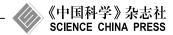
www.scichina.com

math.scichina.com



拟 Hermite 流形间拟调和映照的不稳定性问题

种田*, 东瑜昕, 任益斌

复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: valery4619@sina.com, yxdong@fudan.edu.cn, allenrybqqm@hotmail.com

收稿日期: 2014-02-03; 接受日期: 2014-12-22; * 通信作者

国家自然科学基金(批准号: 11271071)和复旦大学非线性数学模型与方法开放实验室资助项目

摘要 本文推导了拟 Hermite 流形间拟调和映照的第二变分公式. 当目标流形为复 Euclid 空间中等距嵌入 CR 流形或者是 Heisenberg 群中的拟 Hermite 浸入子流形时, 本文给出了在 Weingarten 变换满足一定条件下, 有关拟调和映照不稳定性的若干结果.

关键词 拟 Hermite 流形 Weingarten 变换 拟调和映照的不稳定性

MSC (2010) 主题分类 58E20

1 引言

调和映照是能量泛函的临界点. 如果一个调和映照的第二变分是非负的, 即映照的指标为 0, 那么称此映照是稳定的. 稳定性问题一直是调和映照理论中的重要问题. 文献 [1] 中, Smith 对 Riemann 流形间的恒等映照的指标做了估计, 特别地, 他证明了球面 S^m 间恒等映照的指标为 m+1. 文献 [2] 中, Xin 证明了当 $m \ge 3$ 时, 任意从球面出发的非常值的调和映照 $f: S^m \to N^n$ 是不稳定的, 这里 N 是任意 Riemann 流形. 而 Leung 在文献 [3] 中证明了任何从紧致 Riemann 流形到球面的非常值调和映照是不稳定的. Howard 和 Wei 将此结论推广到目标流形是 Euclid 空间紧致浸入子流形的情形 (参见文献 [4]).

为了研究更多几何对象的性质,一些广义调和映照在各类几何背景下被引进,比如 p- 调和映照、F-调和映照等. 近几年, 拟 Hermite 几何受到了广泛关注,许多黎曼几何中的问题都可在此背景下提出. 例如, CR Yamabe 问题 (参见文献 [5–8])、CR Obata 问题 (参见文献 [9–12]) 等. 特别地, 拟调和映照的概念也在此背景下被推广 (参见文献 [1,13–15]). 此外, 在拟 Hermite 几何中, Sasakian 几何扮演了非常重要的角色,几何学家也在探究其几何性质方面做了许多努力 (参见文献 [16–18]). 对两个拟 Hermite 流形间的映照

$$f: (M^{2m+1}, H(M), J, \theta) \to (N, \widetilde{H}(N), \widetilde{J}, \widetilde{\theta}),$$

Petit 在文献 [15] 中引入了一种新的水平能量泛函 $E_{H,\tilde{H}}(f)$. 他推导了关于 $E_{H,\tilde{H}}(f)$ 的第一变分公式并且将此能量泛函的临界点称为拟调和映照. 注意到在此变分公式中需要对目标流形的拉回挠率做限制, 这样会对研究第二变分公式带来不便. 本文的第二作者东瑜昕在文献 [14] 中通过将变分向量场限制为水平方向, 对 Petit 提出的变分问题稍作了修正. 这较之于 Petit 引入的全方向变分, 更能体现水

英文引用格式: Chong T, Dong Y X, Ren Y B. Instability of pseudoharmonic maps between pseudo-Hermite manifolds (in Chinese).

Sci Sin Math, 2015, 45: 795–818, doi: 10.1360/012015-1

平结构的作用. 他将此限制变分问题下得到的能量临界点仍称为拟调和映照. 除此之外, 他还推导了当目标流形为 Sasakian 时拟调和映照的第二变分公式, 并且证明了任意从闭的拟 Hermite 流形到奇维数球的非常值水平拟调和映照是不稳定的.

本文将会把上面有关结论推广到目标流形是等距嵌入 CR 流形或者 Heisenberg 群的拟 Hermite 浸入子流形的情形, 并且给出恒等映照 $I:S^{2n+1}\to S^{2n+1}$ $(n\geqslant 1)$ 指标的下界估计. 首先我们推导了目标流形为一般拟 Hermite 流形时拟调和映照的第二变分公式. 证明了当 Weingarten 变换满足一定条件时, 不存在从闭的拟 Hermite 流形到等距浸入 CR 流形的稳定的非常值水平拟调和映照. 接下来我们考虑了恒等映照 $I:S^{2n+1}\to S^{2n+1}$, 从上述讨论可知 I 是不稳定的. 根据文献 [19] 中的讨论, 我们对 I 的不稳定性的程度进行了研究并且得到 I 的拟指标是大于等于 2n+2 的. 本文最后证明了当CR-Weingarten 变换满足一定条件时, 任意从闭的拟 Hermite 流形出发到 Heisenberg 群的拟 Hermite 浸入子流形的非常值水平拟调和映照都是不稳定的.

2 基本概念

设 M 是一个实 2m+1 维的光滑流形, 用 $TM \otimes \mathbb{C}$ 表示 M 的复化切空间. 设 $T_{1,0}M$ 是 M 的复化切丛 $TM \otimes \mathbb{C}$ 的一个复子空间, 其复维数为 m. 如果 $T_{1,0}M$ 满足 $T_{1,0}M \cap T_{0,1}M = \{0\}$ 以及 $[T_{1,0}M,T_{1,0}M] \subseteq T_{1,0}M$, 则称 $T_{1,0}M$ 为 M 上的一个 CR 结构, 这里 $T_{0,1}M = \overline{T_{1,0}M}$, 并且称 $(M,T_{1,0}M)$ 为一个 CR 流形, 整数 m 为 CR 维数.

令 $H(M) = \operatorname{Re}\{T_{1,0}M \oplus T_{0,1}M\}$, 它是实数维为 2m 的 TM 的子丛. 称此子丛为 CR 流形 $(M,T_{1,0}M)$ 的 Levi 分布. 可以按如下方式在 H(M) 上定义一个复结构 $J_b:H(M)\to H(M)$: 对任意的 $V\in\Gamma(T_{1,0}M)$,

$$J_b(V + \overline{V}) = \sqrt{-1}(V - \overline{V}).$$

定义 2.1 设 $(M, T_{1,0}M)$ 和 $(N, T_{1,0}N)$ 是两个 CR 流形且 $f: M \to N$ 是光滑映照. 如果对任意的 $x \in M$, 有 $(d_x f)(T_{1,0}M)_x \subseteq (T_{1,0}N)_{f(x)}$, 则称 f 为 CR 映照, 其中 $d_x f$ 表示 f 在点 x 处的微分.

设 $(M, T_{1,0}M)$ 是可定向的 CR 流形, 记 $E_x = \{\omega \in T_x^*M : \operatorname{Ker}(\omega) \supseteq H(M)_x\}$, 则 $E \to M$ 是一个可定向的线丛, 故 E 上存在一个整体定义的处处非零的截面 θ , 这样的截面称为 M 上的一个拟Hermite 结构. 每个拟 Hermite 结构对应一个 Levi 形式 L_{θ} , 定义方式如下: 对任意的 $Z, W \in \Gamma(T_{1,0}M)$,

$$L_{\theta}(Z, \overline{W}) = -\frac{\sqrt{-1}}{2}(d\theta)(Z, \overline{W}).$$

可以在 H(M) 上定义一个双线性形式 G_{θ} . 即对任意的 $X,Y \in \Gamma(H(M))$, 有

$$G_{\theta}(X,Y) = \frac{1}{2}(d\theta)(X,J_bY).$$

特别地, G_{θ} 是对称的.

定义 2.2 设 $(M, T_{1,0}M)$ 是一个定向的 CR 流形且 θ 是 M 上的一个拟 Hermite 结构. 如果它上的 Levi 形式是正定的,则称 $(M, T_{1,0}M)$ 是一个严格拟凸的 CR 流形.

注 2.3 本文只考虑严格拟凸的 CR 流形. 如果 $(M,T_{1,0}M)$ 是严格拟凸的, θ 是其拟 Hermite 结构且使得 L_{θ} 正定, 为了突出拟 Hermite 结构的重要性, 也记这样的 CR 流形为 $(M,H(M),J_{b},\theta)$, 并且称其为拟 Hermite 流形.

如果 $(M, H(M), J_b, \theta)$ 是一个拟 Hermite 流形, 则 M 上存在唯一一个处处非零的切向量场 T, 使 得

$$\theta(T) = 1, \quad T \, \rfloor \, d\theta = 0. \tag{2.1}$$

该向量场被称为特征方向, 有时也被称为 Reeb 方向, 立刻可得如下直和分解: $TM = H(M) \oplus RT$. 通过此分解可以将 G_{θ} 延拓定义到 TM 上. 这样可以按如下方式定义一个 M 上的 Riemann 度量 g_{θ} : 对于任意的 $X,Y \in \Gamma(TM)$, 有

$$g_{\theta}(X,Y) = G_{\theta}(\pi_H X, \pi_H Y) + \theta(X)\theta(Y),$$

其中 $\pi_H: TM \to H(M)$ 是关于上述直和分解的投射. 称 g_θ 为 M 上的 Webster 度量. 为方便起见, 本文用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 g_θ 或者 G_θ .

设 ∇ 是 M 上的一个线性联络, 用 T_{∇} 表示其挠率. 下面定义一个向量值的一形式 τ : $TM \to TM$: 对任意的 $X \in \Gamma(TM)$, $\tau X = T_{\nabla}(T,X)$.

通过令 JT=0,可将复结构 J_b 延拓成 M 上的 (1,1) 型张量场 J. 延拓后, 我们仍将 $(M,H(M),J,\theta)$ 称为拟 Hermite 流形.

同 Riemann 流形上的 Levi-Civita 联络相类似, 在拟 Hermite 流形上, 也存在一个典范联络, 它同时保持复结构和 Webster 度量.

定理 2.4 (参见文献 [1]) 设 $(M, H(M), J, \theta)$ 是一个拟 Hermite 流形, T 是其特征方向且 J 是复结构, q_{θ} 是其 Webster 度量, 则 TM 上存在唯一的线性联络 ∇ , 称之为 Tanaka-Webster 联络, 满足:

- (i) 分布 *H*(*M*) 关于 ∇ 平行;
- (ii) $\nabla J = 0, \nabla g_{\theta} = 0;$
- (iii) ∇ 的挠率 T_{∇} 满足对任意的 $Z,W \in \Gamma(T_{1.0}M)$:

$$T_{\nabla}(Z, W) = 0, (2.2)$$

$$T_{\nabla}(Z, \overline{W}) = 2\sqrt{-1}L_{\theta}(Z, \overline{W})T,$$
 (2.3)

$$\tau J + J\tau = 0. (2.4)$$

由定理 2.4 可得 $\nabla T = 0$ 和 $\nabla \theta = 0$. 将 M 上的向量值 1 形式 τ 称为 ∇ 的拟 Hermite 挠率.

注 2.5 拟 Hermite 挠率 τ 是 H(M)- 值的. 它关于 g_{θ} 是自伴的且它的迹 $\operatorname{tr}\tau=0$ (参见文献 [1, 第 37 页]). 记 $A(X,Y)=g_{\theta}(\tau X,Y)$. 则 A(X,Y)=A(Y,X). 如果一个拟 Herimitian 流形的拟 Hermite 挠率为 0, 那么将其称为 Sasakian 流形.

由于 Webster 度量是 M 上的一个 Riemann 度量, 用 ∇^{θ} 表示 (M,g_{θ}) 的 Levi-Civita 联络. 则有如下引理:

引理 2.6 (参见文献 [1]) 假设 $(M, H(M), J, \theta)$ 是一个拟 Hermite 流形. ∇ 表示其上的 Tanaka-Webster 联络, 则其挠率 T_{∇} 可表示为

$$T_{\nabla} = \theta \wedge \tau + d\theta \otimes T. \tag{2.5}$$

进一步, Levi-Civita 联络 ∇^{θ} 和 ∇ 之间有如下关系:

$$\nabla^{\theta} = \nabla - \left(\frac{1}{2}d\theta + A\right) \otimes T + \tau \otimes \theta + 2\theta \odot J. \tag{2.6}$$

这里 \odot 表示对称张量积, 即对任意的 $X,Y \in \Gamma(TM)$ 有 $2(\theta \odot J)(X,Y) = \theta(X)JY + \theta(Y)JX$.

例 2.7 (Heisenberg 群) Heisenberg 群 $\mathbf{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ 上的自然坐标为 $(z,t) = (z^1 = x^1 + \sqrt{-1}y^1, \ldots, z^n = x^n + \sqrt{-1}y^n, t)$, 群运算关系如下:

$$(z,t)\cdot(w,s) = (z+w,t+s+2\operatorname{Im}\langle z,w\rangle).$$

考虑 \mathbf{H}_n 如下的复向量场:

$$T_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} + \sqrt{-1}z^{\overline{\alpha}}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

这里 $\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} = \frac{1}{2} (\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}})$ 且 $z^{\alpha} = x^{\alpha} + \sqrt{-1} y^{\alpha}$, 那么 $T_{1,0}$ H_n 上的 CR 结构由 $\{T_1, \dots, T_n\}$ 张成.

$$\theta = dt + 2\sum_{i=1}^{n} (x_i dy_i - y_i dx_i)$$

构成 \mathbf{H}_n 上的一个拟 Hermite 结构 θ . 从而 $(\mathbf{H}_n, H(\mathbf{H}_n), J, \theta)$ 成为一个拟 Hermite 流形. 实际上它还是一个 Sasakian 流形. 详细证明可参见文献 [1].

