



# 波浪作用下海床响应的解析解

张永利, 李杰\*

同济大学土木工程学院建筑工程系, 上海 200092

\* E-mail: lijie@mail.tongji.edu.cn

收稿日期: 2010-04-06; 接受日期: 2010-05-30

“十一五”国家科技支撑计划(批准号: 2006BAA01A23)资助项目

**摘要** 利用分离变量法, 将 Biot 固结模型的求解问题转化为复系数线性齐次常微分方程的求解, 进而引入复波数的概念, 构造水平位移的通解, 最终得到了 Biot 固结模型的显式通解. 将本文给出的解析解与 Yamamoto 等人的试验结果、解析解及 Hsu 和 Jeng 的解析解进行了比较, 验证了本文解析解的有效性和优越性. 基于解析解, 通过对海床深度影响问题的分析, 得出了波浪动水压力在海床内的影响深度为一倍波长的结论.

**关键词**  
线性波  
动水压力  
海床  
解析解

波致海床失稳问题已引起了海洋工程师、岩土工程师和结构工程师的广泛关注, 究其原因, 在于许多海洋结构物因波致海床响应过大而被破坏<sup>[1-3]</sup>. 波浪在传播过程中会在海床上产生显著的动压力, 这导致海床中孔隙水压力和有效应力的改变, 随着超孔隙压力的增大及垂直有效应力的减小, 部分海床可能会失稳, 甚至会液化. 一旦发生液化, 土颗粒就可能像流体一样被底部的海流带走, 或随着波浪作用而迁移. 有关研究表明, 海洋环境中海床失稳在浅水域、近岸区域甚至深水域等多种近海区域普遍存在. 它是导致近海结构物损伤或破坏的重要原因<sup>[4]</sup>.

自 20 世纪 40 年代以来, 基于不同的假设, 研究者已提出了多种波致海床失稳的模型, 如解耦模型(又称排水模型)、固结模型(又称拟静力模型)、动力模型和多孔弹塑性模型<sup>[5]</sup>. 在海洋工程中, 多数研究集中在前 2 种模型. 解耦模型假定土体为不可压缩介质, 既不考虑土骨架运动变形与孔隙水渗透的耦合效应, 也不考虑水质点运动和土体运动加速度的影响(如 Putnam<sup>[6]</sup>, Sleath<sup>[7]</sup>, Liu<sup>[8]</sup>, Massel<sup>[9]</sup>, Nakamura<sup>[10]</sup>,

Moshagen<sup>[11]</sup>). 根据是否考虑孔隙水的压缩性, 解耦模型的控制方程又可分为孔隙水压力满足拉普拉斯方程(孔隙水不可压)或满足扩散方程(孔隙水可压)2 种类型. 一般说来, 拉普拉斯方程适用于透水性良好的海床如粗砂质海床; 扩散方程则适用于透水性差的海床如粘土质海床. 固结模型假设孔隙水和土体是可压缩的, 但忽略加速度的影响, 孔隙水流动满足达西定律, 模型的控制方程为 Biot 固结方程. 由于固结模型较好地反映了海底土体的基本力学性质, 自 20 世纪 70 年代以来, 这一模型被广泛地用于研究波致海床失稳问题.

求解 Biot 固结方程的方法大体上可以分为解析法和数值解法. 最早使用解析法的是 Yamamoto 等人<sup>[12,13]</sup>及 Madsen<sup>[14]</sup>. 他们将问题简化为可压缩流体在可压缩多孔介质中传播, 把波浪考虑为行波, 采用三维广义固结方程<sup>[15]</sup>和蓄量方程<sup>[16]</sup>进行求解. 其中, Yamamoto 等人<sup>[12]</sup>将海床视为各向同性无限厚度多孔介质, 而 Madsen<sup>[14]</sup>则将海床视为静水压力各向异性非饱和和无限厚度多孔介质. 此外, Yamamoto<sup>[13]</sup>还

研究了有限厚度均质海床在部分饱和条件下的土体响应问题. 1981年, Yamamoto<sup>[17]</sup>求得了非均质成层多孔海床的半解析解, 并用密西西比河三角洲的实验数据进行了验证. 1985年, Okusa<sup>[18]</sup>在弹性条件下利用协调方程将文献[12]中的控制方程简化为四阶线性微分方程, 求得了无限厚度非饱和海床的解析解. 20世纪90年代初, Hsu和Jeng<sup>[19]</sup>采用与Yamamoto<sup>[12]</sup>相似的研究思路, 求解了无限厚度海床在三维线性短峰波作用下的解析解, 并将其推广到有限厚度海床, 求出了显式表达式及二维行进波和驻波2种特殊情况下的解析解<sup>[20]</sup>. 采用这一解析解与Yamamoto等人<sup>[13]</sup>提出的解析解及Mei和Foda<sup>[21]</sup>的边界层近似模型进行了比较, 验证了解析解的有效性. 1997年, Jeng和Seymour<sup>[22,23]</sup>考虑土体渗透率的变异性, 推导了有限厚度海床和无限厚度海床一般土体的解析解. 1999年至2001年, Kitano等人<sup>[24]</sup>、Kitano和Mase<sup>[25]</sup>考虑渗透率呈指数衰减的情况, 推导了一种新的波致海床响应的解析解. 在这一进展中, 除了土体渗透率的变异性之外, 土体的正交各向异性也可以考虑进来. 2006年, 考虑波浪的随机性, Liu和Jeng<sup>[26]</sup>求解了随机波浪荷载作用下无限厚度海床响应的解析解.

概括地说, 目前针对Biot固结模型所得到的解析解可以分为2类: 一类是针对有限厚度海床, 另一类是针对无限厚度海床. 根据所考虑的波浪特性及土体特性的不同又可以细分为若干不同类型. 令人遗憾的是, 为了简化求解, 以往多数研究都应用了在海床无限深度处波浪所引起的超孔隙水压力为零这一条件, 因此求得的解析解是不完备的. 事实上, 波浪动水压力对海床的影响范围总是有限的, 应用无限厚度的假设虽然可以将求解的问题简化, 但也会模糊所求出的解析解的物理意义. 对工程师关注的波浪对海床的影响深度问题, 以往的解析解无法给出明确的回答. 针对上述问题, 本文试图从更一般意义上寻求Biot固结方程的解析解. 首先, 应用分离变量法将Biot固结方程转换为一个关于水平位移的六阶复常系数线性齐次微分方程, 而后, 应用求解线性齐次微分方程的一般方法构造通解, 即找出它的线性无关的基本解, 并由之构造通解. 同时, 在求解中引入复波数的概念, 使求出的解析解可以考虑波阻尼的影响. 通过数值分析, 发现波浪动水压力对海床的影响深度仅为一倍的波长.

