_2}) e_s \right) \right] \triangleq J_3 + J_4,
 \end{aligned} \quad (33)$$

再注意到 $E e_i^2 = \sigma^2$, $E e_i e_j = 0$, $i \neq j$ 及由(4)式

$$\sum_{s=1}^n w_{ns}^2(T_i) = \sum_{s=1}^n w_{nR(i, T_i)}^2(T_i) = \sum_{s=1}^n v_{ns}^2 \leq C \left(\frac{1}{k} + \sum_{s>k} v_{ns} \right), \quad 1 \leq i \leq n \quad (34)$$

我们得

$$\begin{aligned}
 J_3 &= E \left(\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n h_{ij}^2 w_{ns}^2(T_i) e_i^2 \right) + E \left(\sum_{i=1}^n h_{ij}^2 \sum_{s_1 \neq s_2} w_{ns_1}(T_i) w_{ns_2}(T_i) e_{s_1} e_{s_2} \right) \\
 &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n E \left(h_{ij}^2 \sum_{s=1}^n w_{ns}^2(T_i) \right) \\
 &= \sigma^2 \left(\sum_{s=1}^n v_{ns}^2 \right) \sum_{i=1}^n E h_{ij}^2 = \sigma^2 n \left(\sum_{s=1}^n v_{ns}^2 \right) E h_{ij}^2,
 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 J_4 &= E \left(\sum_{i_1 \neq i_2} h_{i_1 j} h_{i_2 j} \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_1}) w_{ns}(T_{i_2}) e_{s_1}^2 \right) \\
 &+ E \left(\sum_{i_1 \neq i_2} h_{i_1 j} h_{i_2 j} \sum_{s_1 \neq s_2} w_{ns_1}(T_{i_1}) w_{ns_2}(T_{i_2}) e_{s_1} e_{s_2} \right) \\
 &= \sigma^2 \sum_{i_1 \neq i_2} \sum_{s=1}^n E(h_{i_1 j} h_{i_2 j} w_{ns}(T_{i_1}) w_{ns}(T_{i_2})) \\
 &= \sigma^2 \sum_{i_1 \neq i_2} \sum_{s=1}^n E[w_{ns}(T_{i_1}) w_{ns}(T_{i_2}) E(h_{i_1 j} h_{i_2 j} | T_m, 1 \leq m \leq n)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \sum_{i_1 \neq i_2} \sum_{s=1}^n E[w_{n_s}(T_{i_1})w_{n_s}(T_{i_2})E(h_{i_1,j}h_{i_2,j}|T_{i_1}, T_{i_2})] \\
&= \sigma^2 \sum_{i_1 \neq i_2} \sum_{s=1}^n E[w_{n_s}(T_{i_1})w_{n_s}(T_{i_2})E(h_{i_1,j}|T_{i_1})E(h_{i_2,j}|T_{i_2})] = 0.
\end{aligned} \quad (36)$$

此处用到了 $w_{n_s}(\cdot)$ 只与 $\{T_i; 1 \leq i \leq n\}$ 有关, 在给定 $\{T_1, \dots, T_n\}$ 的条件下 $h_{i_1,j}$ 与 $h_{i_2,j}$ 独立 ($i_1 \neq i_2$), 且 $E(h_{i,j}|T_i) = 0$ 的事实. 故由(33), (35)和(36)式得

$$\frac{1}{n} E J_2^2 \rightarrow 0. \quad (37)$$

关于 J_1 类似地有

$$\begin{aligned}
E J_1^2 &= E \left(\sum_{i=1}^n h_{ii}^2 \left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{n_s}(T_i) g(T_s) \right)^2 \right) \\
&\quad + E \left(\sum_{i_1 \neq i_2} h_{i_1,j} h_{i_2,j} \left(g(T_{i_1}) - \sum_{s=1}^n w_{n_s}(T_{i_1}) g(T_s) \right) \left(g(T_{i_2}) - \sum_{s=1}^n w_{n_s}(T_{i_2}) g(T_s) \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n E \left[\left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{n_s}(T_i) g(T_s) \right)^2 E(h_{ii}^2 | T_i) \right] \\
&\leq \sum_{i=1}^n E \left[E(X_{ij}^2 | T_i) \left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{n_s}(T_i) g(T_s) \right)^2 \right],
\end{aligned} \quad (38)$$