本节最后来讨论怎样在拟 Hermite 流形上计算向量场的散度. 对于给定的向量场 $X \in \Gamma(TM)$, 可以按照如下方式计算其散度 $\mathrm{div} X$:

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}_{g_{\theta}}(\nabla^{\theta} X) = \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle \nabla_{e_{\lambda}}^{\theta} X, e_{\lambda} \rangle + \langle \nabla_{T}^{\theta} X, T \rangle, \tag{2.7}$$

这里 $\{e_{\lambda}\}_{\lambda=1}^{2m}$ 是 H(M) 上的局部单位正交标架.

由于 $\nabla^{\theta} g_{\theta} = 0$, 利用 (2.6), 有

$$\begin{split} \operatorname{div} X &= \sum_{\lambda=1}^{2m} e_{\lambda} \langle X, e_{\lambda} \rangle - \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle X, \nabla^{\theta}_{e_{\lambda}} e_{\lambda} \rangle + T(\theta(X)) \\ &= \sum_{\lambda=1}^{2m} e_{\lambda} \langle X, e_{\lambda} \rangle - \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle X, \nabla_{e_{\lambda}} e_{\lambda} \rangle + \bigg(\frac{1}{2} d\theta + A \bigg) (e_{\lambda}, e_{\lambda}) \theta(X) + T(\theta(X)). \end{split}$$

注意到 $tr\tau = 0$, 那么

$$\operatorname{div} X = \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle \nabla_{e_{\lambda}} X, e_{\lambda} \rangle + T(\theta(X)). \tag{2.8}$$

特别地, 对于 $X \in \Gamma(H(M))$, (2.8) 变为

$$\operatorname{div} X = \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle \nabla_{e_{\lambda}} X, e_{\lambda} \rangle. \tag{2.9}$$

3 拟调和映照

设 $(M,H(M),J,\theta)$ 和 $(N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 是两个拟 Hermite 流形且 M 是闭的, M 和 N 的实维数分别为 2m+1 以及 2n+1.

对于任何光滑映照 $f: M \to N$, Petit 在文献 [15] 中引入了水平能量

$$E_{H,\widetilde{H}}(f) = \frac{1}{2} \int_{M} |df_{H,\widetilde{H}}|^2 dV_{\theta},$$

其中 $df_{H\widetilde{H}} = \pi_{\widetilde{H}} \circ df \circ i_H, \pi_{\widetilde{H}} : TN \to \widetilde{H}(N)$ 是自然投影, $i_H : H(M) \to TM$ 是包含映射.

记 ∇ 和 $\widetilde{\nabla}$ 分别是 M 和 N 上的 Tanaka-Webster 联络. 根据文献 [15], 可定义关于 $(\nabla,\widetilde{\nabla})$ 的第二基本形式, $\beta(X,Y)=(\widetilde{\nabla}_X df)(Y)=\widetilde{\nabla}_X df(Y)-df(\nabla_X Y)$. 这里仍用 $\widetilde{\nabla}$ 表示 $f^{-1}TN$ 上的拉回联络.

Petit 推导了关于水平能量 $E_{H,\tilde{H}}$ 的第一变分公式并且称其临界点为拟调和映照. 但在此公式中, 需要对拟 Hermite 挠率的拉回项做一些限制, 这将给计算第二变分公式带来不便. 本文第二作者东瑜 昕在文献 [14] 中对此变分问题稍作修正, 他考虑将变分向量场限制成水平方向, 这样较之于 Petit 引入的全方向变分更能体现水平结构的作用,则有如下结论成立.

命题 3.1 (参见文献 [14,15]) 对于任何给定的水平向量场 $V \in \Gamma(f^{-1}\tilde{H}(N))$,若 $\{f_t\}(|t|<\varepsilon)$ 是一个单参数变换群,记 $f_0=f$ 以及 $V=\frac{\partial f_t}{\partial t}|_{t=0}$,则有

$$\frac{dE_{H,\widetilde{H}}(f_t)}{dt}\bigg|_{t=0} = -\int_{M} \langle V, \tau_{H,\widetilde{H}}(f) \rangle dV_{\theta},$$

其中

$$\tau_{H,\widetilde{H}}(f) = \operatorname{tr}_{G_{\theta}}(\beta_{H,\widetilde{H}} + (f^*\widetilde{\theta} \otimes f^*\widetilde{\tau})_{H,\widetilde{H}});$$

$$\beta_{H,\widetilde{H}} = \pi_{\widetilde{H}} \circ \beta|_{H(M) \times H(M)};$$

$$(f^*\widetilde{\theta} \otimes f^*\widetilde{\tau})_{H,\widetilde{H}} = \pi_{\widetilde{H}}[f^*\widetilde{\theta} \otimes f^*\widetilde{\tau}]|_{H(M) \times H(M)}.$$

称 $\tau_{H\widetilde{H}}$ 为 f 的拟张力场.

定义 3.2 (参见文献 [14]) 如果光滑映照 $f:(M,H(M),J,\theta)\to (N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 是水平能量 $E_{H,\widetilde{H}}$ 关于任意水平变分 $V\in\Gamma(f^{-1}\widetilde{H}(N))$ 的临界点, 则称 f 为拟调和映照.

推论 3.3 (参见文献 [14]) 光滑映照 $f:(M,H(M),J,\theta)\to (N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 是拟调和的当且仅当 $\tau_{H,\widetilde{H}}=0,$ 即 $\operatorname{tr}_{G_{\theta}}\{\beta_{H,\widetilde{H}}(f)+[(f^{*}\widetilde{\theta})\otimes (f^{*}\widetilde{\tau})]_{H,\widetilde{H}}\}=0.$

注 3.4 上述拟调和映照的概念与 Petit 在文献 [15] 中的定义稍有区别, 在文献 [14] 中, 作者证明了当目标流形为 Sasakian 流形时, 两种对于拟调和映照的定义方式是等价的. 本文将研究定义 3.2 意义下的拟调和映照.

在本节的最后我们给出一个引理, 在后面的讨论中将会用到.

引理 3.5 设 $f:(M,H(M),J,\theta)\to (N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 是两个拟 Hermite 流形间的光滑映照. 那么对于任意的 $X,Y\in \Gamma(TM)$,有

$$\widetilde{\nabla}_X df(Y) - \widetilde{\nabla}_Y df(X) = df([X,Y]) + \widetilde{\theta}(df(X))\widetilde{\tau}(df(Y)) - \widetilde{\theta}(df(Y))\widetilde{\tau}(df(X)) + d\widetilde{\theta}(df(X), df(Y))\widetilde{T}.$$
(3.1)

证明 设 $(U, x^1, \ldots, x^{2m+1})$ 和 $(V, y^1, \ldots, y^{2n+1})$ 分别是 M 和 N 上的局部坐标系 $(f(U) \subseteq V)$. 由于 $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$. 利用 (2.5),我们只需证明

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} df \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) - \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} df \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = T_{\widetilde{\nabla}} \left(df \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right), df \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right). \tag{3.2}$$

用 $(\frac{\partial}{\partial u^a})_f$ 表示拉回坐标系, 则

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} df \bigg(\frac{\partial}{\partial x^j} \bigg) - \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} df \bigg(\frac{\partial}{\partial x^i} \bigg)$$

$$\begin{split} &= \sum_{a=1}^{2n+1} \left[\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^{i}}} \frac{\partial f^{a}}{\partial x^{j}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y^{a}} \right)_{f} - \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^{j}}} \frac{\partial f^{a}}{\partial x^{i}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y^{a}} \right)_{f} \right] \\ &= \sum_{a,b=1}^{2n+1} \left[\frac{\partial f^{a}}{\partial x^{j}} \frac{\partial f^{b}}{\partial x^{i}} \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^{b}}} \frac{\partial}{\partial y^{a}} - \frac{\partial f^{a}}{\partial x^{i}} \frac{\partial f^{b}}{\partial x^{j}} \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^{b}}} \frac{\partial}{\partial y^{a}} \right] \\ &= \sum_{a,b=1}^{2n+1} \frac{\partial f^{a}}{\partial x^{i}} \frac{\partial f^{b}}{\partial x^{j}} T_{\widetilde{\nabla}} \left(\frac{\partial}{\partial y^{a}}, \frac{\partial}{\partial y^{b}} \right) \\ &= T_{\widetilde{\nabla}} \left(df \left(\frac{\partial}{\partial x^{i}} \right), df \left(\frac{\partial}{\partial x^{j}} \right) \right). \end{split} \tag{3.3}$$

证毕.

4 第二变分公式

在文献 [14] 中, 作者推导了目标流形为 Sasakian 时拟调和映照的第二变分公式. 本节将推导当目标流形是一般拟 Hermite 流形时, 拟调和映照的第二变分公式.

设 $f:(M,H(M),J,\theta)\to (N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 是两个拟 Hermite 流形间的光滑映照且 M 是闭的. 对于任给的单参数变换群 $\{f_t\}(|t|<\varepsilon)$, 记 $f_0=f,V=\frac{\partial f_t}{\partial t}|_{t=0}$, 令 $\Phi(\cdot,t)=f_t$ 且 $V_t=\frac{\partial f_t}{\partial t}$. 特别地, 要求对于任意 $t,V_t=\frac{\partial f_t}{\partial t}$ 是水平的, 即 $\frac{\partial f_t}{\partial t}\in\Gamma(f_t^{-1}(\widetilde{H}(N)))$.

由文献 [14] 中已有的第一变分公式, 我们可得

$$\begin{split} \frac{dE_{H,\widetilde{H}}(f_t)}{dt} &= \int_{M} \langle \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}), d\Phi_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}) \rangle dV_{\theta} \\ &= \int_{M} \left[\left\langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), d\Phi_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}) \right\rangle + \widetilde{\theta} \left(d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \langle \widetilde{\tau}(d\Phi(e_{\lambda})), d\Phi_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}) \rangle \\ &- \widetilde{\theta}(d\Phi(e_{\lambda})) \left\langle \widetilde{\tau} \left(d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right), d\Phi_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}) \right\rangle \right] dV_{\theta} \\ &= \int_{M} \left[- \left\langle d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} d\Phi_{H,\widetilde{H}})(e_{\lambda}) \right\rangle + \widetilde{\theta} \left(d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \langle \widetilde{\tau}(d\Phi(e_{\lambda})), d\Phi_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}) \rangle \\ &- \widetilde{\theta}(d\Phi(e_{\lambda})) \left\langle \widetilde{\tau} \left(d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right), d\Phi_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}) \right\rangle \right] dV_{\theta}. \end{split}$$

则

$$\frac{dE_{H,\widetilde{H}}(f_t)}{dt} = \int_M \left[-\langle V_t, \tau_{H,\widetilde{H}}(f_t) \rangle + \widetilde{\theta} \left(d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \langle \widetilde{\tau}(d\Phi(e_{\lambda})), d\Phi_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}) \rangle \right] dV_{\theta}.$$

注意到 f 是拟调和的且 $\frac{\partial f_t}{\partial t} \in \Gamma(f_t^{-1}(\widetilde{H}(N)))$ (任意的 t), 那么

$$\left.\frac{d^2 E_{H,\widetilde{H}}(f_t)}{dt^2}\right|_{t=0} = -\frac{d}{dt} \left\{ \left. \int_M \langle V_t, \tau_{H,\widetilde{H}}(f_t) \rangle dV_\theta \right\} \right|_{t=0} = -\int_M \langle V, \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau_{H,\widetilde{H}}(f_t) \rangle|_{t=0} dV_\theta.$$

用 \tilde{R} 表示关于 $\tilde{\nabla}$ 的曲率张量. 由 (3.1) 以及 $\tilde{\nabla}\theta = 0$, 可得

$$\begin{split} \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau_{H,\widetilde{H}}(f_t)|_{t=0} \\ &= \sum_{\lambda=1}^{2m} \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} [(\widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} df_{tH,\widetilde{H}})(e_{\lambda}) + (f_t^* \widetilde{\theta})(e_{\lambda}) \widetilde{\tau}(df_{tH,\widetilde{H}}(e_{\lambda}))]|_{t=0} \end{split}$$

$$\begin{split} &= \sum_{\lambda=1}^{2m} (\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} d\Phi_{H,\widetilde{H}})(e_{\lambda})|_{t=0} + \sum_{\lambda=1}^{2m} \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} [\widetilde{\theta}(d\Phi(e_{\lambda})) \widetilde{\tau}(d\Phi_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}))]|_{t=0} \\ &= \sum_{\lambda=1}^{2m} \left[\widetilde{R} \left(\frac{\partial}{\partial t}, e_{\lambda} \right) d\Phi_{H,\widetilde{H}} \right] (e_{\lambda}) \bigg|_{t=0} + \sum_{\lambda=1}^{2m} (\widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi_{H,\widetilde{H}})(e_{\lambda})|_{t=0} \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{2m} [d\widetilde{\theta}(V, df(e_{\lambda})) \widetilde{\tau}(df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda})) + \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda})) (\widetilde{\nabla}_{V} \widetilde{\tau})(df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}))] \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{2m} \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda})) \widetilde{\tau}(\widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V - \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda})) \widetilde{\tau}(V)). \end{split}$$