## 1 二维 Biot 固结模型

### 1.1 海床面上的波压力

对于图1所示的直角坐标系, 根据线性波理论, 水面高程 $\eta(x,t)$ 可表示为

$$\eta(x,t) = \frac{H}{2} \cos(kx - i\omega t), \quad (1)$$

式中,  $H$  为波高;  $k$  为复波数,  $k = n_r + i\delta$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $n_r = 2\pi/L$ ,  $L$  为波长,  $\delta$  为波动衰减率;  $\omega$  为波动角频率,  $\omega = 2\pi/T$ ,  $T$  为波周期;  $x$  为波浪传播方向上的位置点;  $t$  为时间.

线性波场中任一点的波浪压力可表示为

$$p(x,z,t) = -\rho \frac{\partial \phi(x,z,t)}{\partial t}, \quad (2)$$

式中,  $\rho$  为水的密度;  $z$  为纵坐标;  $\phi(x,z,t)$  为线性波场的速度势, 可由下式求得<sup>[27]</sup>

$$\phi(x,z,t) = -i \frac{Hg \cos k(z+h)}{2\omega \sin(kh)} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (3)$$

式中,  $g$  为重力加速度;  $h$  为水深.

因此, 线性波场任一点波浪引起的动水压力可表示为

$$p(x,z,t) = \frac{\gamma_w H \cos k(z+h)}{2 \cos(kh)} \exp[i(kx - \omega t)], \quad (4)$$

式中,  $\gamma_w$  为水的重度.

在海床面上( $z=-h$ ), 波浪引起的动水压力为

$$p = \frac{\gamma_w H/2}{\cos(kh)} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (5)$$

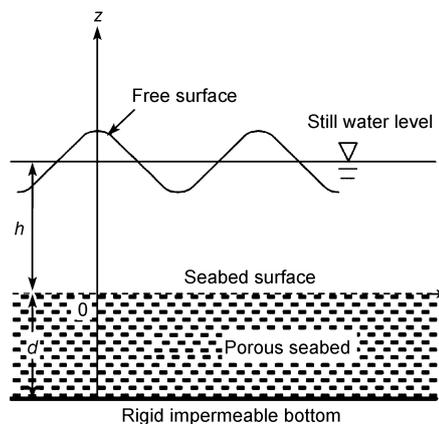


图1 波浪与海床相互作用的示意图

### 1.2 控制方程

波浪压力会引起海底土层中孔隙水的流动, 包括沿水平方向的流动和垂直方向的渗流, 孔隙水流动引起海床土体孔隙水压力和有效应力的变化. 为简化问题, 二维 Biot 固结理论通常采用如下假定: 海床为多孔弹性介质, 孔隙水可压缩, 孔隙水流动服从达西定律, 同时满足质量守恒定律, 即连续性方程. 波浪-海床相互作用的系统如图 1 所示. 孔隙水满足如下的渗流连续方程<sup>[12]</sup>

$$k_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \gamma_w n \beta \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma_w \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_v), \quad (6)$$

式中,  $k_x$ ,  $k_z$  分别为水平和垂直方向的渗透系数;  $p$  为超孔隙水压力;  $n$  为土体孔隙率;  $\beta$  为孔隙水的压缩率, 可表示为

$$\beta = \frac{1}{K} + \frac{1 - S_r}{p_{w0}}, \quad (7)$$

式中,  $K$  为孔隙水的弹性体积模量,  $S_r$  为土体的饱和度, 如果海床为完全饱和, 则  $S_r = 1$ ,  $p_{w0}$  为绝对孔隙水压力.  $\varepsilon_v$  为土体的体应变, 可以表示为

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (8)$$

式中,  $u$  和  $w$  分别为土体水平方向和垂直方向的位移.

在不考虑土体渗透率空间变异性的影响时, 可取  $k_x = k_z$ , (6) 式可以转换为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\gamma_w n \beta}{k_z} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\gamma_w}{k_z} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_v). \quad (9)$$

根据二维 Biot 固结理论, 二维海床土体的有效应力变化满足如下的平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (11)$$

式中,  $\sigma_x$  和  $\sigma_z$  分别为土体水平方向和垂直方向的有效应力;  $\tau$  为剪应力.

将土骨架看作是理想的各向同性的弹性介质, 则海床单元土体的本构方程为

$$\sigma_x = 2G \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right], \quad (12)$$

$$\sigma_z = 2G \left[ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \right], \quad (13)$$

$$\tau = 2G \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad (14)$$

式中,  $G$  为土体的剪切模量,  $G = E/[2(1+\nu)]$ ,  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为泊松比. 将(12)~(14)式代入(10)和(11)式可得

$$G \nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (15)$$

$$G \nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (16)$$

(9), (15)和(16) 式所组成的偏微分方程组即为 Biot 固结模型的控制方程, 在一定的边界条件下, 求解此方程组即可求得  $u$ ,  $w$  和  $p$  三个未知量.

### 1.3 边界条件

在海床表面, 土体竖向有效应力为零, 忽略水的黏性, 则剪切应力也为零, 海床面的动水压力可由(5)式来确定. 因此, 海床面的边界条件可表示为

$$z = 0, \quad \begin{cases} \sigma_z = 0, \\ \tau = 0, \\ P_b = R_e \left\{ \frac{\gamma_w H/2}{\cos(kh)} \exp[i(kx - \omega t)] \right\}. \end{cases} \quad (17)$$

波浪在海床内引起的超孔隙水压力会随深度变化, 并最终消失, 对于无限厚度海床, 底面边界条件为

$$z = \infty, \quad \begin{cases} u = 0, \\ w = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

实际上, 波浪作用下, 海床内土体的位移和超孔隙水压力总是在有限的深度内递减至零. 因此, 本文分析中, 海床底( $z = -d$ )的边界条件取为

$$z = -d, \quad \begin{cases} u = 0, \\ w = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

## 2 解析解的推导

由于边界条件在时间和空间上都是调和的, 因此, 可假定(9), (15)和(16)式所组成的偏微分方程组各分量具有如下行波解

$$u = U(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad (20a)$$

$$w = W(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad (20b)$$

$$p = P(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad (20c)$$

式中,  $U(z)$ ,  $W(z)$ 和  $P(z)$ 为竖向坐标  $z$ 的函数. 与文献[12, 20]一样, 在如下推导中, 也仅考虑(20)式的实部. 与文献[12, 20]不同的是, 本文在推导过程中, 将  $U(z)$ ,  $W(z)$ 和  $P(z)$ 视为复变函数.