由条件 (ii) 和 (b) 及(3)式知, 对 $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
\left| g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{n_s}(T_i) g(T_s) \right| &= \left| g(T_i) - \sum_{s=1}^n v_{n_s} g(T_{R(k,T_i)}) \right| \\
&\leq C \left(\sum_{s>k} v_{n_s} + \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k |T_{R(k,T_i)} - T_i| \right) \\
&\leq C \left(\sum_{s>k} v_{n_s} + |T_{R(k,T_i)} - T_i| \right) \\
&\leq C \left(\sum_{s>k} v_{n_s} + \sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k,t)} - t| \right)
\end{aligned} \quad (39)$$

再由条件 (iii) 知, 对 $1 \leq i \leq n$

$$E(X_{ij}^2 | T_i) = E(X_{ij}^2 | T_1 = t) |_{t=T_i} \leq C < \infty, \quad (40)$$

因而由(38)式和引理 3 及题设条件得

$$\frac{1}{n} E J_1^2 \leq C \left(\left(\sum_{s>k} v_{n_s} \right)^2 + E \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k,t)} - t| \right)^2 \right) \rightarrow 0. \quad (41)$$

最后注意到 $E J^2 = E J_1^2 - 2 E J_1 J_2 + E J_2^2$, 由(32), (37)和(41)式即得(31)式.

引理 5. 在定理 1 的条件下对 $1 \leq j \leq p$ 有

$$\frac{1}{\sqrt{n}} R \triangleq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(m_{ij} - \sum_{s=1}^n w_{n_s}(T_i) X_{sj} \right) (g(T_i) - \hat{g}_n(T_i)) \xrightarrow{P} 0. \quad (42)$$

证. 有分解式

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{i=1}^n \left(m_{ij} - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) m_{it} \right) \left(g(T_i) - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) g(T_t) \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left(m_{ij} - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) m_{it} \right) \left(\sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) e_t \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left(g(T_i) - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) g(T_t) \right) \left(\sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) (X_{it} - m_{it}) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) (X_{it} - m_{it}) \right) \left(\sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) e_t \right) \triangleq R_1 - R_2 - R_3 + R_4.
\end{aligned} \tag{43}$$

首先由条件 (ii) 和 (b) 知, 对 $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
\left| m_{ij} - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) m_{it} \right| &= \left| \sum_{t=1}^n v_{nt}(g_{2j}(T_{R(i, T_i)}) - g_{2j}(T_t)) \right| \\
&\leq C \left(\sum_{t > k} v_{nt} + \sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k, t)} - t| \right),
\end{aligned} \tag{44}$$

于是由(39)和(44)式得(以下条件 (a), (b) 及引理 3 要多次用到)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} R_1 \leq C \sqrt{n} \left(\left(\sum_{t > k} v_{nt} \right)^2 + \sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k, t)} - t|^2 \right) \xrightarrow{P} 0. \tag{45}$$