注意到 $G_{\widetilde{\theta}}(\cdot,\cdot) = \frac{1}{2}d\widetilde{\theta}(\cdot,\widetilde{J}\cdot)$. 那么

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau_{H,\widetilde{H}}(f_{t})|_{t=0}
= \sum_{\lambda=1}^{2m} \left[\widetilde{R} \left(\frac{\partial}{\partial t}, e_{\lambda} \right) d\Phi_{H,\widetilde{H}} \right] (e_{\lambda}) \Big|_{t=0} + \sum_{\lambda=1}^{2m} (\widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi_{H,\widetilde{H}}) (e_{\lambda})|_{t=0}
+ \sum_{\lambda=1}^{2m} \left[2 \langle \widetilde{J}V, df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}) \rangle \widetilde{\tau} (df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda})) + \widetilde{\theta} (df(e_{\lambda})) (\widetilde{\nabla}_{V} \widetilde{\tau}) (df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda})) \right]
+ \sum_{\lambda=1}^{2m} \widetilde{\theta} (df(e_{\lambda})) \widetilde{\tau} (\widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V) - \sum_{\lambda=1}^{2m} \left[\widetilde{\theta} (df(e_{\lambda})) \right]^{2} \widetilde{\tau}^{2} (V).$$
(4.1)

考虑到有如下分解: $df(e_{\lambda}) = \tilde{\theta}(df(e_{\lambda}))\tilde{T} + df_{H\tilde{H}}(e_{\lambda}),$ 则

 $\langle \widetilde{R}(V,df(e_{\lambda}))df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}),V\rangle = \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda}))\langle \widetilde{R}(V,\widetilde{T})df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}),V\rangle + \langle \widetilde{R}(V,df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}))df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}),V\rangle.$

由文献 [1] 中的 (1.77), 我们有

$$\begin{split} &\langle \widetilde{R}(V,df(e_{\lambda}))df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}),V\rangle \\ &= -\widetilde{\theta}(df(e_{\lambda}))\langle \widetilde{S}(df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}),V),V\rangle + \langle \widetilde{R}(V,df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}))df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}),V\rangle \\ &= -\widetilde{\theta}(df(e_{\lambda}))\langle (\widetilde{\nabla}_{df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda})}\widetilde{\tau})V - (\widetilde{\nabla}_{V}\widetilde{\tau})(df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda})),V\rangle + \langle \widetilde{R}(V,df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}))df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}),V\rangle. \end{split} \tag{4.2}$$

这里 \widetilde{S} 定义为: 对任意的 $X,Y \in \Gamma(TN)$, $\widetilde{S}(X,Y) = (\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\tau})(Y) - (\widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\tau})(X)$. 下面定义一个水平向量场 $X \in \Gamma(H(M))$.

$$X = \bigg[\sum_{\lambda=1}^{2m} \langle (\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi_{H,\widetilde{H}}) e_{\lambda}, V \rangle e_{\lambda} \bigg] \bigg|_{t=0}.$$

计算向量场 X 的散度, 通过应用散度定理和 (3.1), 有

$$\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle (\widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi_{H,\widetilde{H}})(e_{\lambda})|_{t=0}, V \rangle dV_{\theta}
= -\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle (\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi_{H,\widetilde{H}})(e_{\lambda}), \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V \rangle|_{t=0} dV_{\theta}
= -\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} [\langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V \rangle - \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda})) \langle \widetilde{\tau}(V), \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V \rangle] dV_{\theta}.$$
(4.3)

最后, 结合 (4.1)-(4.3), 可得如下定理.

定理 4.1 设 $f:(M,H(M),J,\theta)\to (N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 是两个拟 Hermite 流形间的拟调和映照且 M 是闭的. 若 $\{f_t\}(|t|<\varepsilon)$ 是 f 的单参数变换群且对任意的 t, 有 $\frac{\partial f_t}{\partial t}\in\Gamma(f_t^{-1}(\widetilde{H}(N)))$. 记 $f_0=f$ 以及 $V=\frac{\partial f_t}{\partial t}|_{t=0}$. 则能量泛函 $E_{H,\widetilde{H}}$ 的第二变分公式为

$$\begin{split} \frac{d^{2}E_{H,\widetilde{H}}(f_{t})}{dt^{2}}\bigg|_{t=0} &= \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \{\langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}}V, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}}V \rangle - \widetilde{R}(V, df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}), V, df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda})) \\ &+ \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda})) \langle (\widetilde{\nabla}_{df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda})} \widetilde{\tau})V, V \rangle + [\widetilde{\theta}(df(e_{\lambda}))]^{2} \langle \widetilde{\tau}(V), \widetilde{\tau}(V) \rangle \\ &- 2\widetilde{\theta}(df(e_{\lambda})) [\langle (\widetilde{\nabla}_{V} \widetilde{\tau}) (df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda})), V \rangle + \langle \widetilde{\tau}(V), \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}}V \rangle] \\ &- 2\langle df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}), \widetilde{\tau}V \rangle \langle df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}), \widetilde{J}V \rangle \} dV_{\theta}, \end{split}$$
(4.4)

这里 $\{e_{\lambda}\}_{\lambda=1}^{2m}$ 是 H(M) 的一组局部单位正交标架.

定义 4.2 (参见文献 [15]) 设 $f:(M,H(M),J,\theta)\to (N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 是两个拟 Hermite 流形间的光滑映照. 如果对任意的 $x\in M$ 有

$$(d_x f)(H_x M) \subseteq \widetilde{H}_{f(x)}(N), \tag{4.5}$$

则称 f 是水平的.

推论 4.3 设 $f:(M,H(M),J,\theta)\to (N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 是两个拟 Hermite 流形间的水平拟调和映照 (f 既是水平又是拟调和的),且 M 是闭的.若 $\{f_t\}(|t|<\varepsilon)$ 是 f 的单参数变换群,对任意的 t,有 $\frac{\partial f_t}{\partial t}\in\Gamma(f_t^{-1}(\widetilde{H}(N)))$.记 $f_0=f$ 以及 $V=\frac{\partial f_t}{\partial t}|_{t=0}$.那么能量泛函 $E_{H,\widetilde{H}}$ 的第二变分公式为

$$\frac{d^{2}E_{H,\widetilde{H}}(f_{t})}{dt^{2}}\Big|_{t=0} = \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} [\langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V \rangle - \widetilde{R}(V, df(e_{\lambda}), V, df(e_{\lambda})) \\
- 2\langle df(e_{\lambda}), \widetilde{\tau} V \rangle \langle df(e_{\lambda}), \widetilde{J} V \rangle] dV_{\theta}.$$
(4.6)

与普通调和映照的情形类似,同样可以引入有关拟 Hermite 流形间拟调和映照稳定性的概念.

定义 4.4 设 $f:(M,H(M),J,\theta)\to (N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 是一拟调和映照. 若对于任意单参数变换群 $\{f_t\}_{|t|<\epsilon},$ 记 $f_0=f,\ V=\frac{\partial f_t}{\partial t}|_{t=0}\in\Gamma(f^{-1}\widetilde{H}(N)),\ f_0=f,\ f_0=f,\ V=\frac{\partial f_t}{\partial t}|_{t=0}\in\Gamma(f^{-1}\widetilde{H}(N)),\ f_0=f,\ f_0=f,$

事实上, 如果要求对任意的 t, 都有 $\frac{\partial f_t}{\partial t} \in \Gamma(f_t^{-1} \widetilde{H}(N))$, 那么由定理 4.1 可得

$$\begin{split} \frac{d^{2}}{dt^{2}}\bigg|_{t=0}E_{H,\widetilde{H}}(f_{t}) &= \int_{M}\sum_{\lambda=1}^{2m}\{\langle\widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}}V,\widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}}V\rangle - \widetilde{R}(V,df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}),V,df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}))\\ &+ \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda}))\langle(\widetilde{\nabla}_{df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda})}\widetilde{\tau})V,V\rangle + [\widetilde{\theta}(df(e_{\lambda}))]^{2}\langle\widetilde{\tau}(V),\widetilde{\tau}(V)\rangle\\ &- 2\widetilde{\theta}(df(e_{\lambda}))[\langle(\widetilde{\nabla}_{V}\widetilde{\tau})(df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda})),V\rangle + \langle\widetilde{\tau}(V),\widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}}V\rangle]\\ &- 2\langle df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}),\widetilde{\tau}V\rangle\langle df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}),\widetilde{J}V\rangle\}dV_{\theta}. \end{split} \tag{4.7}$$

本文将会利用(4.7)研究一些拟调和映照不稳定性问题. 为了方便起见,将(4.7)的右端记为 $H_f(V,V)$.

注 4.5 当目标流形是 Sasakian 时,本文第二作者东瑜昕已经在文献 [14] 中推导了关于能量 $E_{H\tilde{H}}$ 的第二变分公式,如下:

$$\frac{d^{2}E_{H,\widetilde{H}}(f_{t})}{dt^{2}}\bigg|_{t=0} = \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} [\langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}} \rangle - \widetilde{R}(V, df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}), V, df_{H,\widetilde{H}}(e_{\lambda}))] dV_{\theta}. \tag{4.8}$$

这里 $\{f_t\}$ 是 f 关于 V 的单参数变换群, $V_{\tilde{H}}$ 表示 V 的水平部分. 他利用此公式给出了若干有关拟调和映照稳定或者不稳定性的结果.

5 到等距嵌入 CR 流形的拟调和映照

文献 [14] 中, 作者证明了任何从闭的拟 Hermite 流形到奇数维球面的非常值水平拟调和映照是不稳定的. 本节将会把此结论推广到目标流形为一般等距嵌入 CR 流形上.

设 $i: N \to \mathbb{C}^{n+k}$ ($\cong \mathbb{R}^{2n+2k}$) 是一个 (2n+1) 维的子流形 $(k \geqslant 1)$. 如果 N 是一个 CR 流形并且 其 CR 结构式由 \mathbb{C}^{n+k} 所诱导,即 $T_{1,0}(N) = T^{1,0}(\mathbb{C}^{n+k}) \cap (TN \otimes \mathbb{C})$,则称 N 是一个嵌入 CR 流形.

设 $\tilde{\theta}$ 是 N 上某个拟 Hermite 结构, 令 $g_{\tilde{\theta}}$ 是 $(N,\tilde{\theta})$ 的 Webster 度量, g_{can} 是 \mathbb{C}^{n+k} ($\cong \mathbb{R}^{2n+2k}$) 上 的典范度量. 如果 N 是一个嵌入 CR 流形且 $g_{\tilde{\theta}}=i^*g_{\text{can}}$. 则称 $(N,g_{\tilde{\theta}})$ 是一个等距嵌入 CR 流形. 自然 地, $(N,\tilde{H}(N),\tilde{J},\tilde{\theta})$ 成为一个拟 Hermite 流形, 其中 $\tilde{H}=\ker\tilde{\theta}$, \tilde{J} 是由 \mathbb{C}^{n+k} ($\cong \mathbb{R}^{2n+2k}$) 上标准的复结构 \hat{J} 所诱导的. 即: 对任意的 $X \in \Gamma(\tilde{H}(N))$, 有

$$\widetilde{J}X = \widehat{J}X. \tag{5.1}$$

令 \tilde{T} 是 $(N,\tilde{\theta})$ 的特征方向, 如果 $T^{\perp}N$ 记为 N 在 \mathbb{C}^{n+k} ($\cong \mathbb{R}^{2n+2k}$) 中的法丛, 则存在向量场 $\xi \in \Gamma(T^{\perp}N)$ 使得

$$\widetilde{T} = \widehat{J}\xi|_{N}.\tag{5.2}$$

例 5.1 (参见文献 [1,14]) 标准的奇维数球 $i:S^{2n+1}\hookrightarrow\mathbb{C}^{n+1}$ 是一个等距嵌入 CR 流形并且它也是 Sasakian 的.

若无特殊说明本节将始终假定 $(N, \widetilde{H}(N), \widetilde{J}, \widetilde{\theta})$ 是等距嵌入 CR 流形. 设 $\widehat{\nabla}$ 是 \mathbb{C}^{n+k} ($\cong \mathbb{R}^{2n+2k}$) 上标准的平坦联络, $\widehat{\nabla}^{\theta}$ 是 $(N, g_{\widetilde{\theta}})$ 上的 Levi-Civita 联络, h 是 N 在 \mathbb{C}^{n+k} ($\cong \mathbb{R}^{2n+2k}$) 中的第二基本形式. 则它们有如下关系:

$$\widehat{\nabla}_X Y = \widetilde{\nabla}_X^{\theta} Y + h(X, Y), \tag{5.3}$$

这里 $X, Y \in \Gamma(TN)$.

对于任意的 $\eta \in \Gamma(T^{\perp}N)$ 以及 $X \in \Gamma(TN)$,可按如下方式定义 Weingarten 变换 $A_{\eta}X$ 以及法丛上的联络 $\nabla_{x}^{\perp}\eta$:

$$\widehat{\nabla}_X \eta = -A_n X + \nabla_X^{\perp} \eta. \tag{5.4}$$

则 h 和 A 有如下关系:

$$\langle A_{\eta}X, Y \rangle = \langle h(X, Y), \eta \rangle,$$
 (5.5)

这里 X 和 Y 切于 N, η 垂直于 N. 显然, h(X,Y) 关于 X 和 Y 是对称的且对任意 η , 线性映照 A_{η} 是自伴的.