将(20)式代入(9), (15)和(16)式可得

$$\begin{cases} \left( -\frac{k_z}{\gamma_w} k^2 + i\omega n\beta \right) P(z) + \frac{k_z}{\gamma_w} P''(z) = \omega k U(z) - iW'(z) \\ -\frac{k^2(2-2\nu)}{1-2\nu} U(z) + U''(z) + \frac{ik}{1-2\nu} W'(z) = \frac{ik}{G} P(z) \\ -k^2 W(z) + \frac{2-2\nu}{1-2\nu} W''(z) + \frac{ik}{1-2\nu} U'(z) = \frac{P'(z)}{G}. \end{cases} \quad (21)$$

经过一些代数变换, 方程组(21)可以转换成如下形式

$$\begin{cases} U^6(z) - k^2(2+k')U^4(z) + k^4(1+2k')U''(z) \\ -k^6 k' U(z) = 0, \quad (22a) \\ W'(z) = \alpha_1[U^4(z) - \alpha_2 U''(z) + \alpha_3 U(z)], \quad (22b) \\ P(z) = \frac{ikG(2-2\nu)}{1-2\nu} U(z) - \frac{iG}{k} U''(z) + \frac{G}{1-2\nu} W'(z), \quad (22c) \end{cases}$$

式中,

$$k' = 1 - \frac{1}{k^2} \frac{i\omega\gamma_w}{k_z} \left[ n\beta + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \right], \quad (23)$$

$$\alpha_1 = \frac{(1-\nu)k_z}{k\omega\gamma_w \left( \frac{n\beta}{2} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \right)}, \quad (24)$$

$$\alpha_2 = \frac{2-3\nu}{1-2\nu} k^2 - \frac{i\omega\gamma_w n\beta}{k_z} \times \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad (25)$$

$$\alpha_3 = k^4 k'. \quad (26)$$

假设(22a)式具有如下形式的特解

$$U(z) = ae^{ibz}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} w = \alpha_1 \cdot & \left\{ \left[ (3c_2 k^2 + c_4 ik^3 + c_5 z ik^3) - \alpha_2 \cdot (c_2 + c_4 ik + c_5 z ik) - \alpha_3 \cdot \left( \frac{c_2}{k^2} + \frac{c_4}{ik} + \frac{c_5 z}{ik} \right) \right] \cdot \cos(ikz) \right. \\ & + \left( c_6 ik^3 k' \sqrt{k'} - \alpha_2 c_6 ik \sqrt{k'} - \frac{\alpha_3 c_6}{ik \sqrt{k'}} \right) \cdot \cos(ik \sqrt{k'} z) - [(c_1 ik^3 + c_2 z ik^3 - 3c_3 k^2) - \alpha_2 \cdot (c_1 ik + c_2 z ik - c_3) \\ & \left. + \alpha_3 \cdot \left( \frac{c_1}{ik} + \frac{c_2 z}{ik} - \frac{c_3}{k^2} \right) \right] \cdot \sin(ikz) - \left( c_3 ik^3 k' \sqrt{k'} - \alpha_2 c_3 ik \sqrt{k'} - \frac{\alpha_3 c_3}{ik \sqrt{k'}} \right) \cdot \sin(ik \sqrt{k'} z) \right\} e^{i(kx-\omega t)}. \end{aligned} \quad (32)$$

式中,  $a$ ,  $b$ 为两未知系数.

将(27)式代入(22a)式可得

$$(b^2 + k^2)^2 \left\{ b^2 + k^2 - \frac{i\omega\gamma_w}{k_z} \left[ n\beta + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \right] \right\} = 0. \quad (28)$$

方程(28)的6个根分别为

$$b = \begin{cases} \pm ik, \\ \pm ik, \\ \pm i \sqrt{\frac{i\omega\gamma_w}{k_z} \left[ n\beta + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \right] - k^2} = \pm ik \sqrt{k'}. \end{cases} \quad (29)$$

由欧拉公式  $U(z) = ae^{ibz} = a[\sin(bz) + i \cos(bz)]$ , 可以推断  $U(z) = a \cos(ikz)$  和  $U(z) = a \sin(ikz)$  是微分方程(22a)的2个基本解. 不难证明,  $U(z) = az \cos(ikz)$ ,  $U(z) = a \cos(ik \sqrt{k'} z)$ ,  $U(z) = az \sin(ikz)$  和  $U(z) = a \sin(ik \sqrt{k'} z)$  也是微分方程(22a)的基本解. 因此, (22a)式的通解可以表示为

$$\begin{aligned} u = & [c_1 U_1(z) + c_2 U_2(z) + c_3 U_3(z) + c_4 U_4(z) \\ & + c_5 U_5(z) + c_6 U_6(z)] e^{i(kx-\omega t)} \\ = & [c_1 \cos(ikz) + c_2 z \cos(ikz) + c_3 \cos(ik \sqrt{k'} z) \\ & + c_4 \sin(ikz) + c_5 z \sin(ikz) + c_6 \sin(ik \sqrt{k'} z)] e^{i(kx-\omega t)}, \end{aligned} \quad (30)$$

式中,  $c_1 \sim c_6$ 为待定系数.

不难证明  $U_1(z), U_2(z), \dots, U_6(z)$  是线性无关的. 若  $U_1(z), U_2(z), \dots, U_6(z)$  线性相关, 则它们所组成的朗斯基行列式  $W[u_1, u_2, \dots, u_6]$  应恒等于零, 即

$$\begin{aligned} W[U_1(z), U_2(z), \dots, U_6(z)] \\ = & \begin{vmatrix} U_1(z) & U_2(z) & \dots & U_6(z) \\ U_1'(z) & U_2'(z) & \dots & U_6'(z) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ U_1^5(z) & U_2^5(z) & \dots & U_6^5(z) \end{vmatrix} \equiv 0. \end{aligned} \quad (31)$$

将  $U_1(z), U_2(z), \dots, U_6(z)$  代入(31)式, 可以证明, (31)式不成立. 因此,  $U_1(z), U_2(z), \dots, U_6(z)$  是线性无关的, (30)式可以作为(22a)式的通解.