对 R_2 易见有

$$\begin{aligned}
E R_2^2 &= \sum_{i=1}^n E \left[\left(m_{ij} - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) m_{it} \right)^2 \left(\sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) e_t \right)^2 \right] \\
&\quad + \sum_{i_1 \neq i_2} E \left[\left(m_{i_1 j} - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_{i_1}) m_{it} \right) \left(m_{i_2 j} - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_{i_2}) m_{it} \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\sum_{t=1}^n w_{nt}(T_{i_1}) e_t \right) \left(\sum_{t=1}^n w_{nt}(T_{i_2}) e_t \right) \right] \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^n E \left[\left(m_{ij} - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) m_{it} \right)^2 \left(\sum_{t=1}^n w_{nt}^2(T_i) \right) \right] \\
&\quad + \sigma^2 \sum_{i_1 \neq i_2} E \left[\left(m_{i_1 j} - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_{i_1}) m_{it} \right) \left(m_{i_2 j} - \sum_{t=1}^n w_{nt}(T_{i_2}) m_{it} \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\sum_{t=1}^n w_{nt}(T_{i_1}) w_{nt}(T_{i_2}) \right) \right] \\
&\triangleq R_5 + R_6.
\end{aligned} \tag{46}$$

而由(44)和(34)式知

$$\frac{1}{n} R_5 \leq C \left(\sum_{t=1}^n v_{nt}^2 \right) \left[\left(\sum_{t > k} v_{nt} \right)^2 + E \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k, t)} - t| \right)^2 \right] \rightarrow 0, \tag{47}$$

再注意到由(4)式对任意 $1 \leq i \neq s \leq n$

$$\sum_{t=1}^n w_{nt}(T_i) w_{nt}(T_s) = \sum_{t=1}^n w_{nR(i, T_i)}(T_i) w_{nR(i, T_i)}(T_s)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^k v_{nl} w_{nR(l, T_l)}(T_l) + \sum_{l>k} v_{nl} w_{nR(l, T_l)}(T_l) \\
&\leq C \left(\frac{1}{k} + \sum_{l>k} v_{nl} \right),
\end{aligned} \tag{48}$$

于是由(44)式得

$$\frac{1}{n} R_6 \leq C n \left(\frac{1}{k} + \sum_{s>k} v_{ns} \right) \left(\left(\sum_{s>k} v_{ns} \right)^2 + E \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k, t)} - t| \right)^2 \right) \rightarrow 0,$$

由此及(46)和(47)式即得

$$\frac{1}{\sqrt{n}} R_2 \xrightarrow{P} 0. \tag{49}$$

再考虑 R_3 :

$$\begin{aligned}
ER_3^2 &= \sum_{i=1}^n E \left[\left(\sum_{j=1}^n w_{ni}(T_i) h_{ij} \right)^2 \left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_i) g(T_s) \right)^2 \right] \\
&\quad + \sum_{i_1 \neq i_2} E \left[\left(g(T_{i_1}) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_1}) g(T_s) \right) \left(g(T_{i_2}) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_2}) g(T_s) \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\sum_{j=1}^n w_{ni}(T_{i_1}) h_{ij} \right) \left(\sum_{j=1}^n w_{ni}(T_{i_2}) h_{ij} \right) \right] \\
&\triangleq R_7 + R_8,
\end{aligned} \tag{50}$$

类似于 J_4 的处理, 并利用(39), (40), (48)和(34)式得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} R_7 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \left[\left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_i) g(T_s) \right)^2 \left(\sum_{s=1}^n w_{ni}^2(T_i) E(h_{ij}^2 | T_i) \right) \right] \\
&\leq \frac{C}{n} \sum_{i=1}^n E \left[\left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_i) g(T_s) \right)^2 \sum_{s=1}^n w_{ni}^2(T_i) \right] \\
&\leq C \left(\sum_{s=1}^n v_{ns}^2 \right) \left[\left(\sum_{s>k} v_{ns} \right)^2 + E \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k, t)} - t| \right)^2 \right] \rightarrow 0, \\
\frac{1}{n} R_8 &= \frac{1}{n} \sum_{i_1 \neq i_2} E \left[\left(g(T_{i_1}) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_1}) g(T_s) \right) \left(g(T_{i_2}) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_2}) g(T_s) \right) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\sum_{j=1}^n w_{ni}(T_{i_1}) w_{ni}(T_{i_2}) E(h_{ij}^2 | T_i) \right) \right] \\
&\leq C n \left(\frac{1}{k} + \sum_{s>k} v_{ns} \right) \left[\left(\sum_{s>k} v_{ns} \right)^2 + E \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k, t)} - t| \right)^2 \right] \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