令 $\{v_{2n+2},\dots,v_{2n+2k}\}$ 是点 $y\in N$ 处法空间 $T_y^\perp N$ 中的一组单位正交基. 下面定义一个线性映照 $Q_y^N\colon T_yN\to T_yN$:

$$Q_y^N = \sum_{\alpha=2n+2}^{2n+2k} \{ 2(\pi_{\tilde{H}} A_{v_\alpha})^2 - \operatorname{tr}_{G_{\tilde{\theta}}}(A_{v_\alpha}) \cdot A_{v_\alpha} + 2A_{\xi}^2 - 4Id \},$$
 (5.6)

这里 $\operatorname{tr}_{G_{\widetilde{\theta}}}(A_{v_{\alpha}}) = \sum_{j=1}^{2n} \langle A_{v_{\alpha}}(X_j), X_j \rangle$ 且 $\{X_j: 1 \leqslant j \leqslant 2n\}$ 是 $\widetilde{H}(N)$ 上的一组局部单位正交标架. 不难验证 Q_y^N 的定义并不依赖于点 y 处标准正交基的选取. 另外, 对于任意的 $X,Y \in \widetilde{H}_y(N)$, $\langle Q_y^N X, Y \rangle = \langle X, Q_y^N Y \rangle$.

由子流形的 Gauss 公式, 关于 $\tilde{\nabla}^{\theta}$ 的曲率张量由下述等式给出,

$$\widetilde{R}^{\theta}(X, Y, Z, W) = \langle h(Y, W), h(X, Z) \rangle - \langle h(X, W), h(Y, Z) \rangle, \tag{5.7}$$

这里 $X, Y, Z, W \in \Gamma(TN)$.

设 $\widetilde{\nabla}$ 是 $(N, \widetilde{H}(N), \widetilde{J}, \widetilde{\theta})$ 上的 Tanaka-Webster 联络且 $\widetilde{\tau}$ 是其上的拟 Hermite 挠率. 则关于 $\widetilde{\nabla}$ 的 截面曲率为 (参见文献 [1, 第 49 页]),

$$\widetilde{R}(X,Y,X,Y) = \widetilde{R}^{\theta}(X,Y,X,Y) + 3\langle \widetilde{J}X,Y \rangle^{2} - \langle \widetilde{\tau}X,Y \rangle^{2} + \langle \widetilde{\tau}X,X \rangle \langle \widetilde{\tau}Y,Y \rangle,$$

这里 $X, Y \in \Gamma(\widetilde{H}(N))$. 那么由 (5.7) 可得

$$\widetilde{R}(X,Y,X,Y) = \langle h(X,X), h(Y,Y) \rangle - |h(X,Y)|^2 + 3\langle \widetilde{J}X,Y \rangle^2 - \langle \widetilde{\tau}X,Y \rangle^2 + \langle \widetilde{\tau}X,X \rangle \langle \widetilde{\tau}Y,Y \rangle, \tag{5.8}$$

这里 $X,Y \in \Gamma(\widetilde{H}(N))$. 下面我们证明一个引理, 它将在后面的讨论中用到.

引理 5.2 令 $\xi \in \Gamma(T^{\perp}N)$ 是 (5.2) 中所定义的向量场. 对任意的 $X \in \Gamma(\widetilde{H}(N))$, 有

- (i) $\langle A_{\varepsilon} \widetilde{T}, X \rangle = 0$,
- (ii) $A_{\xi}X = \widetilde{J}\widetilde{\tau}X X$.

证明 首先, 令 (5.3) 中的 X 和 Y 都为 \widetilde{T} , 由于 $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\sigma}}^{\theta}\widetilde{T}=0$, 可得

$$\widehat{\nabla}_{\widetilde{T}}\widetilde{T} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}}^{\theta}\widetilde{T} + h(\widetilde{T}, \widetilde{T}) = h(\widetilde{T}, \widetilde{T}). \tag{5.9}$$

利用 (5.2), 对任意的 $X \in \Gamma(\widetilde{H}(N))$, 有

$$\langle A_{\xi}\widetilde{T}, X \rangle = -\langle (\widehat{\nabla}_{\widetilde{T}}\xi)^{\top}, X \rangle = \langle \widehat{\nabla}_{\widetilde{T}}\widehat{J}\widetilde{T}, X \rangle. \tag{5.10}$$

注意到 $\widehat{\nabla}\widehat{J} = 0$ 和 $\widehat{J}^2 = -1$. 那么利用 (5.1) 和 (5.9), (5.10) 变为

$$\langle A_{\xi}\widetilde{T}, X \rangle = -\langle \widehat{\nabla}_{\widetilde{T}}\widetilde{T}, \widetilde{J}X \rangle = -\langle h(\widetilde{T}, \widetilde{T}), \widetilde{J}X \rangle. \tag{5.11}$$

由于 $h(\widetilde{T}, \widetilde{T}) \in \Gamma(T^{\perp}N)$ 以及 $\widetilde{J}X \in \Gamma(TN)$, (i) 已证毕.

利用 (2.6) 和 $\widetilde{\nabla}\widetilde{T}=0$, 可得

$$\begin{split} \widehat{\nabla}_{\widetilde{T}} X &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}}^{\theta} X + h(\widetilde{T}, X) \\ &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} X + \widetilde{J} X + h(\widetilde{T}, X) \\ &= \widetilde{\tau} X + [\widetilde{T}, X] + \widetilde{J} X + h(\widetilde{T}, X). \end{split} \tag{5.12}$$

因为 $\hat{\nabla}$ 是无挠的, 故上述等式变为

$$\widehat{\nabla}_X \widetilde{T} = \widehat{\nabla}_{\widetilde{T}} X - [\widetilde{T}, X] = \widetilde{\tau} X + \widetilde{J} X + h(\widetilde{T}, X). \tag{5.13}$$

由 $\widehat{\nabla}\widehat{J} = 0$, 利用 (5.2), (5.13) 可被改写为 $-\widehat{\nabla}_X \xi = \widetilde{J}\widetilde{\tau}X - X + \widehat{J}h(\widetilde{T}, X)$. 从而

$$A_{\xi}X = \widetilde{J}\widetilde{\tau}X - X + [\widehat{J}h(\widetilde{T}, X)]^{\top}. \tag{5.14}$$

对于任意的 $Y \in \Gamma(\widetilde{H}(N))$, 因为 $h(\widetilde{T}, X) \in \Gamma(T^{\perp}N)$ 并且 $\widehat{J}^2 = -1$, 利用 (5.1) 有

$$\langle \widehat{J}h(\widetilde{T},X),Y\rangle = -\langle h(\widetilde{T},X),\widetilde{J}Y\rangle = 0.$$
 (5.15)

另一方面, 因为 $\hat{J}^2 = -1$, 所以结合 (5.1), (5.2) 和 (5.5), 简单的计算可得

$$\langle \widehat{J}h(\widetilde{T},X), \widetilde{T} \rangle = \langle A_{\varepsilon}\widetilde{T}, X \rangle.$$
 (5.16)

最后利用 (i) 的结论, 有

$$\langle \widehat{J}h(\widetilde{T},X),\widetilde{T}\rangle = 0. \tag{5.17}$$

再利用 (5.15) 和 (5.17) 可得 $[\widehat{J}h(\widetilde{T},X)]^{\top}=0$. 将其带入 (5.14), 有 $A_{\xi}X=\widetilde{J}\widetilde{\tau}X-X$. 引理证毕. \Box 设 a 是 \mathbb{C}^{n+k} ($\cong \mathbb{R}^{2n+2k}$) 中的向量场. 分别记 a^{\top} 和 a^{\perp} 为切于以及垂直于 N 的向量场. 根据分解 $TN=\widetilde{H}(N)\oplus\mathbb{R}\widetilde{T}$, 可将 a^{\top} 写成 $a^{\top}=\pi_{\widetilde{H}}a^{\top}+\langle a,\widetilde{T}\rangle\widetilde{T}$. 记 $a_{\widetilde{H}}=\pi_{\widetilde{H}}a^{\top}$. 则

$$a_{\widetilde{H}} = a - a^{\perp} - \langle a, \widetilde{T} \rangle \widetilde{T}, \tag{5.18}$$

显然 $a_{\widetilde{H}} \in \Gamma(\widetilde{H}(N))$.

引理 5.3 设 a 是一个常值向量场. 对于上述定义的 $a_{\widetilde{H}}$, 对任意的 $X \in \Gamma(\widetilde{H}(N))$, 有

$$\widetilde{\nabla}_X a_{\widetilde{H}} = A_{a^\perp} X - \langle A_{a^\perp} X, \widetilde{T} \rangle \widetilde{T} - \langle a, \widetilde{T} \rangle \widetilde{\tau} X - \langle a, \widetilde{T} \rangle \widetilde{J} X.$$

证明 注意到 $G_{\widetilde{\theta}} = \frac{1}{2}d\widetilde{\theta}(\cdot,\widetilde{J}\cdot)$ 以及 $\widehat{\nabla}a = 0$. 利用 (2.6) 和 (5.13), 简单的计算可得

$$\begin{split} \widetilde{\nabla}_X a_{\widetilde{H}} &= \widetilde{\nabla}_X^\theta a_{\widetilde{H}} + \frac{1}{2} d\widetilde{\theta}(X, a_{\widetilde{H}}) \widetilde{T} + \widetilde{A}(X, a_H) \widetilde{T} \\ &= [\widehat{\nabla}_X (a - a^\perp - \langle a, \widetilde{T} \rangle \widetilde{T})]^\top + \langle \widetilde{J}X, a \rangle \widetilde{T} + \langle \widetilde{\tau}X, a \rangle \widetilde{T} \\ &= (-\widehat{\nabla}_X a^\perp)^\top - X \langle a, \widetilde{T} \rangle \widetilde{T} - \langle a, \widetilde{T} \rangle (\widehat{\nabla}_X \widetilde{T})^\top + \langle \widetilde{J}X, a \rangle \widetilde{T} + \langle \widetilde{\tau}X, a \rangle \widetilde{T} \\ &= A_{a^\perp} X - \langle a, \widehat{\nabla}_X \widetilde{T} \rangle \widetilde{T} - \langle a, \widetilde{T} \rangle (\widetilde{\tau}X + \widetilde{J}X) + \langle \widetilde{J}X, a \rangle \widetilde{T} + \langle \widetilde{\tau}X, a \rangle \widetilde{T} \\ &= A_{a^\perp} X - \langle A_{a^\perp} X, \widetilde{T} \rangle \widetilde{T} - \langle a, \widetilde{T} \rangle \widetilde{\tau}X - \langle a, \widetilde{T} \rangle \widetilde{J}X. \end{split}$$

证毕.

设 $f: (M, H(M), J, \theta) \to (N, \tilde{H}(N), \tilde{J}, \tilde{\theta})$ 是 M 和 N 之间的水平拟调和映照, a 是 \mathbb{C}^{n+k} ($\cong \mathbb{R}^{2n+2k}$) 中的常值向量场. 用 $\varphi_t(|t| < \epsilon)$ 表示由 $a_{\tilde{H}}$ 生成的单参数变换群. 可将 $a_{\tilde{H}}$ 看成沿 f 的水平变分向量场, 则它的单参数变换群为 $f_t = \varphi_t \circ f$, $f_0 = f$, $\frac{\partial f_t}{\partial t}|_{t=0} = a_{\tilde{H}}$. 由于 $a_{\tilde{H}}$ 是水平的, 从而对任意的 t 来说, $\frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \circ f$ 也是水平的.

由推论 4.3, 第二变分公式可写成如下形式,

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} E_{H,\widetilde{H}}(f_t) = \int_M \sum_{\lambda=1}^{2m} [|\widetilde{\nabla}_{df(e_{\lambda})} a_{\widetilde{H}}|^2 - \widetilde{R}(a_{\widetilde{H}}, df(e_{\lambda}), a_{\widetilde{H}}, df(e_{\lambda}))]$$

$$-2\langle df(e_{\lambda}), \widetilde{\tau}a_{\widetilde{H}}\rangle \langle df(e_{\lambda}), \widetilde{J}a_{\widetilde{H}}\rangle]dV_{\theta}, \tag{5.19}$$

其中 $\{e_{\lambda}\}_{\lambda=1}^{2m}$ 是 H(M) 中的一组单位正交标架.

定理 5.4 设 $f:(M,H(M),J,\theta)\to (N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 是从闭的拟 Hermite 流形到等距嵌入 CR 流形的非常值水平拟调和映照. 如果对任意 $y\in N,\,Q_y^N$ 在 $\widetilde{H}_y(N)$ 上都是负定的 (即对任意的 $X\neq 0$ 且 $X\in\Gamma(\widetilde{H}(N),\langle Q^NX,X\rangle<0)$, 则 f 是不稳定的.