将(30)式代入(22b)式, 可得土体的垂直位移响应

将(30)和(32)式代入(22c)式, 可得超孔隙水压力响应

$$\begin{aligned}
 p = & -\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \left[ \frac{\alpha_1 \nu}{1-\nu} \cdot (c_1 k^4 + c_2 z k^4 + 4c_5 i k^3) - \frac{\nu \alpha_1 \alpha_2}{1-\nu} \cdot (c_1 k^2 + c_2 z k^2 + 2c_5 i k) + \frac{\nu \alpha_1 \alpha_3}{1-\nu} \cdot (c_1 + c_2 z) \right. \right. \\
 & + c_1 i k + c_2 z i k - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cdot c_5 + \frac{(1-2\nu)\alpha_1}{2(1-\nu)} \cdot \frac{c_5 k^3}{i} - \frac{(1-2\nu)\alpha_1 \alpha_2}{2(1-\nu)} \cdot \frac{c_5 k}{i} + \frac{(1-2\nu)\alpha_1 \alpha_3}{2(1-\nu)} \cdot \frac{c_5}{i k} \\
 & + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cdot (-c_1 i k - c_2 i k z + c_5) + \frac{(1-2\nu)\alpha_1}{2(1-\nu)} \cdot (c_1 k^4 + c_2 z k^4 + 3c_5 i k^3) - \frac{(1-2\nu)\alpha_1 \alpha_2}{2(1-\nu)} \cdot (c_1 k^2 + c_2 z k^2 + c_5 i k) \\
 & \left. + \frac{(1-2\nu)\alpha_1 \alpha_3}{2(1-\nu)} \cdot \left( c_1 + c_2 z - \frac{c_5 i}{k} \right) \right] \cdot \cos(ikz) + \frac{1}{2(1-\nu)} (\alpha_1 c_3 k^4 k'^2 - \alpha_1 \alpha_2 c_3 k^2 k' + \alpha_1 \alpha_2 c_3 - c_3 i k \sqrt{k'}) \\
 & \times \cos(ik\sqrt{k'}z) + \left[ \frac{\alpha_1 \nu}{1-\nu} \cdot (-4c_2 i k^3 + c_4 k^4 + c_5 z k^4) - \frac{\nu \alpha_1 \alpha_2}{1-\nu} \cdot (-2c_2 i k + c_4 k^2 + c_5 z k^2) + \frac{\nu \alpha_1 \alpha_3}{1-\nu} \cdot (c_4 + c_5 z) \right. \\
 & + (c_4 i k + c_5 z i k) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cdot c_2 - \frac{(1-2\nu)\alpha_1}{2(1-\nu)} \cdot \frac{c_2 k^3}{i} + \frac{(1-2\nu)\alpha_1 \alpha_2}{2(1-\nu)} \cdot \frac{c_2 k}{i} - \frac{(1-2\nu)\alpha_1 \alpha_3}{2(1-\nu)} \\
 & \times \frac{c_2}{i k} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cdot (c_2 + c_4 i k + c_5 i k z) - \frac{(1-2\nu)\alpha_1}{2(1-\nu)} \cdot (3c_2 i k^3 - c_4 k^4 - c_5 z k^4) + \frac{(1-2\nu)\alpha_1 \alpha_2}{2(1-\nu)} \\
 & \left. \times (c_2 i k - c_4 k^2 - c_5 z k^2) + \frac{(1-2\nu)\alpha_1 \alpha_3}{2(1-\nu)} \cdot \left( \frac{c_2 i}{k} + c_4 + c_5 z \right) \right] \\
 & \times \sin(ikz) + \frac{1}{2(1-\nu)} (\alpha_1 c_6 k^4 k'^2 - \alpha_1 \alpha_2 c_6 k^2 k' + \alpha_1 \alpha_2 c_6 - c_6 i k \sqrt{k'}) \cdot \sin(ik\sqrt{k'}z) \} e^{i(kx-\omega t)}. \quad (33)
 \end{aligned}$$

将(30), (32)式代入(12)~(14)式, 可得土体的正应力和剪应力响应

$$\begin{aligned}
 \sigma_x = & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \left[ \frac{\alpha_1 \nu}{1-\nu} \cdot (c_1 k^4 + c_2 z k^4 + 4c_5 i k^3) - \frac{\nu \alpha_1 \alpha_2}{1-\nu} \cdot (c_1 k^2 + c_2 z k^2 + 2c_5 i k) + \frac{\nu \alpha_1 \alpha_3}{1-\nu} \cdot (c_1 + c_2 z) \right. \right. \\
 & + (c_1 i k + c_2 z i k) \cdot \cos(ikz) + \left( \frac{\alpha_1 \nu}{1-\nu} \cdot c_3 k^4 k'^2 - \frac{\nu \alpha_1 \alpha_2}{1-\nu} \cdot c_1 k^2 k' + \frac{\nu \alpha_1 \alpha_3}{1-\nu} \cdot c_3 + c_3 i k \sqrt{k'} \right) \cdot \cos(ik\sqrt{k'}z) \\
 & + \left[ \frac{\alpha_1 \nu}{1-\nu} \cdot (-4c_2 i k^3 + c_4 k^4 + c_5 z k^4) - \frac{\nu \alpha_1 \alpha_2}{1-\nu} \cdot (-2c_2 i k + c_4 k^2 + c_5 z k^2) + \frac{\nu \alpha_1 \alpha_3}{1-\nu} \cdot (c_4 + c_5 z) \right. \\
 & \left. + (c_4 i k + c_5 z i k) \cdot \sin(ikz) + \left( \frac{\alpha_1 \nu}{1-\nu} \cdot c_6 k^4 k'^2 - \frac{\nu \alpha_1 \alpha_2}{1-\nu} \cdot c_6 k^2 k' + \frac{\nu \alpha_1 \alpha_3}{1-\nu} \cdot c_6 + c_6 i k \sqrt{k'} \right) \cdot \sin(ik\sqrt{k'}z) \right] \} e^{i(kx-\omega t)}, \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_z = & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ [\alpha_1 \cdot (c_1 k^4 + c_2 z k^4 + 4c_5 i k^3) - \alpha_1 \alpha_2 \cdot (c_1 k^2 + c_2 z k^2 + 2c_5 i k) + \alpha_1 \alpha_3 \cdot (c_1 + c_2 z) \\
 & + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot (c_1 i k + c_2 z i k)] \cdot \cos(ikz) + (\alpha_1 c_3 k^4 k'^2 - \alpha_1 \alpha_2 c_3 k^2 + \alpha_1 \alpha_3 c_3 + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot c_3 i k \sqrt{k'}) \cdot \cos(ik\sqrt{k'}z) \\
 & + [\alpha_1 \cdot (-4c_2 i k^3 + c_4 k^4 + c_5 z k^4) - \alpha_1 \alpha_2 \cdot (-2c_2 i k + c_4 k^2 + c_5 z k^2) + \alpha_1 \alpha_3 \cdot (c_4 + c_5 z) + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot (c_4 i k \\
 & + c_5 z i k)] \cdot \sin(ikz) + \left( \alpha_1 c_6 k^4 k'^2 - \alpha_1 \alpha_2 c_6 k^2 + \alpha_1 \alpha_3 c_6 + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot c_6 i k \sqrt{k'} \right) \cdot \sin(ik\sqrt{k'}z) \} e^{i(kx-\omega t)}, \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau = & \frac{E}{2(1+\nu)} \{ [(c_2 + c_4 i k + c_5 i k z) + \alpha_1 \cdot (3c_2 i k^3 - c_4 k^4 - c_5 z k^4) - \alpha_1 \alpha_2 \cdot (c_2 i k - c_4 k^2 - c_5 z k^2) \\
 & - \alpha_1 \alpha_3 \cdot \left( \frac{c_2 i}{k} + c_4 + c_5 z \right)] \cdot \cos(ikz) + (c_6 i k \sqrt{k'} - c_6 k^4 k'^2 - \alpha_1 \alpha_2 c_6 k^2 k' - \alpha_1 \alpha_3 c_6) \cdot \cos(ik\sqrt{k'}z) \\
 & + [(-c_1 i k - c_2 i k z + c_5) + \alpha_1 \cdot (c_1 k^4 + c_2 z k^4 + 3c_5 i k^3) - \alpha_1 \alpha_2 \cdot (c_1 k^2 + c_2 z k^2 + c_5 i k) \\
 & + \alpha_1 \alpha_3 \cdot \left( c_1 + c_2 z - \frac{c_5 i}{k} \right)] \cdot \sin(ikz) + (c_3 i k \sqrt{k'} - c_3 k^4 k'^2 - \alpha_1 \alpha_2 c_3 k^2 k' - \alpha_1 \alpha_3 c_3) \cdot \sin(ik\sqrt{k'}z) \} e^{i(kx-\omega t)}. \quad (36)
 \end{aligned}$$