因而由(50)式即得

$$\frac{1}{\sqrt{n}} R_3 \xrightarrow{P} 0. \tag{51}$$

最后利用(34), (40)和(48)式及有关独立性有

$$\frac{1}{n} ER_4^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \left(\left(\sum_{j=1}^n w_{ni}(T_i) h_{ij} \right)^2 \left(\sum_{j=1}^n w_{ni}(T_i) e_j \right)^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{n} \sum_{i_1 \neq i_2} E \left[\left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_1}) h_{sj} \right) \left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_2}) h_{sj} \right) \left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_1}) e_s \right) \left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_2}) e_s \right) \right] \\
& - \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n E \left[\left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_i) h_{sj} \right)^2 \left(\sum_{s=1}^n w_{ns}^2(T_i) \right) \right] \\
& + \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i_1 \neq i_2} E \left[\left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_1}) h_{sj} \right) \left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_2}) h_{sj} \right) \left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_1}) w_{ns}(T_{i_2}) \right) \right] \\
& = \frac{\sigma^2}{n} \left(\sum_{s=1}^n v_{ns}^2 \right) \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n E [w_{ns}^2(T_i) E(h_{ij}^2 | T_i)] \\
& + \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i_1 \neq i_2} E \left[\left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_1}) w_{ns}(T_{i_2}) \right) \left(\sum_{s=1}^n w_{ns}(T_{i_1}) w_{ns}(T_{i_2}) E(h_{ij}^2 | T_i) \right) \right] \\
& \leq C \left(\left(\sum_{s=1}^n v_{ns}^2 \right)^2 + n \left(\frac{1}{k} + \sum_{s>k} v_{ns} \right)^2 \right) \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

由此及(43),(45),(49)和(51)式即得(42)式.

引理 6. 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 为 $p \times 1$ 随机向量序列, Z_n 是 $k \times p$ 随机矩阵. 若 $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, $Z_n \xrightarrow{P} A$ ($k \times p$ 常数矩阵), 则 $Z_n X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} AX$.

此结论为文献[6]中定理 18.16 d (p. 341).

定理 1 的证明. 由(9)和(16)式有

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} (\hat{\beta}_n - \beta) &= \sqrt{n} (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' (\tilde{Y} - \tilde{X} \beta) \\
&= \sqrt{n} (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' \tilde{G}(T) + \sqrt{n} (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' e.
\end{aligned} \quad (52)$$

因 $\tilde{X}' \tilde{G}(T) = \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i (g(T_i) - \hat{g}_n(T_i))$, 其第 j 个分量 ($1 \leq j \leq p$) 为

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \tilde{X}_{ij} (g(T_i) - \hat{g}_n(T_i)) &= \sum_{i=1}^n \left(h_{ij} + m_{ij} - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_i) X_{is} \right) (g(T_i) - \hat{g}_n(T_i)) \\
&= J + R.
\end{aligned}$$

由引理 4 和 5 即知 $\frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{X}' \tilde{G}(T) \xrightarrow{P} 0$, 而引理 2 表明

$$\sqrt{n} (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1/2} \rightarrow \Sigma^{-1/2}, \quad n(\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \rightarrow \Sigma^{-1} \quad \text{a.s.}, \quad (53)$$

因而 $\sqrt{n} (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' \tilde{G}(T) \xrightarrow{P} 0$, 故为证(12)式, 只需证

$$\sqrt{n} (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' e \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2 \Sigma^{-1}).$$

而由(53)式和引理 6 知这只需证

$$(\tilde{X}' \tilde{X})^{-1/2} \tilde{X}' e \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2 I_p), \quad (54)$$

显然为证(54)式, 只需证对任一非零 $p \times 1$ 常数向量 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)'$ 有

$$\alpha' (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1/2} \tilde{X}' e \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2 \alpha' \alpha). \quad (55)$$