证明 考虑上述提及的水平向量场 $a_{\tilde{\mu}}$. 根据定义 4.4, 利用 (5.19) 可得

$$H_{f}(a_{\widetilde{H}}, a_{\widetilde{H}}) = \frac{d^{2}E_{H,\widetilde{H}}(f_{t})}{dt^{2}} \Big|_{t=0}$$

$$= \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} [|\widetilde{\nabla}_{df(e_{\lambda})} a_{\widetilde{H}}|^{2} - \widetilde{R}(a_{\widetilde{H}}, df(e_{\lambda}), a_{\widetilde{H}}, df(e_{\lambda}))$$

$$- 2\langle df(e_{\lambda}), \widetilde{\tau} a_{\widetilde{H}} \rangle \langle df(e_{\lambda}), \widetilde{J} a_{\widetilde{H}} \rangle | dV\theta, \qquad (5.20)$$

其中 $\{e_{\lambda}\}_{\lambda=1}^{2m}$ 是 H(M) 上的单位正交标架. 因为 f 是水平的, 由引理 5.3 可得

$$\widetilde{\nabla}_{df(e_{\lambda})} a_{\widetilde{H}} = A_{a^{\perp}} df(e_{\lambda}) - \langle A_{a^{\perp}} df(e_{\lambda}), \widetilde{T} \rangle \widetilde{T} - \langle a, \widetilde{T} \rangle \widetilde{\tau} df(e_{\lambda}) - \langle a, \widetilde{T} \rangle \widetilde{J} df(e_{\lambda}),$$

从而

$$\begin{split} |\widetilde{\nabla}_{df(e_{\lambda})} a_{\widetilde{H}}|^{2} &= \langle A_{a^{\perp}} df(e_{\lambda}), A_{a^{\perp}} df(e_{\lambda}) \rangle - \langle A_{a^{\perp}} df(e_{\lambda}), \widetilde{T} \rangle^{2} \\ &+ \langle a, \widetilde{T} \rangle^{2} \langle \widetilde{\tau}^{2} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle + \langle a, \widetilde{T} \rangle^{2} |df(e_{\lambda})|^{2} \\ &- 2 \langle a, \widetilde{T} \rangle \langle A_{a^{\perp}} df(e_{\lambda}), \widetilde{\tau} df(e_{\lambda}) \rangle - 2 \langle A_{a^{\perp}} df(e_{\lambda}), \widetilde{J} df(e_{\lambda}) \rangle \langle a, \widetilde{T} \rangle \\ &+ 2 \langle a, \widetilde{T} \rangle^{2} \langle \widetilde{\tau} \widetilde{J} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle. \end{split}$$
(5.21)

根据 (5.8), 有

$$\begin{split} \widetilde{R}(a_{\widetilde{H}}, df(e_{\lambda}), a_{\widetilde{H}}, df(e_{\lambda})) \\ &= \langle h(a_{\widetilde{H}}, a_{\widetilde{H}}), h(df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda})) \rangle - |h(a_{\widetilde{H}}, df(e_{\lambda}))|^{2} + 3\langle \widetilde{J}a_{\widetilde{H}}, df(e_{\lambda}) \rangle^{2} \\ &- \langle a_{\widetilde{H}}, \widetilde{\tau} df(e_{\lambda}) \rangle^{2} + \langle \widetilde{\tau} a_{\widetilde{H}}, a_{\widetilde{H}} \rangle \langle \widetilde{\tau} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle \\ &= \langle A_{h(a_{\widetilde{H}}, a_{\widetilde{H}})} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle - |h(a_{\widetilde{H}}, df(e_{\lambda}))|^{2} + 3\langle a_{\widetilde{H}}, \widetilde{J} df(e_{\lambda}) \rangle^{2} \\ &- \langle a_{\widetilde{H}}, \widetilde{\tau} df(e_{\lambda}) \rangle^{2} + \langle \widetilde{\tau} a_{\widetilde{H}}, a_{\widetilde{H}} \rangle \langle \widetilde{\tau} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle. \end{split}$$
(5.22)

对任意给定的点 y, 选取 $\mathbb{C}^{n+k}\cong\mathbb{R}^{2n+2k}$ 中的一组实单位正交基 $\{a_1,\ldots,a_{2n+2k}\}$. 满足 $\{a_1,\ldots,a_{2n}\}|_y$ 是 $\widetilde{H}_y(N)$ 的一组基, $a_{2n+1}|_y=\widetilde{T}_y$, 以及 $\{a_{2n+2},\ldots,a_{2n+2k}\}|_y$ 是 $T_y^{\perp}N$ 的一组基. 对于每个 a_i $(i=1,\ldots,2n+2k)$, 我们按上面提到的方式构造 $(a_i)_{\widetilde{H}}$. 利用 (5.21), (5.22) 以及 $\mathrm{tr}\widetilde{\tau}=0$, 点点计算可得

$$\sum_{i=1}^{2n+2k} \langle \widetilde{\nabla}_{df(e_{\lambda})}(a_{i})_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{df(e_{\lambda})}(a_{i})_{\widetilde{H}} \rangle$$

$$= \sum_{i=2n+2}^{2n+2k} [\langle A_{a_{i}} df(e_{\lambda}), A_{a_{i}} df(e_{\lambda}) \rangle - \langle A_{a_{i}} df(e_{\lambda}), \widetilde{T} \rangle^{2}]$$

$$+\langle \widetilde{\tau}^2 df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle + |df(e_{\lambda})|^2 + 2\langle \widetilde{\tau} \widetilde{J} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle$$
(5.23)

以及

$$\sum_{i=1}^{2n+2k} \widetilde{R}((a_i)_{\widetilde{H}}, df(e_{\lambda}), (a_i)_{\widetilde{H}}, df(e_{\lambda}))$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} [\langle A_{h(a_i, a_i)} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle - |h(a_i, df(e_{\lambda}))|^2] + 3|df(e_{\lambda})|^2 - |\widetilde{\tau} df(e_{\lambda})|^2.$$
(5.24)

注意到 $\tilde{J}^2 = -1$, 通过简单的计算便知

$$\sum_{i=1}^{2n+2k} -2\langle df(e_{\lambda}), \widetilde{\tau}(a_i)_{\widetilde{H}} \rangle \langle df(e_{\lambda}), \widetilde{J}(a_i)_{\widetilde{H}} \rangle = 2\langle df(e_{\lambda}), \widetilde{\tau} \widetilde{J} df(e_{\lambda}) \rangle.$$
 (5.25)

结合 (5.23)-(5.25) 有

$$\sum_{i=1}^{2n+2k} H_f((a_i)_{\widetilde{H}}, (a_i)_{\widetilde{H}})$$

$$= \int_M \sum_{\lambda=1}^{2m} \left\{ \sum_{i=2n+2}^{2n+2k} \left[\langle \pi_{\widetilde{H}} A_{a_i} df(e_{\lambda}), \pi_{\widetilde{H}} A_{a_i} df(e_{\lambda}) \rangle \right] - \sum_{j=1}^{2n} \langle A_{h(a_j, a_j)} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{2n} \langle h(a_j, df(e_{\lambda})), h(a_j, df(e_{\lambda})) \rangle \right] + 2 \langle \widetilde{\tau}^2 df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle$$

$$- 2|df(e_{\lambda})|^2 + 4 \langle \widetilde{\tau} \widetilde{J} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle \right\} dV_{\theta}. \tag{5.26}$$

由 (5.5) 和单位正交基的选取可知

$$\sum_{j=1}^{2n} \langle h(a_j, df(e_\lambda)), h(a_j, df(e_\lambda)) \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=2n+2}^{2n+2k} \langle A_{a_i} df(e_\lambda), a_j \rangle^2 = \sum_{j=2n+2}^{2n+2k} \langle \pi_{\widetilde{H}} A_{a_i} df(e_\lambda), \pi_{\widetilde{H}} A_{a_i} df(e_\lambda) \rangle. \tag{5.27}$$

再次应用 (5.5), 有

$$\sum_{j=1}^{2n} \langle A_{h(a_j, a_j)} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=2n+2}^{2n+2k} \langle A_{a_i} a_j, a_j \rangle \langle A_{a_i} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle$$

$$= \sum_{i=2n+2}^{2n+2k} \langle (\operatorname{tr}_{G_{\widetilde{\theta}}} A_{a_i}) A_{a_i} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle. \tag{5.28}$$

由引理 5.2 中的 (ii) 以及 (2.4), 对任意的 $X \in \Gamma(\widetilde{H}(N))$ 有

$$\widetilde{\tau}^2 X = (\widetilde{\tau}\widetilde{J}) \cdot (\widetilde{\tau}\widetilde{J})X = (-A_{\varepsilon} - Id) \cdot (-A_{\varepsilon} - Id)X = (A_{\varepsilon}^2 + 2A_{\varepsilon} + Id)X. \tag{5.29}$$

利用 (5.29), 可得

$$2\langle \widetilde{\tau}^2 df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle - 2|df(e_{\lambda})|^2 + 4\langle \widetilde{\tau} \widetilde{J} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle$$

$$= 2\langle A_{\xi}^{2} df(e_{\lambda}) + 2A_{\xi} df(e_{\lambda}) + df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle - 2|df(e_{\lambda})|^{2}$$
$$- 4\langle A_{\xi} df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle - 4|df(e_{\lambda})|^{2}$$
$$= \langle (2A_{\xi}^{2} - 4Id)df(e_{\lambda}), df(e_{\lambda}) \rangle. \tag{5.30}$$

最后,将(5.27),(5.28)和(5.30)代入(5.26),有

$$\sum_{i=1}^{2n+2k} H_f((a_i)_{\widetilde{H}}, (a_i)_{\widetilde{H}}) = \int_M \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle Q^N(df(e_\lambda)), df(e_\lambda) \rangle dV_\theta.$$
 (5.31)

在定理条件的假定下, $\int_M \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle Q^N(df(e_\lambda)), df(e_\lambda) \rangle dV_\theta < 0$. 所以至少存在一个 $H_f((a_i)_{\tilde{H}}, (a_i)_{\tilde{H}})$ 小于 0. 由定义 4.4 可知, f 是不稳定的.

注 5.5 实际上, 利用 (5.31) 式可将条件 $\langle Q^N X, X \rangle < 0$ 减弱为

$$\sum_{\lambda=1}^{2m} \langle Q^N(df(e_\lambda)), df(e_\lambda) \rangle < 0.$$

利用定理 5.4, 我们可以得到与文献 [14] 中相同的结论.

推论 5.6 (参见文献 [14]) 如果 $f:(M,H(M),J,\theta)\to (S^{2n+1},\widetilde{H},\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 是从闭的拟 Hermite 流形 出发到奇维数球的非常值水平拟调和映照, 则 f 是不稳定的.

在我们证明此推论之前, 我们需要下述引理.

引理 5.7 设 $f:(M,H(M),J,\theta)\to (N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 是一水平映照. 如果 f 是非常值的,则它一定是水平非常值的(这里水平非常值的意思是指映照只在水平方向非常值).

证明 事实上, 只须证明如果 $df|_{H(M)} = 0$, 那么 $df|_{TM} = 0$. 对于任给的 $X,Y \in \Gamma(H(M))$, 由于 $df|_{H(M)} = 0$, 根据 (3.1), 可得 $(\tilde{\nabla}_X df)(Y) - (\tilde{\nabla}_Y df)(X) = -d\theta(X,Y)df(T)$. 因为 Levi 分布是平行于 ∇ 的, 所以 df(T) = 0.

现在开始证明推论 5.6, 令 $N=S^{2n+1}$. 由例 5.1 可知, 标准奇维数球 $i:S^{2n+1}\hookrightarrow C^{n+1}$ 是等距嵌入 CR 流形. 因此 $\widetilde{T}=\widehat{J}\nu$. 这里用 ν 表示 S^{2n+1} 上的单位外法向量. 由于对于任意的 $X\in\Gamma(TS^{2n+1})$, $A_{\nu}X=X$. 那么 $Q_{y}^{S^{2n+1}}=2\pi_{\widetilde{H}}-(2n+2)Id$. 既然 f 是非常值的, 根据引理 5.7 可得 $\sum_{\lambda=1}^{2m}|df(e_{\lambda})|^{2}>0$. 从而 $\sum_{\lambda=1}^{2m}\langle Q^{N}(df(e_{\lambda})),df(e_{\lambda})\rangle<0$. 由注记 5.5, 可得到推论 5.6 的结论.

下面考虑最简单情形的映照, 即恒等映照 $I: S^{2n+1} \to S^{2n+1}$. 不难看出, I 是一个水平拟调和映照. 由推论 5.6 可知此映照一定是不稳定的. 仿照文献 [19] 中的理论, 可以研究映照 I 作为拟调和映照的不稳定程度.

令 $V \in \Gamma(TS^{2n+1})$. 根据分解 $TS^{2n+1} = \operatorname{span}\{\widetilde{T}\} \oplus \widetilde{H}(S^{2n+1})$, 可把 V 写成

$$V = V_{\widetilde{T}} + V_{\widetilde{H}},\tag{5.32}$$

其中 $V_{\widetilde{T}} = \langle V, \widetilde{T} \rangle \widetilde{T}, V_{\widetilde{H}} = V - \langle V, \widetilde{T} \rangle \widetilde{T}$. 显然, $V_{\widetilde{H}}$ 是 $\widetilde{H}(S^{2n+1})$ 的一个截面.

记 $L_V g_{\tilde{\theta}}$ 为关于 Webster 度量下 V 方向的 Lie 导数, 它是 S^{2n+1} 上的对称 2 张量.