结合边界条件(17)和(19)式, 求解上述线性代数方程组就可以确定待定系数  $c_1 \sim c_6$ , 如此便得到了波浪水压力作用下海床响应问题的显式解析解. 若此线性代数方程组无解, 则说明显式解析解不存在.

如前文所述, 以往对 Biot 固结模型的解析求解中均采用了海床无限深度处波浪所引起的超孔隙水压力为零这一假定, 采用这样的假定虽然可以将问题简化, 但却无法解释波浪对海床的影响范围究竟有多大. 本文在以上推导中未采用上述假定, 所得的解是一种完备的解, 能更准确地反映真实的物理背景. 此外, 在以往解析解推导中, 均将(20)式中的  $U(z)$ ,  $W(z)$  和  $P(z)$  当作实函数来处理, 而得到的结果却是复变函数, 前提和结论存在矛盾. 鉴于此, 本文在研究中一开始就将  $U(z)$ ,  $W(z)$  和  $P(z)$  当作复变函数来处理, 推导过程是严谨的. 将(12)~(14)式更换为正交各向异性土体的本构方程, 采用本文的求解思路, 还可以得到波浪与正交各向异性海床相互作用的解析解.

### 3 算例分析

#### 3.1 与试验值及其他解析解的比较

如前文所述, 目前关于波致海床响应的解析解大致可以分为2类: 无限厚度海床的解析解和有限厚度海床的解析解, 分别以 Yamamoto 等人的解析解、Hsu 和 Jeng 的解析解为典型代表. 他们在求解中都使

用了  $t=0$  和  $x=0$  这一初始条件, 即在初始时刻位于初始位置的水质点处于波峰. 为便于比较, 本文的解析解中也使用  $t=0$  和  $x=0$  这一初始条件, 如无特别说明, 本文中其他算例也都使用这一初始条件. 需要指出的是, 采用不同的初始条件, 所得的结果可能会不一样.

分析中, 波浪和海床条件采用 Yamamoto 等人<sup>[12]</sup>所开展的试验中的2组工况, 即: 1) 粗砂, 波周期  $T=1.5$  s; 2) 细砂, 波周期  $T=2.0$  s. 试验的基本物理参数为: 土体厚度为 0.5 m, 水深为 0.9 m, 波高为 0.2 m; 近似测得的参数: 泊松比约为 1/3, 饱和度约为 98%. 其余物理参数则基于2种试验工况下测得的孔隙水压结果, 应用 Yamamoto 等人的解析解进行参数识别得到.

图2为本文解析解与 Yamamoto 等人<sup>[12]</sup>的试验值、解析解以及 Hsu 和 Jeng<sup>[20]</sup>的解析解的比较. 可见, 在2种试验工况下, 本文的解析解和 Yamamoto 等人<sup>[12]</sup>的解析解与试验值吻合地较好; 与 Hsu 和 Jeng 对于有限厚度海床的解析解相比, 本文的解析解更接近试验值. 另外, 通过求解  $\partial p / \partial z$  可以发现, 2种工况下, 由本文的解析解均求得  $\partial p / \partial z = 0$ ; 由 Hsu 和 Jeng<sup>[20]</sup>的解析解求得: 1) 粗砂,  $\partial p / \partial z = -19.6$ ; 2) 细砂,  $\partial p / \partial z = 6890.6$ . 由此可见, Hsu 和 Jeng<sup>[20]</sup>的解析解不能严格满足海床底部渗流为零的边界条件, 是一种近似解. 由于一些关键的土体参数如渗透率、剪切模量等与波浪参数无法精确获知, 尚无法断定本文的解析解与 Yamamoto 的解析解哪个更接近实验值. 但 Yamamoto 等人的解析解是针对无限厚度海床推导出来的, 不

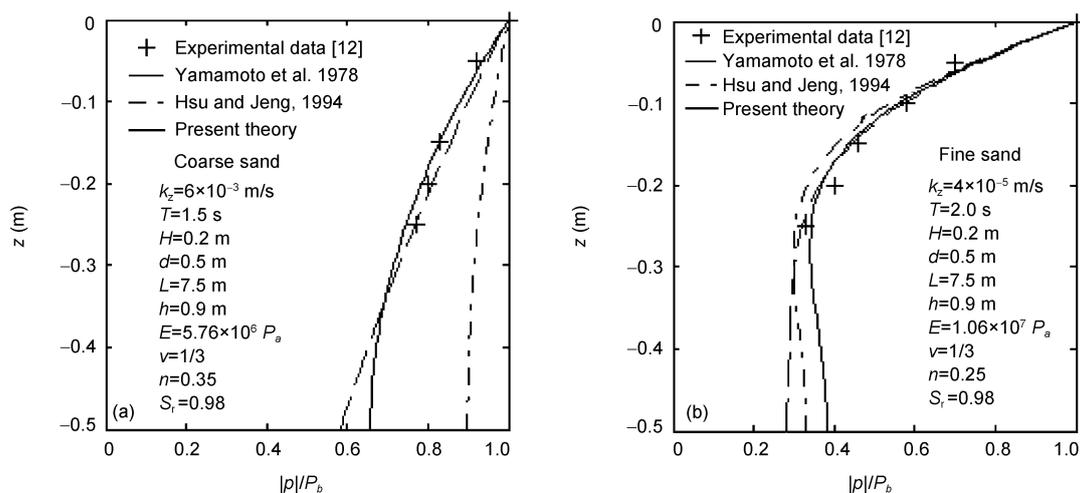


图2 本文结果与试验值及其他解析解的比较

能精确描述有限厚度海床的响应, 本文的解析解应用范围更广.

### 3.2 与数值计算结果的比较

取 2 类均质饱和和单层土体为研究对象, 海床渗流计算参数如表 1 所示, 将这 2 种工况下的解析计算结果与数值计算结果(采用 FlexPDE 偏微分方程求解器)进行对比, 以进一步验证本文解析解的有效性. 图 3 为解析解与数值解的对比结果, 实线为本文解析解的计算结果, 虚线代表数值计算结果. 对比结果显示, 2 种工况下, 本文的解析解与数值计算结果均十分吻合, 说明本文的解析解是有效的.