为此, 记 $A_n = (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1/2} \tilde{X}' = (a_{nij})_{p \times n}$, 则有

$$\sum_{k=1}^n a_{nik} a_{nik} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad (56)$$

$$S_n \triangleq \alpha' (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1/2} \tilde{X}' e = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p a_{nij} \alpha_i \right) e_j \triangleq \sum_{j=1}^n b_{nj} e_j.$$

记 $\mathcal{F}_{n,j} = \sigma\{(X_1, T_1), \dots, (X_n, T_n), e_1, \dots, e_j\}$, $1 \leq j \leq n$, $\mathcal{F}_{n0} = \sigma\{(X_1, T_1), \dots, (X_n, T_n)\}$. 则由有关独立性及(56)式易见

$$\begin{aligned} E(b_{nj} e_j | \mathcal{F}_{n,j-1}) &= b_{nj} E(e_j) = 0 \quad 1 \leq j \leq n, \\ \sum_{j=1}^n E(b_{nj}^2 e_j^2 | \mathcal{F}_{n,j-1}) &= \sum_{j=1}^n b_{nj}^2 E(e_j^2) = \sigma^2 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p a_{nij} \alpha_i \right)^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 = \sigma^2 \alpha' \alpha, \end{aligned}$$

且对任意 $\varepsilon > 0$ 及 $M > 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n E(b_{nj}^2 e_j^2 I(|b_{nj} e_j| \geq \varepsilon) | \mathcal{F}_{n,j-1}) \\ & \leq \sum_{j=1}^n E \left\{ b_{nj}^2 e_j^2 \left[I\left(|b_{nj}| \geq \frac{\varepsilon}{M}\right) + I(|e_j| \geq M) \right] \middle| \mathcal{F}_{n,j-1} \right\} \\ & = \sigma^2 \sum_{j=1}^n b_{nj}^2 I\left(|b_{nj}| \geq \frac{\varepsilon}{M}\right) + \alpha' \alpha E e_j^2 I(|e_j| \geq M) \\ & \leq \sigma^2 \alpha' \alpha I\left(\max_{1 \leq j \leq n} |b_{nj}| \geq \frac{\varepsilon}{M}\right) + \alpha' \alpha E e_j^2 I(|e_j| \geq M). \end{aligned}$$

因当 M 充分大时上式第二项为一充分小量, 由 Dvoretzky 定理(见文献[7])即知为证(55)式只需证

$$\max_{1 \leq j \leq n} |b_{nj}| \xrightarrow{P} 0. \quad (57)$$

为此, 记 $\Sigma^{-1/2} = (\sigma_{ij})_{p \times p}$, $\Delta_n = \sqrt{n} (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1/2} - \Sigma^{-1/2} = (\delta_{nij})_{p \times p}$. 则由(53)式有

$$\max_{1 \leq i, j \leq p} |\delta_{nij}| = o(1) \text{ a.s.}, \text{ 且显然 } \max_{1 \leq i, j \leq p} |\sigma_{ij}| \leq C < \infty, \sqrt{n} a_{nij} = \sum_{k=1}^p (\delta_{nik} + \sigma_{ik}) \tilde{X}_{ik}.$$

故由引理 1 及(20)式得

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq n} |b_{nj}| & \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^p \left| \left(\sum_{i=1}^p (\delta_{nik} + \sigma_{ik}) \alpha_i \right) \tilde{X}_{ik} \right| \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^p \left| \left(h_{ik} + m_{ik} - \sum_{i=1}^n w_{ni}(T_j) X_{ik} \right) \right| \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^p |h_{ik}| + o(1) \text{ a.s.} \end{aligned}$$