引理 5.8 对于任意的 $V \in \Gamma(TS^{2n+1})$,

$$\frac{1}{2} \int_{S^{2n+1}} |L_V g_{\widetilde{\theta}}|_{\widetilde{H}}^2 dV_{\widetilde{\theta}} = \int_{S^{2n+1}} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{2n} [\langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}} \rangle - \langle \widetilde{R}(V, e_{\lambda}, V, e_{\lambda})] + (\operatorname{div} V_{\widetilde{H}})^2 - 2 \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} V_{\widetilde{H}}, \widetilde{J} V_{\widetilde{H}} \rangle \right\} dV_{\widetilde{\theta}},$$

其中 $|L_V g_{\tilde{\theta}}|_{\widetilde{H}}^2 = \sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} [(L_V g_{\tilde{\theta}})(e_{\lambda}, e_{\mu})]^2$ 且 $\{e_{\lambda}\}_{\lambda=1}^{2n}$ 是 $\widetilde{H}(S^{2n+1})$ 上的一组单位正交标架. 证明 由 (3.2) 可得

$$(L_V g_{\widetilde{\theta}})(e_{\lambda}, e_{\mu}) = (L_{V_{\widetilde{H}}} g_{\widetilde{\theta}})(e_{\lambda}, e_{\mu}) + (L_{V_{\widetilde{T}}} g_{\widetilde{\theta}})(e_{\lambda}, e_{\mu}),$$

其中 $1 \le \lambda$, $\mu \le 2n$. 由于 S^{2n+1} 是一个 Sasakian 流形且 $\widetilde{\nabla} \widetilde{T} = 0$, 则可做如下计算:

$$\begin{split} (L_{V_{\widetilde{T}}}g_{\widetilde{\theta}})(e_{\lambda},e_{\mu}) &= -\langle [V_{\widetilde{T}},e_{\lambda}],e_{\mu}\rangle - \langle e_{\lambda},[V_{\widetilde{T}},e_{\mu}]\rangle \\ &= -\widetilde{\theta}(V)[\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}}e_{\lambda},e_{\mu}\rangle + \langle e_{\lambda},\widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}}e_{\mu}\rangle] \\ &= 0. \end{split}$$

从而

$$(L_V g_{\widetilde{\theta}})(e_{\lambda}, e_{\mu}) = (L_{V_{\widetilde{H}}} g_{\widetilde{\theta}})(e_{\lambda}, e_{\mu}). \tag{5.33}$$

并且还可得到

$$\frac{1}{2}|L_{V_{\widetilde{H}}}g_{\widetilde{\theta}}|^{2} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} [(L_{V_{\widetilde{H}}}g_{\widetilde{\theta}})(e_{\lambda}, e_{\mu})]^{2}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{2n} \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}} \rangle + \sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle \langle e_{\lambda}, \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} V_{\widetilde{H}} \rangle. \tag{5.34}$$

下面定义两个向量场 $X,Y \in \Gamma(\widetilde{H}(S^{2n+1}))$, 其中 $X = \widetilde{\nabla}_{V_{\widetilde{H}}} V_{\widetilde{H}}$ 以及 $Y = \sum_{i=1}^{2n} \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle V_{\widetilde{H}}$. 分别计算 X 和 Y 的散度, 可得如下结论:

$$\begin{split} \operatorname{div} X - \operatorname{div} Y &= \sum_{\lambda=1}^{2n} \widetilde{R}(V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda}, V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda}) + \sum_{\lambda, \mu=1}^{2n} \left[\langle \widetilde{\nabla}_{[e_{\lambda}, e_{\mu}]} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle \right. \\ &+ \langle V_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} e_{\mu} \rangle \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle - \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} e_{\lambda} \rangle \langle V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle \\ &+ \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle \langle e_{\lambda}, \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} V_{\widetilde{H}} \rangle \right] - (\operatorname{div} V_{\widetilde{H}})^{2}. \end{split}$$

利用 (2.5) 以及 $\tilde{\tau}=0$, 可将 $[e_{\lambda},e_{\mu}]$ 重新表达成

$$[e_{\lambda}, e_{\mu}] = \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} e_{\mu} - \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} e_{\lambda} - d\widetilde{\theta}(e_{\lambda}, e_{\mu})\widetilde{T}.$$

则

$$\operatorname{div} X - \operatorname{div} Y = \sum_{\lambda=1}^{2n} \widetilde{R}(V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda}, V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda}) + \sum_{\lambda, \mu=1}^{2n} \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle$$

$$+ \sum_{\lambda, \mu=1}^{2n} [\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} e_{\mu}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle - \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle]$$

$$+ \sum_{\lambda, \mu=1}^{2n} [\langle V_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} e_{\mu} \rangle \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle - \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} e_{\lambda} \rangle \langle V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle]$$

$$- \sum_{\lambda, \mu=1}^{2n} d\widetilde{\theta}(e_{\lambda}, e_{\mu}) \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle - (\operatorname{div} V_{\widetilde{H}})^{2}. \tag{5.35}$$

另一方面,

$$\begin{split} \sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}}e_{\mu}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle &= \sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^{2n} \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}}e_{\mu}, e_{\nu} \rangle \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\nu}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle \\ &= - \sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^{2n} \langle e_{\mu}, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}}e_{\nu} \rangle \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\nu}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle \\ &= - \sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle V_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}}e_{\mu} \rangle. \end{split}$$

同样, 通过简单计算可得

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle = -\sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} e_{\lambda} \rangle \langle V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle.$$

从而 (5.35) 变为

$$\operatorname{div} X - \operatorname{div} Y = \sum_{\lambda=1}^{2n} \widetilde{R}(V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda}, V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda}) + \sum_{\lambda, \mu=1}^{2n} \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle - (\operatorname{div} V_{\widetilde{H}})^{2} + 2 \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle \widetilde{J} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle.$$

那么

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle$$

$$= \operatorname{div} X - \operatorname{div} Y - \sum_{\lambda=1}^{2n} \widetilde{R}(V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda}, V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda}) + (\operatorname{div} V_{\widetilde{H}})^{2}$$

$$- 2 \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle \widetilde{J} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle. \tag{5.36}$$

由于 S^{2n+1} 的拟 Hermite 挠率为 0, 根据文献 [1] 中的讨论, 可得

$$\langle \widetilde{R}(\widetilde{T}, Y)Z, W \rangle = \langle \widetilde{S}(Z, W), Y \rangle = 0.$$

因此 $\widetilde{R}(V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda}, V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda}) = \widetilde{R}(V, e_{\lambda}, V, e_{\lambda})$. 于是 (5.36) 式变为

$$\begin{split} &\sum_{\lambda,\mu=1}^{2n} \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \\ &= \operatorname{div} X - \operatorname{div} Y - \sum_{\lambda=1}^{2n} \widetilde{R}(V, e_{\lambda}, V, e_{\lambda}) + (\operatorname{div} V_{\widetilde{H}})^{2} \\ &- 2 \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle \widetilde{J} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle. \end{split}$$

将其代入 (5.34) 式可得

$$\frac{1}{2}|L_{V_{\widetilde{H}}}g_{\widetilde{\theta}}|_{\widetilde{H}}^{2} = \sum_{\lambda=1}^{2n} [\langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}}V_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}}V_{\widetilde{H}} \rangle - \widetilde{R}(e_{\lambda}, V, e_{\lambda}, V)$$

$$- \left. 2 \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \langle \widetilde{J} V_{\widetilde{H}}, e_{\lambda} \rangle \right] + (\mathrm{div} V_{\widetilde{H}})^2 + \mathrm{div} X - \mathrm{div} Y.$$

那么

$$\frac{1}{2} \int_{S^{2n+1}} |L_V g_{\widetilde{\theta}}|_{\widetilde{H}}^2 dV_{\widetilde{\theta}} = \int_{S^{2n+1}} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{2n} [\langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}} \rangle - \langle \widetilde{R}(V, e_{\lambda}, V, e_{\lambda} \rangle)] + (\operatorname{div} V_{\widetilde{H}})^2 - 2 \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} V_{\widetilde{H}}, \widetilde{J} V_{\widetilde{H}} \rangle \right\} dV_{\widetilde{\theta}}.$$

证毕.

由注 4.5 以及引理 5.8, 立刻可得如下结论.

命题 5.9 对任意的 $V \in \Gamma(TS^{2n+1})$, 有

$$H_{I}(V,V) = \int_{S^{2n+1}} \left[\frac{1}{2} |L_{V} g_{\widetilde{\theta}}|_{\widetilde{H}}^{2} - (\operatorname{div} V_{\widetilde{H}})^{2} + 2 \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} V_{\widetilde{H}}, \widetilde{J} V_{\widetilde{H}} \rangle \right] dV_{\widetilde{\theta}}, \tag{5.37}$$

其中 $V_{\widetilde{H}}$ 表示 V 的水平部分.

令 \underline{i} 表示无穷小等距群, 即如果向量场 $V\in\underline{i}$ 那么 $L_Vg_{\widetilde{\theta}}=0$. 令 \underline{c} 表示所有共形向量场. 这里的记号参见文献 [20] 中的定义.

命题 5.10 S^{2n+1} 上的向量场 V 是共形的当且仅当 $L_V g_{\widetilde{\theta}} = \frac{\operatorname{div} V_{\widetilde{H}}}{n} g_{\widetilde{\theta}}.$

证明 若向量场 V 是共形的, 则 $L_V g_{\tilde{\theta}} = \sigma g_{\tilde{\theta}}$, 这里 σ 是某一函数. 在 $\widetilde{H}(S^{2n+1})$ 中的某一单位正交标架下, 有

$$(L_V g_{\widetilde{\theta}})(e_{\lambda}, e_{\mu}) = \sigma g_{\widetilde{\theta}}(e_{\lambda}, e_{\mu}) = \sigma \delta_{\lambda \mu}.$$

由 (5.33) 式, 可得

$$(L_V g_{\widetilde{\theta}})(e_{\lambda}, e_{\mu}) = (L_{V_{\widetilde{H}}} g_{\widetilde{\theta}})(e_{\lambda}, e_{\mu}) = \langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle + \langle e_{\lambda}, \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} V_{\widetilde{H}} \rangle.$$

因此

$$\langle \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} V_{\widetilde{H}}, e_{\mu} \rangle + \langle e_{\lambda}, \widetilde{\nabla}_{e_{\mu}} V_{\widetilde{H}} \rangle = \sigma \delta_{\lambda \mu}.$$

缩并上述等式, 可得 $\sigma = \frac{\operatorname{div} V_{\widetilde{H}}}{n}$. 命题证毕.

命题 **5.11** 如果 $n \ge 1$, 则 $\operatorname{ind}(I) \ge 2n + 2$. 这里 $\operatorname{ind}(I)$ 表示 $\Gamma(TS^{2n+1})$ 中使得 H_I 负定的最大子空间的维数.

证明 若 $V \in \underline{c}$, 由命题 5.10 可知 $|L_V g_{\widetilde{\theta}}|_{\widetilde{H}}^2 = 2 \frac{(\operatorname{div} V_{\widetilde{H}})^2}{n}$. 代入 (5.37) 可得

$$H_I(V,V) = \int_{S^{2n+1}} \frac{1-n}{n} (\operatorname{div} V_{\widetilde{H}})^2 + 2\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} V_{\widetilde{H}}, \widetilde{J} V_{\widetilde{H}} \rangle dV_{\widetilde{\theta}}.$$
 (5.38)

如果 V 在 \underline{i} 在 \underline{c} 的正交补中,那么它也可看成是 \mathbb{R}^{2n+2} 上的常值向量场通过限制到 S^{2n+1} 上得到的. 文献 [5] 中已经证得 $\tilde{\nabla}_{\tilde{T}}V_{\tilde{H}}=-\tilde{J}V_{\tilde{H}}$. 将此等式代入 (5.38),有

$$H_I(V,V) = \int_{S^{2n+1}} \left[\frac{1-n}{n} (\operatorname{div} V_{\widetilde{H}})^2 - 2|V_{\widetilde{H}}|^2 \right] dV_{\widetilde{\theta}}.$$

实际上, 由命题 5.10 可知, $\operatorname{div} V_{\widetilde{H}} \neq 0$, 故 $H_I(V,V) < 0$. 则 $\operatorname{i}(I) \geqslant \operatorname{dim}(\underline{c}/\underline{i})$, 即 $\operatorname{ind}(I) \geqslant 2n + 2$.

6 到 Heisenberg 群的拟 Hermite 子流形的拟调和映照

本节将会证明如果 CR-Weingarten 变换满足一定条件时, 任何从闭的拟 Hermite 流形到 Heisenberg 群的拟 Hermite 子流形的非常值拟调和映照是不稳定的. 首先介绍一些相关概念 (参见文献 [1]).

分别记 $(M, H(M), J, \theta)$ 和 $(K, H(K), J_K, \Theta)$ 为两个实维数为 m 和 m+k 的拟 Hermite 流形. 如果 f 是一个 CR 映照并且对于任意的 $x \in M$ 有 $\mathrm{rank}(d_x f) = m$ 则称 $f: M \to K$ 是一个 CR 浸入.

定义 6.1 (参见文献 [1]) 设 $f: M \to K$ 是一个 CR 浸入. 如果 $f^*\Theta = \theta$, 则称 f 是一个拟等距 Hermite CR 浸入.