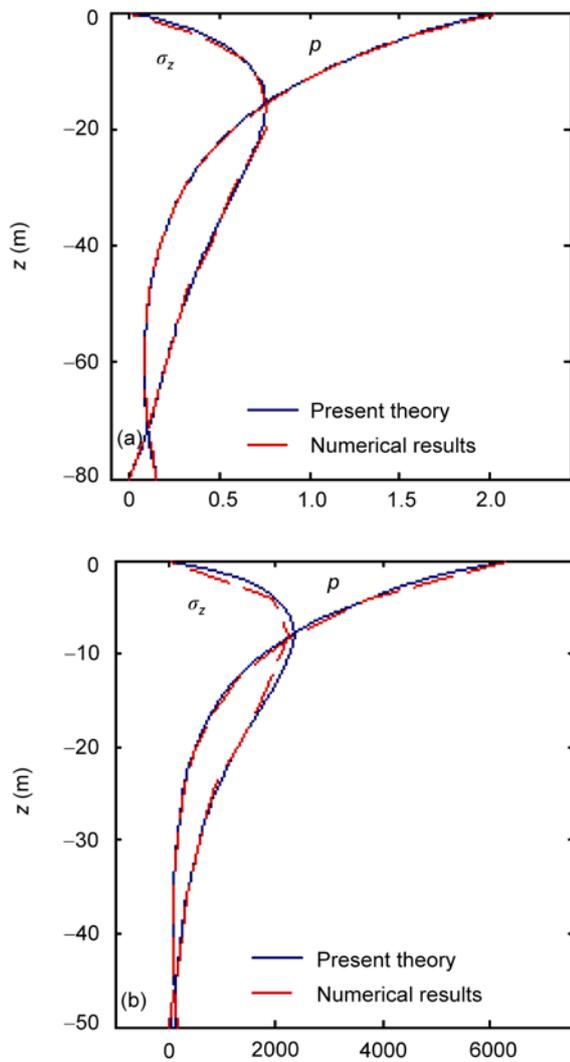


图 3 本文解析解与数值解的比较  
(a) Case 1; (b) Case 2

表 1 海床渗流计算参数

Item	Value	
	Case 1	Case 2
Coefficient of permeability (m/s)	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$
Porosity	0.35	0.35
Saturation level (%)	100	100
Poisson ratio	0.3	0.3
Elastic modulus (Pa)	$2 \times 10^7$	$4 \times 10^7$
Water depth (m)	10	20
Wave height (m)	5	8
Wave period (s)	6	10
Wave length (m)	100	50
Seabed thickness (m)	80	50

## 4 基于解析解的若干推论

### 4.1 初始条件的影响

如前文所述, Biot 固结模型是由 3 个线性偏微分方程所组成的, 其边界条件中隐含着初始条件, 以往多数研究都没有考虑初始条件的影响. 前面的算例中均采用  $t=0$  和  $x=0$  这一初始条件, 为研究初始条件的影响, 基于本文的解析解对比 2 种不同初始条件下海床响应的求解结果. 选择 2 种不同的初始条件: 1)  $t=0, x=0$ ; 2)  $t=0, x=25$  m. 海床渗流计算参数如表 2 所示, 计算结果如表 3 和图 4 所示. 可见, 初始条件选择不同, 计算出的海床响应的空间分布是不一样的. 因此, 在应用 Biot 固结模型求解波致海床响应中, 有必要指明特定的初始条件. 另外, 对比同一初始条件下的求解的海床响应结果可知, 土体竖向有效正应力与剪应力的相位相差  $180^\circ$ 、与超孔隙水压力的相位一致.

表 2 海床渗流计算参数

Item	Value
Coefficient of permeability (m/s)	$1 \times 10^{-2}$
Porosity	0.35
Saturation level (%)	100
Poisson ratio	0.3
Elastic modulus (Pa)	$3 \times 10^7$
Water depth (m)	10
Wave height (m)	5
Wave period (s)	6
Wave length (m)	100
Seabed thickness (m)	100

表3 计算结果

系数	初始条件	
	$t=0, x=0$	$t=0, x=25$
$c_1$	$-2.11 \times 10^{-3} - 1.69 \times 10^{-3}i$	$-1.69 \times 10^{-3} + 2.11 \times 10^{-3}i$
$c_2$	$-5.07 \times 10^{-4} - 8.78 \times 10^{-5}i$	$-8.78 \times 10^{-4} + 5.07 \times 10^{-5}i$
$c_3$	$-1.58 \times 10^{-4} + 7.72 \times 10^{-4}i$	$7.72 \times 10^{-4} + 1.58 \times 10^{-4}i$
$c_4$	$-1.70 \times 10^{-3} + 2.12 \times 10^{-3}i$	$2.12 \times 10^{-3} + 1.70 \times 10^{-3}i$
$c_5$	$-8.78 \times 10^{-5} + 5.07 \times 10^{-4}i$	$5.07 \times 10^{-5} + 8.78 \times 10^{-4}i$
$c_6$	$7.73 \times 10^{-4} + 1.58 \times 10^{-4}i$	$1.58 \times 10^{-4} - 7.73 \times 10^{-4}i$

4.2 波浪动水压力对海床的影响

对于海洋工程师比较关注的波浪对海床的影响

深度问题, 至今还没有明确的答案. 为此, 利用本文的解析解对这一问题进行对比研究, 海床渗流计算参数如表2所示, 选择7种不同的海床厚度, 计算出的海床响应的幅值如图5所示. 图5(a)显示, 在可渗海床厚度小于0.2倍波长的情况下, 波致海床土体的最大水平位移发生在海床面位置; 在可渗海床厚度大于0.2倍波长的情况下, 水平位移先是沿深度方向递增, 当达到约0.2倍波长的位置, 水平位移达到最大值, 而后沿深度方向递减, 至海床底或一倍的波长深度处, 水平位移近似为零. 图5(b)显示, 波浪作用下, 海床土体的最大竖向位移总是发生在海床面位置, 沿深度方向递减; 可渗海床厚度与波长的比值对