对充分小的 $\varepsilon > 0$, 记 $X'_{ik} = X_{ik} I(|X_{ik}| \leq j^{1/2} \varepsilon^2)$, $h'_{ik} = X'_{ik} - E(X'_{ik} | T_j)$, $h''_{ik} = h_{ik} - h'_{ik}$. 则当 n 充分大时得

$$\begin{aligned}
P\left\{\max_{1 \leq j \leq n} |b_{nj}| \geq \varepsilon\right\} &\leq P\left\{\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^p |h'_{jk}| \geq C\sqrt{n}\varepsilon\right\} \\
&\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p P\left\{|h'_{jk}| \geq \frac{C}{p}\sqrt{n}\varepsilon\right\} \\
&\leq \frac{C}{n} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n E(X_{jk}^2 I(|X_{jk}| \geq j^{1/2}\varepsilon^2)) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^p EX_{jk}^2 + C \sum_{k=1}^p E(X_{jk}^2 I(|X_{jk}| \geq n^{1/4}\varepsilon^2)) \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

(57)式得证.

定理 2 的证明. 由文献[8]知在定理条件下有

$$\begin{aligned}
E(\hat{g}_{1n}(t) - g_1(t))^2 &= O(n^{-2/3}), \\
E(\hat{g}_{2nj}(t) - g_{2j}(t))^2 &= O(n^{-2/3}), \quad 1 \leq j \leq p,
\end{aligned}$$

其中 $\hat{g}_{2nj}(t) = \sum_{i=1}^n w_{ni}(t)X_{ij}$ 是 $\hat{g}_{2n}(t)$ 的第 j 个分量. 因而

$$\hat{g}_{1n}(t) - g_1(t) = O_p(n^{-1/3}), \quad (58)$$

$$\hat{g}_{2nj}(t) - g_{2j}(t) = O_p(n^{-1/3}), \quad 1 \leq j \leq p. \quad (59)$$

记 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$, $\hat{\beta}_n = (\hat{\beta}_{n1}, \dots, \hat{\beta}_{np})'$. 由模型(1)求条件期望知 $g(t) = g_1(t) - g_2'(t)\beta$, $0 \leq t \leq 1$. 于是有

$$\begin{aligned}
g_n^*(t) - g(t) &= \hat{g}_{1n}(t) - g_1(t) - \sum_{j=1}^p (\hat{g}_{2nj}(t) - g_{2j}(t))(\hat{\beta}_{nj} - \beta_j) \\
&\quad - \sum_{j=1}^p (\hat{g}_{2nj}(t) - g_{2j}(t))\beta_j - \sum_{j=1}^p g_{2j}(t)(\hat{\beta}_{nj} - \beta_j).
\end{aligned}$$

因而由定理 1 及(58), (59)式即得(13)式.

定理 3 的证明. 我们有

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n} \tilde{Y}'(I_n - \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}')\tilde{Y} \\
&= \frac{1}{n} e'(I_n - \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}')e + \frac{1}{n} \tilde{G}'(T)(I_n - \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}')\tilde{G}(T) \\
&\quad + \frac{2}{n} \tilde{G}'(T)(I_n - \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}')e \triangleq I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned} \quad (60)$$

注意到 $I_n - \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}' \leq I_n$, 有

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (g(T_i) - \hat{g}_n(T_i))^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ni}(T_i)g(T_s) \right)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{s=1}^n w_{ni}(T_i)e_s \right)^2 \\
&\quad - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ni}(T_i)g(T_s) \right) \left(\sum_{s=1}^n w_{ni}(T_i)e_s \right) \triangleq I_4 + I_5 - I_6,
\end{aligned}$$

由(39),(34)式,条件(a)和(b)及引理3知

$$\begin{aligned}\sqrt{n} EI_4 &\leq C \sqrt{n} \left(\left(\sum_{i>k} v_{ns} \right)^2 + E \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k,t)} - t| \right)^2 \right) \rightarrow 0 \\ \sqrt{n} EI_5 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E \left(\sum_{s=1}^n w_{ns}^2(T_i) e_i^2 + \sum_{i_1 \neq i_2} w_{ns_1}(T_{i_1}) w_{ns_2}(T_{i_2}) e_{i_1} e_{i_2} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E \left(\sum_{s=1}^n w_{ns}^2(T_i) \right) = \sigma^2 \sqrt{n} \left(\sum_{s=1}^n v_{ns}^2 \right) \rightarrow 0,\end{aligned}$$