注 6.2 事实上, 在上述定义中由于 f 是一个 CR 映照, 故 $J_K \circ df|_{H(M)} = df \circ J_M|_{H(M)}$ 且 $f^*G_{\Theta} = G_{\theta}$. 但一般来说, 此浸入 f 关于 Riemann 度量 g_{θ} 和 g_{Θ} 并不是等距的.

为方便起见, 用 M 表示 f(M), 记浸入为 $i: M \hookrightarrow K$. 实际上, 拟 Hermite 流形 $(K, H(K), J_K, \Theta)$ 也可看成是 Riemann 流形 (K, g_{Θ}) . 对于任意的 $W \in \Gamma(TK)$, 可按如下方式定义两个向量场: $W^{\top} = \tan W$ 以及 $W^{\perp} = \operatorname{nor} W$. 即 W^{\top} 切于 M, W^{\perp} 垂直于 M.

记 ∇^K 为 K 上的 Tanaka-Webster 联络. 对任意的 $X \in \Gamma(TM)$ 以及 $\eta \in \Gamma(T^{\perp}M)$, 令

$$\nabla_X Y = (\nabla_X^K Y)^\top, \tag{6.1}$$

$$\alpha(X,Y) = (\nabla_X^K Y)^{\perp}. \tag{6.2}$$

容易验证 ∇ 是 M 上的线性联络. α 是双线性的, 且它取值于 $T^{\perp}M$. 进一步, 可得如下 CR-Gauss 公式:

$$\nabla_X^K Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y). \tag{6.3}$$

对任意的 $X \in \Gamma(TM)$ 以及 $\eta \in \Gamma(T^{\perp}M)$, 记

$$a_n X = -(\nabla_X^K \eta)^\top, \tag{6.4}$$

$$\nabla_X^{\perp} \eta = (\nabla_X^K \eta)^{\perp}, \tag{6.5}$$

那么 a 是双线性的且 ∇^{\perp} 为 $T^{\perp}M$ 上的一个联络. 有如下 CR-Wegarten 公式成立,

$$\nabla_X^K \eta = -a_n X + \nabla_X^{\perp} \eta. \tag{6.6}$$

事实上,一般情况下 (6.1) 中的联络 ∇ 和 (M,θ) 的 Tanaka-Webster 联络是不同的, α 也不一定对称. 设 $i:M\to K$ 是两个拟 Hermite 流形间的拟等距 Hermite CR 浸入. 文献 [1] 中,证明了 $i^*g_\Theta=g_\theta$ 当且仅当 $T_K^\perp=0$.

根据上述讨论, 有如下定义:

定义 6.3 如果一个拟等距 Hermite CR 浸入还满足 $T_K^{\perp} = 0$, 则称其为拟 Hermite 浸入.

注 6.4 如果 $i: M \hookrightarrow K$ 是一个拟 Hermite 浸入, 则 $T_M = T_K|_M$ (文献 [1] 中有详细讨论).

定理 6.5 (参见文献 [1]) 设 $(M,H(M),J,\theta)$ 和 $(K,H(K),J_K,\Theta)$ 是两个拟 Hermite 流形, $i:M\to K$ 是拟 Hermite 浸入. 则

- (i) ∇ 是 (M, θ) 的 Tanaka-Webster 联络;
- (ii) $\pi_H \alpha$ 是对称的, 这里 $\pi_H \alpha$ 是按如下方式定义的向量值形式: 对任意的 $X,Y \in TM$,

$$(\pi_H \alpha)(X, Y) = \alpha(\pi_H X, \pi_H Y);$$

(iii) a_{η} 是 H(M) 值的. 对任意的 $x \in M$, $(a_{\eta})_x : H(M)_x \to H(M)_x$ 关于 $G_{\theta,x}$) 是自伴随的. 实际上, 张量 α 和 a 有如下关系: 对任意的 $X,Y \in \Gamma(TM)$, $\eta \in \Gamma(T^{\perp}M)$,

$$g_{\Theta}(\alpha(X,Y),\eta) = g_{\theta}(a_{\eta}X,Y). \tag{6.7}$$

下面考虑一个特殊的拟 Hermite 浸入. 令 $K = \mathbf{H}_{n+k}$ 是 Heisenberg 群. 由例 2.7 可知, 它是一个 Sasakian 流形. 设 $(N, \widetilde{H}(N), \widetilde{J}, \widetilde{\theta})$ 是一个 2n+1 维的拟 Hermite 流形. 若无特殊说明, 本节总假定 $i: (N, \widetilde{H}(N), \widetilde{J}, \widetilde{\theta}) \to \mathbf{H}_{n+k}$ 是一个拟 Hermite 浸入.

分别记 $\overline{\nabla}$, $\widetilde{\nabla}$ 为 \mathbf{H}_{n+k} 和 N 上的 Tanaka-Webster 联络. 由于 i 是一个拟 Hermite 浸入, 由定理 6.5 可知

$$\overline{\nabla}_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + \alpha(X, Y) \tag{6.8}$$

且

$$\overline{\nabla}_X \eta = -a_\eta X + \nabla_X^{\perp} \eta, \tag{6.9}$$

其中 $X,Y \in \Gamma(TN), \eta \in \Gamma(T^{\perp}N)$. 立刻可得如下引理:

引理 6.6 对任意的 $\eta \in \Gamma(T^{\perp}N)$, $X \in \Gamma(TN)$, 有 $a_{\eta}\widetilde{T} = 0$, $\alpha(\widetilde{T}, X) = 0$, 其中 \widetilde{T} 表示 N 的特征方向.

证明 由 (6.7) 可知, 对任意的 $X \in \Gamma(TN)$,

$$\langle a_{\eta}\widetilde{T}, X \rangle = \langle \alpha(\widetilde{T}, X), \eta \rangle.$$
 (6.10)

因为 \mathbf{H}_{n+k} 是 Sasakian 的, 利用性质 $T_{\mathbf{H}_{n+k}}|_{N} = \widetilde{T}, \overline{\nabla} T_{\mathbf{H}_{n+k}} = 0$ 以及 $\widetilde{\nabla} \widetilde{T} = 0$ 可得

$$\alpha(\widetilde{T}, X) = (\overline{\nabla}_{\widetilde{T}} X)^{\perp} = (\overline{\nabla}_X \widetilde{T} + [\widetilde{T}, X])^{\perp} = \overline{\nabla}_X T_{\mathbf{H}_{n+k}} - \widetilde{\nabla}_X \widetilde{T} = 0.$$

证毕.

由于 \mathbf{H}_{n+k} 是 Sasakian 的, 则 $(N, \widetilde{H}(N), \widetilde{J}, \widetilde{\theta})$ 也是 Sasakian 的. 事实上, 根据定义 6.3、定理 6.5 以及 $\widetilde{\nabla T} = 0$, 对任意的 $X \in \Gamma(TN)$, 可作如下计算:

$$\widetilde{\tau}(X) = T_{\widetilde{\nabla}}(\widetilde{T}, X) = (\overline{\nabla}_{\widetilde{T}} X)^{\top} - [\widetilde{T}, X]$$

$$= (\overline{\nabla}_{T_{\mathbf{H}_{n+k}}|_{N}} X - [T_{\mathbf{H}_{n+k}}|_{N}, X])^{\top}$$

$$= (\tau_{\mathbf{H}_{n+k}}|_{N}(X))^{\top}$$

$$= 0. \tag{6.11}$$

这里 \tilde{r} 记为 N 上的拟 Hermite 挠率.

对任意的 $x\in N$, 设 $\{\eta_{2n+2},\dots,\eta_{2n+2k+1}\}$ 为法空间 $T_x^\perp N$ 上的一组单位正交基. 根据定理 6.5 中的 (iii), 可定义如下线性自伴算子 P_x^N : $\tilde{H}(N)_x\to \tilde{H}(N)_x$

$$P_x^N = \sum_{i=2n+2}^{2n+2k+1} [2a_{\eta_i}^2 - \operatorname{tr}_{g_{\tilde{\theta}}}(a_{\eta_i}) \cdot a_{\eta_i}].$$
 (6.12)

不难看出, 这样定义的 P_x^N 与 $\{\eta_i\}_{i=2n+2}^{2n+2k+1}$ 的选取方式无关.

设 V 是 \mathbf{H}_{n+k} 中的一个向量, V 可以按 $\overline{\nabla}V = 0$ 方式平行移动成为 \mathbf{H}_{n+k} 上的一个向量场. 对任意的 $W \in \Gamma(TN)$, 可按如下方式定义张量 $\mathcal{A}^W: TN \to TN$:

$$\mathcal{A}^W(X) = \widetilde{\nabla}_X W,$$

其中 $X \in \Gamma(TN)$ 是任意给定的向量场.

如果令 $W = V^{\top}$, 利用 (6.8), (6.9) 以及性质 $\overline{\nabla}V = 0$ 可知

$$\mathcal{A}^{V^{\top}}(X) = \widetilde{\nabla}_X V^{\top} = a_{V^{\perp}}(X)$$

以及

$$\nabla_X^{\perp} V^{\perp} = (\overline{\nabla}_X V^{\perp})^{\perp} = -\alpha(X, V^{\top}).$$

故

$$(\widetilde{\nabla}_{V^{\perp}} \mathcal{A}^{V^{\top}}) = (\overline{\nabla}_{V^{\top}} a)_{V^{\perp}} - a_{\alpha(V^{\top}, V^{\top})}, \tag{6.13}$$

其中对任给 $X \in \Gamma(TN)$, 有 $(\overline{\nabla}_X a)_{V^{\perp}} = (\widetilde{\nabla}_X a_{V^{\perp}}) - a_{\nabla^{\perp}_Y V^{\perp}}$.

引理 6.7 对任意的 $X \in \Gamma(TN)$,

$$\widetilde{R}(V^{\top}, X, V^{\top}, X) = -\langle (\widetilde{\nabla}_{V^{\top}} \mathcal{A}^{V^{\top}})(X), X \rangle - \langle \mathcal{A}^{V^{\top}} \mathcal{A}^{V^{\top}}(X), X \rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{X} (\mathcal{A}^{V^{\top}} (V^{\top})), X \rangle.$$
(6.14)

证明 由曲率张量的定义,有

$$\langle \widetilde{R}(V^{\top}, X)V^{\top}, X \rangle = \langle \widetilde{\nabla}_{V^{\top}} \widetilde{\nabla}_{X} V^{\top} - \widetilde{\nabla}_{X} \widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top} - \widetilde{\nabla}_{[V^{\top}, X]} V^{\top}, X \rangle. \tag{6.15}$$

因为 N 是 Sasakian 的, 根据 (2.5) 可得

$$\begin{split} [V^\top, X] &= \widetilde{\nabla}_{V^\top} X - \widetilde{\nabla}_X V^\top - T_{\widetilde{\nabla}} (V^\top, X) \\ &= \widetilde{\nabla}_{V^\top} X - \widetilde{\nabla}_X V^\top - d\widetilde{\theta} (V^\top, X) \widetilde{T}. \end{split}$$

将上述等式代入 (6.15), 利用引理 6.6 有

$$\begin{split} \langle \widetilde{R}(V^\top, X) V^\top, X \rangle &= \langle \widetilde{\nabla}_{V^\top} \widetilde{\nabla}_X V^\top, X \rangle - \langle \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_{V^\top} V^\top, X \rangle - \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_{V^\top} X} V^\top, X \rangle \\ &+ \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_X V^\top} V^\top, X \rangle + d \widetilde{\theta}(V^\top, X) \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} V^\top, X \rangle \\ &= \langle (\widetilde{\nabla}_{V^\top} \mathcal{A}^{V^\top})(X), X \rangle + \langle \mathcal{A}^{V^\top} \mathcal{A}^{V^\top}(X), X \rangle - \langle \widetilde{\nabla}_X (\mathcal{A}^{V^\top} (V^\top)), X \rangle. \end{split}$$

注意到 $\widetilde{R}(V^{\top}, X, V^{\top}, X) = -\langle \widetilde{R}(V^{\top}, X)V^{\top}, X \rangle$, 那么

$$\widetilde{R}(V^{\top}, X, V^{\top}, X) = -\langle (\widetilde{\nabla}_{V^{\top}} \mathcal{A}^{V^{\top}})(X), X \rangle - \langle \mathcal{A}^{V^{\top}} \mathcal{A}^{V^{\top}}(X), X \rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{X} (\mathcal{A}^{V^{\top}} (V^{\top})), X \rangle.$$

证毕.

定理 6.8 设 $i:(N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})\to \mathbf{H}_{n+k}$ 是一个拟 Hermite 浸入. 假定 $(M,H(M),J,\theta)$ 是一个闭的拟 Hermite 流形且 $f:(M,H(M),J,\theta)\to (N,\widetilde{H}(N),\widetilde{J},\widetilde{\theta})$ 为非常值的拟调和映照. 如果对于任给 $y\in N,P_y^N$ 在 $\widetilde{H}(N)$ 是负定的,则 f 是不稳定的.

证明 取上述讨论中的向量场 V^{\top} 为沿 f 的变分. 根据注记 4.5 有

$$H_{f}(V^{\top}, V^{\top})$$

$$= \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} [\langle \widetilde{\nabla}_{df(e_{\lambda})}(V^{\top})_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{df(e_{\lambda})}(V^{\top})_{\widetilde{H}} \rangle - \langle \widetilde{R}(V^{\top}, \pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda}), V^{\top}, \pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda}) \rangle] dV_{\theta}, \qquad (6.16)$$

其中 $\{e_{\lambda}\}_{\lambda=1}^{2m}$ 是 H(M) 的单位正交标架.