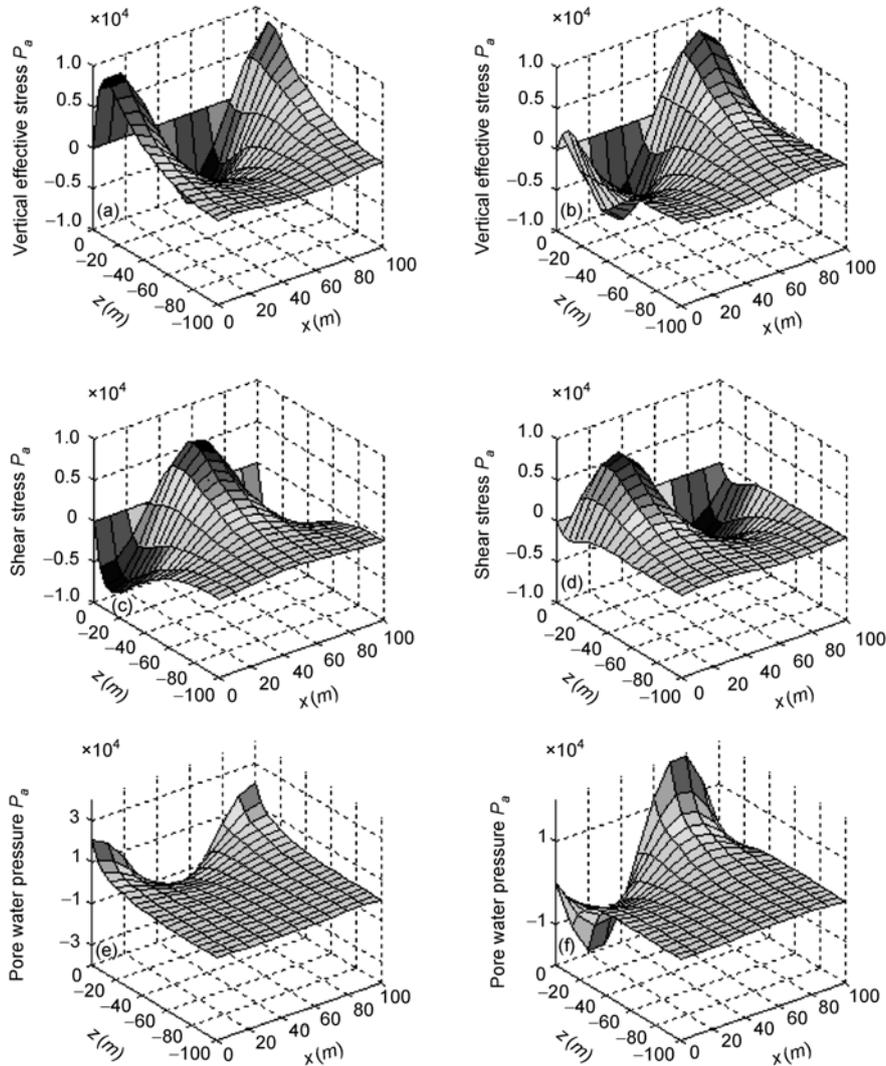


图4 初始条件的影响

(a)  $t=0$  s,  $x=0$  m; (b)  $t=0$  s,  $x=25$  m; (c)  $t=0$  s,  $x=0$  m; (d)  $t=0$  s,  $x=25$  m; (e)  $t=0$  s,  $x=0$  m; (f)  $t=0$  s,  $x=25$  m.

海床面最大竖向位移值影响较大. 由图5(a)和(b)可以得出这样的启示: 海洋建筑物设计中, 设计波波长的选择应充分考虑场地可渗土层厚度的影响, 最大波高对应的波长未必能保障建筑物的安全; 另外, 考虑到海床稳定性的影响, 海洋桩基的埋深不应小于 0.2 倍的波长. 图 5(c)~(e)显示, 波浪作用下, 土体有效应力先是沿深度方向递增, 至约 0.2 倍的波长深度处达到最大值, 而后沿深度方向递减; 在可渗海床厚度小于波长的情况下, 土体水平向有效应力和剪应力的幅值在接近于海床底附近会有所增加, 这是由海床底部渗

流受阻所引起的. 图 5(f)显示, 波浪作用下, 海床土体的超孔隙水压力沿深度方向递减, 至一倍波长深度处递减至零. 因此, 根据波浪动水压力的作用在海床土体内引起的超孔压将在有限的深度范围内趋近于零这一物理背景, 由本文的解析解计算出的结果可以得出这样的结论: 波浪动水压力在海床内的影响深度为一倍的波长. 根据这一结论, 建议在运用数值方法模拟波致海床响应中, 当可渗海床厚度小于波长时, 计算海床厚度应取实际可渗海床厚度; 当可渗海床厚度大于波长时, 计算海床厚度应等于一倍的波长.

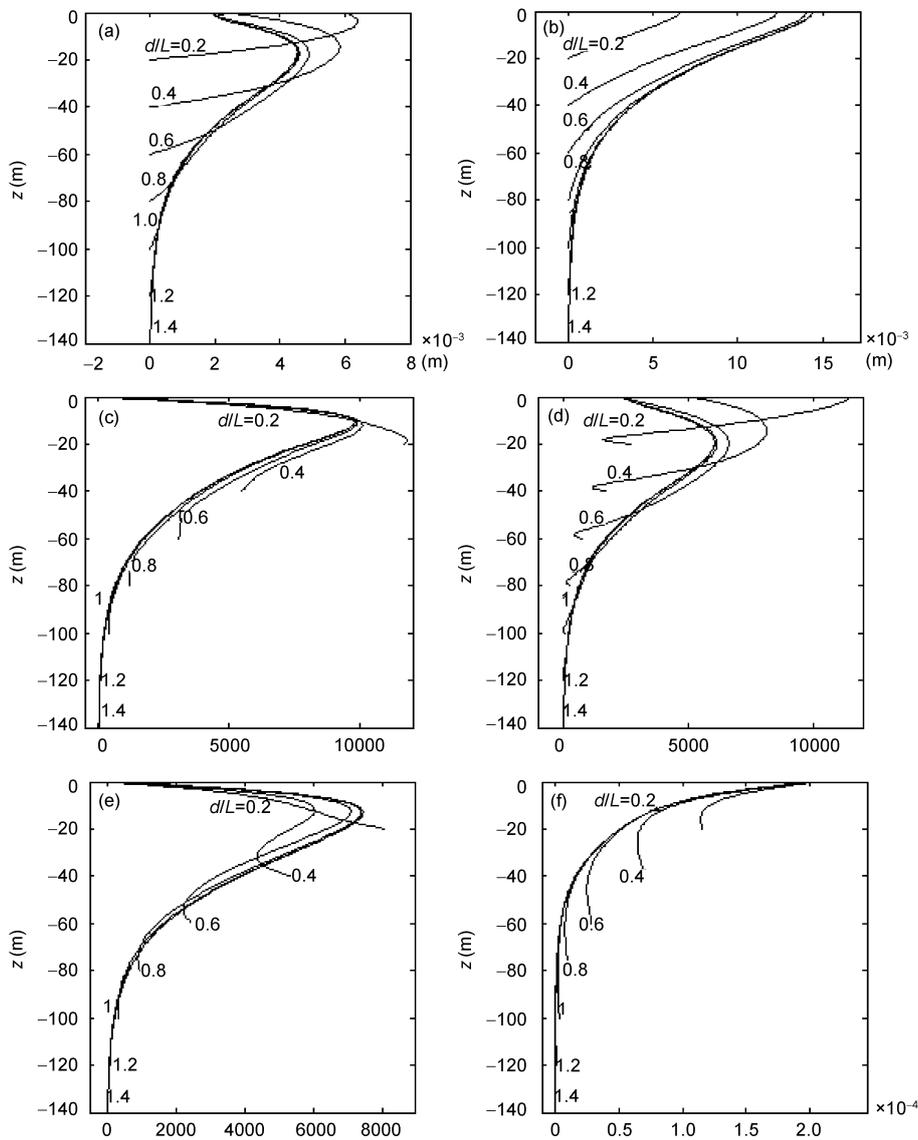


图 5 海床深度的影响

(a) 水平位移; (b) 垂直位移; (c) 垂直有效应力  $P_a$ ; (d) 水平有效应力  $P_a$ ; (e) 剪应力  $P_a$ ; (f) 超孔隙水压力  $P_a$