再注意到 $EI_6 = 0$, 因而 $\sqrt{n} EI_2 \rightarrow 0$, 此即

$$\sqrt{n} I_2 \xrightarrow{P} 0. \quad (61)$$

又由 A_n 的定义知 $A_n' A_n = \tilde{X}(\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}'$, 于是

$$I_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{n i k} e_k \right)^2 \triangleq I_7 - I_8,$$

注意到 $\{a_{n i j}\}$ 只与 $\{(X_i, T_i)\}$ 有关, 与 $\{e_i\}$ 独立. 由(56)式得

$$EI_8 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p E \left(\sum_{k=1}^n a_{n i k}^2 e_k^2 + \sum_{k_1 \neq k_2} a_{n i k_1} a_{n i k_2} e_{k_1} e_{k_2} \right) = \frac{p}{n} \sigma^2,$$

因而 $\sqrt{n} I_8 \xrightarrow{P} 0$, 而由通常的中心极限定理知

$$\sqrt{n} (I_7 - \sigma^2) / (\text{var } e_i^2)^{1/2} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1),$$

由此及(60),(61)式知为证(14)式只需证

$$\sqrt{n} I_3 \xrightarrow{P} 0. \quad (62)$$

为此,我们有

$$\begin{aligned}I_3 &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (g(T_i) - \hat{g}_n(T_i)) e_i - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{n i j} e_i \right) \left(\sum_{i=1}^n a_{n i j} (g(T_i) - \hat{g}_n(T_i)) \right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_i) g(T_s) \right) e_i - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_i) e_i e_s \\ &\quad - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{n i j} e_i \right) \left(\sum_{i=1}^n a_{n i j} \left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_i) g(T_s) \right) \right) \\ &\quad + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{n i j} e_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{n i j} w_{ns}(T_i) e_s \right) \\ &\triangleq I_9 - I_{10} - \sum_{j=1}^p I_{11j} + \sum_{j=1}^p I_{12j}.\end{aligned} \quad (63)$$

利用(39)式及有关独立性有

$$\begin{aligned}EI_9^2 &= \left(\frac{2}{n} \right)^2 \sum_{i=1}^n E \left[\left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_i) g(T_s) \right)^2 e_i^2 \right] \\ &\quad + \left(\frac{2}{n} \right)^2 \sum_{i \neq j} E \left[\left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_i) g(T_s) \right) \left(g(T_j) - \sum_{s=1}^n w_{ns}(T_j) g(T_s) \right) e_i e_j \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sigma^2 \sum_{i=1}^n E \left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ni}(T_i) g(T_s) \right)^2 \\
&\leq \frac{C}{n} \left(\left(\sum_{s>k} v_{ni} \right)^2 + E \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k,t)} - t| \right)^2 \right).
\end{aligned} \quad (64)$$

为计算 EL_{10}^2 , 首先有

$$E(e_i e_j e_k e_l) = \begin{cases} E e_1^4 & \text{当 } i = j = k = l; \\ \sigma^4 & \text{当 } i = j \neq k = l, i = k \neq j = l, i = l \neq j = k; \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