根据定理 6.5 中的 (iii) 以及引理 6.6, (6.16) 式等号右边的第一项可改写为

$$\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle \widetilde{\nabla}_{df(e_{\lambda})}(V^{\top})_{\widetilde{H}}, \widetilde{\nabla}_{df(e_{\lambda})}(V^{\top})_{\widetilde{H}} \rangle dV_{\theta}
= \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle a_{V^{\perp}}(df(e_{\lambda})), a_{V^{\perp}}(df(e_{\lambda})) \rangle dV_{\theta}
= \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle a_{V^{\perp}}(\pi_{\widetilde{H}}(df(e_{\lambda}))), a_{V^{\perp}}(\pi_{\widetilde{H}}(df(e_{\lambda}))) \rangle dV_{\theta}
= \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle a_{V^{\perp}}^{2}(\pi_{\widetilde{H}}(df(e_{\lambda}))), \pi_{\widetilde{H}}(df(e_{\lambda})) \rangle dV_{\theta}.$$
(6.17)

由 (6.13) 和引理 6.7, (6.16) 式的左端第二项变为

$$\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \widetilde{R}(V^{\top}, \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}), V^{\top}, \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})) dV_{\theta}$$

$$= \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \left[-\langle (\widetilde{\nabla}_{V^{\top}} \mathcal{A}^{V^{\top}}) (\pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle - \langle \mathcal{A}^{V^{\top}} \mathcal{A}^{V^{\top}} (\pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle \right] dV_{\theta}$$

$$+ \langle \widetilde{\nabla}_{\pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})} (\mathcal{A}^{V^{\top}} (V^{\top})), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle \right] dV_{\theta}$$

$$= \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \left[-\langle (\overline{\nabla}_{V^{\top}} a)_{V^{\perp}} (\pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle + \langle a_{\alpha(V^{\top}, V^{\top})} (\pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle \right] dV_{\theta}$$

$$- \langle a_{V^{\perp}}^{2} (\pi_{\widetilde{H}} (df(e_{\lambda}))), \pi_{\widetilde{H}} (df(e_{\lambda})) \rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{\pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})} (\widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle \right] dV_{\theta}. \tag{6.18}$$

上式的最后一项可按如下方式计算:

$$\begin{split} &\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle \widetilde{\nabla}_{\pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})} (\widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle dV_{\theta} \\ &= \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} [\langle \widetilde{\nabla}_{df(e_{\lambda})} (\widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle - \widetilde{\theta} (df(e_{\lambda})) \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} (\widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle] dV_{\theta} \\ &= \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} [e_{\lambda} \langle \widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}, \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle - \langle \widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}, \widetilde{\nabla}_{e_{\lambda}} (\pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})) \rangle \\ &- \widetilde{\theta} (df(e_{\lambda})) \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} (\widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle] dV_{\theta}. \end{split}$$

令 $Y = \langle \widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}, \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle e_{\lambda}$. 显然 $Y \in \Gamma(H(M))$, 对 Y 求散度可得

$$\operatorname{div}(Y) = \sum_{\lambda=1}^{2m} [e_{\lambda} \langle \widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}, \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle - \langle \widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}, \pi_{\widetilde{H}} df(\nabla_{e_{\lambda}} e_{\lambda}) \rangle].$$

那么

$$\begin{split} &\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle \widetilde{\nabla}_{\pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})} (\widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle dV_{\theta} \\ &= \int_{M} \left[-\langle \widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}, \operatorname{tr}_{G_{\theta}} \beta_{H, \widetilde{H}} \rangle - \sum_{\lambda=1}^{2m} \widetilde{\theta} (df(e_{\lambda})) \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} (\widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle \right] dV_{\theta}. \end{split}$$

因为 ƒ 是拟调和的, 所以由 (6.13) 和引理 6.6 可知

$$\begin{split} &\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle \widetilde{\nabla}_{\pi_{\widetilde{H}}} df(e_{\lambda}) (\widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle dV_{\theta} \\ &= -\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda})) \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} (\widetilde{\nabla}_{V^{\top}} V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle dV_{\theta} \\ &= -\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda})) \langle (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}} \mathcal{A}^{V^{\top}}) (V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle dV_{\theta} \\ &= -\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda})) \langle (\overline{\nabla}_{\widetilde{T}} a)_{V^{\perp}} (V^{\top}) - a_{\alpha(\widetilde{T},V^{\top})} (V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle dV_{\theta} \\ &= -\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda})) \langle (\overline{\nabla}_{\widetilde{T}} a)_{V^{\perp}} (V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle dV_{\theta}. \end{split}$$

将上述等式代入 (6.18) 可得

$$\int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \widetilde{R}(V^{\top}, \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}), V^{\top}, \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})) dV_{\theta}$$

$$= \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} \left[-\langle a_{V^{\perp}}^{2}(\pi_{\widetilde{H}} (df(e_{\lambda}))), \pi_{\widetilde{H}} (df(e_{\lambda})) \rangle - \langle (\overline{\nabla}_{V^{\top}} a)_{V^{\perp}}(\pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle \right] + \langle a_{\alpha(V^{\top}, V^{\top})}(\pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda})), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle - \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda})) \langle (\overline{\nabla}_{\widetilde{T}} a)_{V^{\perp}}(V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}} df(e_{\lambda}) \rangle dV_{\theta}. \tag{6.19}$$

结合 (6.16), (6.17) 和 (6.19), 有

$$H_{f}(V^{\top}, V^{\top}) = \frac{d^{2}}{dt^{2}} \Big|_{t=0} E_{H,\widetilde{H}}(f_{t})$$

$$= \int_{M} \sum_{\lambda=1}^{2m} [2\langle a_{V^{\perp}}^{2}(\pi_{\widetilde{H}}(df(e_{\lambda}))), \pi_{\widetilde{H}}(df(e_{\lambda}))\rangle + \langle (\overline{\nabla}_{V^{\top}}a)_{V^{\perp}}(\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})), \pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})\rangle$$

$$- \langle a_{\alpha(V^{\top}, V^{\top})}(\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})), \pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})\rangle + \widetilde{\theta}(df(e_{\lambda}))\langle (\overline{\nabla}_{\widetilde{T}}a)_{V^{\perp}}(V^{\top}), \pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})\rangle]dV_{\theta}. \quad (6.20)$$

选取 H_{n+k} 中的一组单位正交基 $\{V_1,\ldots,V_{2n+2k+1}\}$ 使得 $\{V_1,\ldots,V_{2n+1}\}$ 和 $\{V_{2n+2},\ldots,V_{2n+2k+1}\}$ 分别成为 T_xN 以及 $T_x^\perp N$ 中的单位正交基. 因为对任意的 j 来说, $V_j^\top|_x$ 或者 $V_j^\perp|_x$ 中必有一个为 0, 因

此 $(\overline{\nabla}_{V_i^{\top}}a)_{V_i^{\perp}}=0$ 且 $(\overline{\nabla}_{\widetilde{T}}a)_{V_i^{\perp}}(V_j^{\top})=0$. 从而可得

$$\sum_{j=1}^{2n+2k+1} H_f(V_j^{\top}, V_j^{\top}) = \int_M \sum_{\lambda=1}^{2m} \left[\sum_{i=2n+2}^{2n+2k+1} 2 \langle a_{V_i}^2(\pi_{\widetilde{H}}(df(e_{\lambda}))), \pi_{\widetilde{H}}(df(e_{\lambda})) \rangle - \sum_{j=1}^{2n+1} \langle a_{\alpha(V_j, V_j)}(\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})), \pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda}) \rangle \right] dV_{\theta}.$$
(6.21)

根据 (6.7), 可做如下计算:

$$\begin{split} \langle a_{\alpha(V_j,V_j)}(\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})),\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})\rangle &= \langle \alpha(\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda}),\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})),\alpha(V_j,V_j)\rangle \\ &= \sum_{i=2n+2}^{2n+2k+1} \langle \alpha(\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda}),\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})),V_i\rangle \langle \alpha(V_j,V_j),V_i\rangle \\ &= \sum_{i=2n+2}^{2n+2k+1} \langle a_{V_i}(\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})),\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})\rangle \langle a_{V_i}V_j,V_j\rangle \\ &= \sum_{i=2n+2}^{2n+2k+1} \langle \operatorname{tr}_{g_{\widetilde{\theta}}}a_{V_i} \cdot a_{V_i}(\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})),\pi_{\widetilde{H}}df(e_{\lambda})\rangle. \end{split}$$

将上式代入 (6.21), 则

$$\sum_{j=1}^{2n+2k+1} H_f(V_j^\top, V_j^\top) = \int_M \sum_{\lambda=1}^{2m} \sum_{i=2n+2}^{2n+2k+1} [2\langle a_{V_i}^2(\pi_{\widetilde{H}}(df(e_\lambda))), \pi_{\widetilde{H}}(df(e_\lambda))\rangle - \langle \operatorname{tr}_{g_{\widetilde{\theta}}} a_{V_i} \cdot a_{V_i}(\pi_{\widetilde{H}}df(e_\lambda)), \pi_{\widetilde{H}}df(e_\lambda)\rangle] dV_{\theta}$$

$$= \int_M \sum_{\lambda=1}^{2m} \langle P^N(\pi_{\widetilde{H}}df(e_\lambda)), \pi_{\widetilde{H}}df(e_\lambda)\rangle dV_{\theta}.$$

由于 P^N 是负定的, 所以至少存在一个 $H_f(V_i^\top, V_i^\top)$ 小于 0, 故 f 是不稳定的.

参考文献

- 1 Dragomir S, Tomassini G. Differential Geometry and Analyis on CR manifolds. Progress in Mathematics, 246. Boston: Birkhäuser. 2006
- 2 Xin Y L. Some results on stable harmonic maps. Duke Math J, 1980, 47: 609-613
- 3 Leung P F. On the stability of harmonic maps. In: Lecture Notes in Mathematics, vol. 949. Berlin-New York: Springer, 1982, 122–129
- 4 Howard R, Wei S W. Nonexistence of stable harmonic maps to and from certain homogeneous spaces and submanifolds of Euclidean space. Trans Amer Math Soc, 1986, 294: 319–331
- 5 Gamara N. The CR Yamabe conjecture—the case n=1. J Eur Math Soc, 2001, 3: 105–137
- 6 Gamara N, Yacoub R. CR Yamabe conjecture-the conformally flat case. Pacific J Math, 2001, 201: 121-175
- 7 Jerison D, Lee J M. The Yamabe problem on CR manifolds. J Differential Geom, 1987, 25: 167–197
- 8 Jerison D, Lee J M. Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem. J Amer Math Soc, 1988, 1: 1–13
- 9 Chang S C, Chiu H L. Nonnegativity of CR Paneitz operator and its application to the CR Obata's theorem. J Geom Anal, 2009, 19: 261–287
- 10 Chang S C, Chiu H L. On the CR analogue of Obata's theorem in a pseudohermitian 3-manifold. Math Ann, 2009, 345: 33–51

- 11 Greenleaf A. The first eigenvalue of a sub-Laplacian on a pseudo-Hermitian manifold. Comm Partial Differential Equations, 1985, 10: 191–217
- 12 Li S Y, Wang X D. An Obata-type theorem in CR geometry. J Differential Geom, 2013, 95: 483-502
- 13 Chang S C, Chang T H. On the existence of pseudoharmonic maps from pseudo-Hermitian manifolds into Riemannian manifolds with nonpositive sectional curvature. Asian J Math, 2013, 17: 1–16
- 14 Dong Y X. Pseudoharmonic maps between pseudo-Hermitian manifolds. Submitted
- 15 Petit R. Mok-Siu-Yeung type formulas on contact locally sub-symmetric spaces. Ann Global Anal Geom, 2009, 35: 1–37
- 16 Li S Y, Luk H S. An explicit formula for the Webster torsion of a pseudo-Hermitian manifold and its application to torsion-free hypersurfaces. Sci China Ser A, 2006, 49: 1662–1682
- 17 Boyer C P, Galicki K. Sasakian Geometry. New York: Oxford University Press, 2008
- 18 Futaki A, Ono H, Wang G. Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds. J Differential Geom, 2009, 83: 585–636
- 19 Smith R T. The second variation formula for harmonic mappings. Proc Amer Math Soc, 1975, 47: 229–236
- 20 Eells J, Lemaire L. Selected Topics in Harmonic Maps. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 50. Providence, RI: Amer Math Soc, 1983

Instability of pseudoharmonic maps between pseudo-Hermite manifolds

CHONG Tian, DONG YuXin & REN YiBin

Abstract In this paper, we derive the second variation formula of pseudoharmonic maps into any pseudo-Hermite manifolds. When the target manifold is an isometric embedded CR manifold in complex Euclidean space or a pseudo-Hermite immersed submanifold in Heisenberg group, we give some conditions on Weingarten maps to obtain some unstability of pseudoharmonic maps between these pseudo-Hermite manifolds.

Keywords $\,$ pseudo-Hermite manifold, Weingarten map, instability of pseudoharmonic map MSC(2010) $\,$ 58E20

doi: 10.1360/012015-1