又由 $R(i, t)$ 的定义及(4)式易见

$$w_{ni}(T_i) = v_{ni} \leq C/k, \quad 1 \leq i \leq n,$$

由此及(34)式可得

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} w_{ni}^2(T_i) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{s=1}^n w_{ni}^2(T_i) \right) - \sum_{i=1}^n w_{ni}^2(T_i) = n \sum_{i=2}^n v_{ni}^2, \\
\sum_{i \neq j} w_{ni}(T_i) w_{nj}(T_i) &\leq \left(\sum_{i \neq j} w_{ni}^2(T_i) \right)^{1/2} \left(\sum_{i \neq j} w_{nj}^2(T_i) \right)^{1/2} = n \sum_{i=2}^n v_{ni}^2.
\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}
EL_{10}^2 &= \left(\frac{2}{n}\right) \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l E(w_{ni}(T_i) w_{nk}(T_l)) E(e_i e_j e_k e_l) \\
&= \left(\frac{2}{n}\right)^2 (E e_1^4) E \left(\sum_{i=1}^n w_{ni}^2(T_i) \right) \\
&\quad + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sigma^4 E \left(\sum_{i \neq j} w_{ni}(T_i) w_{nj}(T_i) + \sum_{i \neq j} w_{ni}^2(T_i) + \sum_{i \neq j} w_{ni}(T_i) w_{ni}(T_i) \right) \\
&\leq \frac{C}{n} v_{n1}^2 + \frac{C}{n} \left(2 \sum_{i=2}^n v_{ni}^2 + (n-1) v_{n1}^2 \right) \\
&\leq C v_{n1}^2 + \frac{C}{n} \left(\frac{1}{k} + \sum_{i>k} v_{ni} \right).
\end{aligned} \quad (65)$$

利用(39), (56)式及有关独立性, 由 Cauchy 不等式易得

$$\begin{aligned}
EL_{11}^2 &= \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sigma^2 E \left[\left(\sum_{i=1}^n a_{nii} \left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ni}(T_i) g(T_s) \right) \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n a_{nii}^2 \right) \right] \\
&\leq \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sigma^2 \sum_{i=1}^n E \left(g(T_i) - \sum_{s=1}^n w_{ni}(T_i) g(T_s) \right)^2 \\
&\leq \frac{C}{n} \left(\left(\sum_{s>k} v_{ni} \right)^2 + E \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |T_{R(k,t)} - t| \right)^2 \right).
\end{aligned} \quad (66)$$

最后, 若记 $b_{nii} = \sum_{s=1}^n a_{nii} w_{ni}(T_s)$, $1 \leq i \leq n$. 则类似于 L_{10} 有

$$EL_{12}^2 = \left(\frac{2}{n}\right)^2 E \left(\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{nii} b_{nii} e_i e_s \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{n}\right)^2 (E e_1^4) E \left(\sum_{i=1}^n a_{ni}^2 b_{ni}^2 \right) \\
&\quad + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sigma^4 E \left(\sum_{i \neq s} a_{ni}^2 b_{ni}^2 + 2 \sum_{i \neq s} a_{ni} b_{ni} a_{si} b_{si} \right) \\
&\leq \left(\frac{2}{n}\right)^2 (E e_1^4) E \left(\sum_{i=1}^n b_{ni}^2 \right) + 3 \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sigma^4 E \left(\sum_{i=1}^n b_{ni}^2 \right) \\
&\leq \frac{C}{n^2} E \left(\sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^n w_{si}^2(T_s) \right) = \frac{C}{n} \sum_{s=1}^n v_{ns}^2. \tag{67}
\end{aligned}$$

由(63)–(67)式, 条件 (a) 和 (b) 及引理 3 得 $nEI_3^2 \rightarrow 0$, 此即(62)式。

参 考 文 献

- [1] Chen, H., *Ann. Statist.*, **16**(1988), 136–146.
- [2] Speckman, P., *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **50**(1988), 413–436.
- [3] Stone, C., *Ann. Statist.*, **8**(1980), 1348–1360.
- [4] Cheng, P. E., *J. Mult. Anal.*, **15**(1984), 63–72.
- [5] Schick, A., *Ann. Statist.*, **14**(1986), 1139–1151.
- [6] Arnold, S. F., *The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis.*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [7] Dvoretzky, A., *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, Univ. of California Press, Vol. 2, 1972, 513–555.
- [8] Wei, L. S. & Su, C., *J. Math. Res. & Exp.*, **2**(1986), 117–123.