### 4.3 波阻尼的影响

当  $k$  取为复数时, 应用本文解析解, 可以考虑波阻尼对海床响应的影响. 图 6 为在考虑波阻尼与不考虑波阻尼海床面波压力及不同深度处超孔压响应的对比. 这里, 波阻尼取为  $\delta=0.005$ , 海床和波浪参数同表 2. 图 6 显示, 考虑波阻尼的影响后, 海床面波压力及超孔隙水压力的幅值都明显降低, 而且沿波浪的传播方向幅值不断衰减; 海床面波压力的相位不受其影响, 而超孔压的相位则会出现滞后, 沿深度方向, 滞后相位呈现递增的趋势. 由此可见, 波阻尼对海床响应的影响十分显著, 在波致海床失稳评估中需要引起重视.

## 5 结论

和以往对 Biot 固结模型的解析求解策略不同, 本文首先将固结模型控制方程转化为关于水平位移的六阶复系数齐次常微分方程, 然后通过假设基本解的形式求得了水平位移的 6 个基本解, 从而构造出

水平位移的通解, 结合边界条件求出通解中的未知系数, 最终确定了 Biot 固结模型的显式通解. 将本文解析解与 Yamamoto 等人的试验值、Yamamoto 解析解及 Hsu 和 Jeng 的解析解以及数值解进行了比较, 讨论了波浪动水压力在海床内的影响深度和波阻尼的影响. 通过本文的研究可以得出如下结论.

1) 同 Yamamoto 等人的解析解及 Hsu 和 Jeng 的解析解相比, 本文的解析解推导过程中没有采用任何简化假定, 更为严谨, 是一种完备的解答. 在粗砂和细砂 2 种试验工况下, 同 Hsu 和 Jeng 的解析解相比, 本文的解析解计算出的结果与试验值更为接近. 而 Yamamoto 等人的解析解仅适用于无限厚度海床的情况, 本文的解析解则不受此限制.

2) 波浪动水压力的作用在海床土体内引起的超孔压将在有限的深度范围内趋近于零. 本文研究表明: 波浪动水压力在海床内的影响深度为一倍的波长. 因此, 建议在求解波致海床响应中, 当可渗海床厚度小于波长时, 计算海床厚度应取实际可渗海床厚度; 当可渗海床厚度大于波长时, 计算海床厚度应

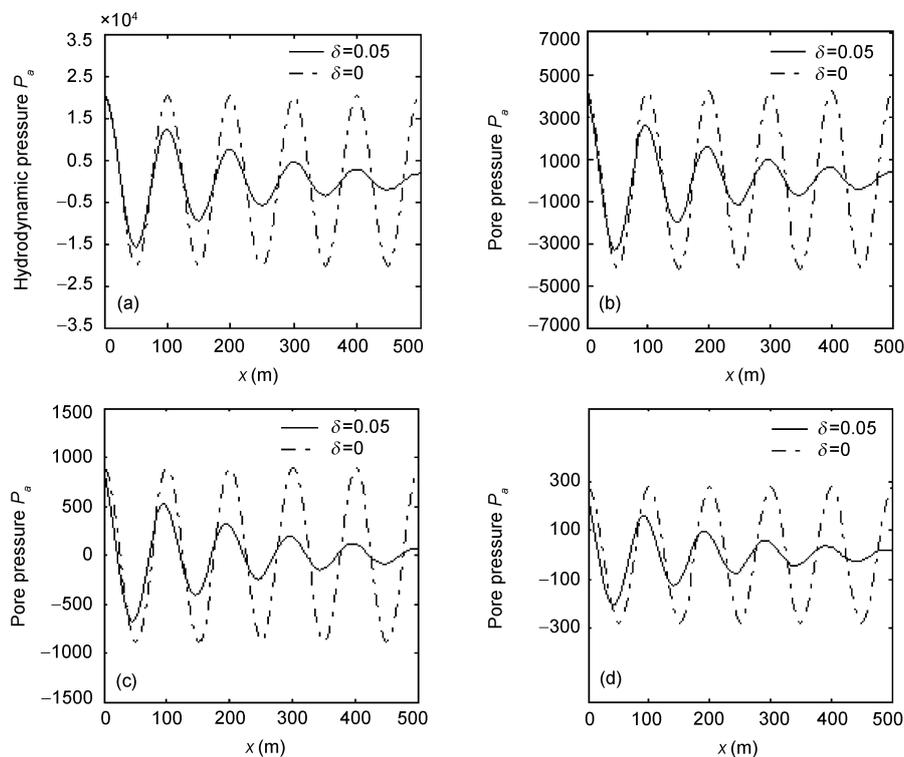


图 6 波阻尼的影响

(a)  $z=0$ ; (b)  $z=-L/4$ ; (c)  $z=-L/2$ ; (d)  $-3L/4$ .

等于波长.

3) 波阻尼对海床面波压力的幅值有影响, 对海

床内超孔压的幅值和相位均有影响, 在海床失稳评估中应考虑波阻尼的影响.

## 参考文献

- 1 Christian J T, Taylor P K, Yen J K C, et al. Large diameter underwater pipeline for nuclear power plant designed against soil liquefaction. In: Proceeding of Offshore Technology Conference, Dallas, 1974. 597—606
- 2 Smith A W, Gordon A D. Large breakwater toe failures. *J Water Harbors Coastal Eng Div Am Soc Civ Eng*, 1983, 109: 253—255
- 3 Lundgren H, Lindhardt J H C, Romhild C J. Stability of breakwaters on porous foundation. In: Proceeding 12th International Conference Soil Mechanics and Foundation Engineering 1, 1989. 451—454
- 4 Barends F B J. Interaction between ocean waves and seabed. In: Proceeding of International Conference on Geotechnical Engineering for Coastal Development Theory and Practice on Soft Ground (Geot-Coastal'91), Yokohama, Japan, 1991, 2: 1091—1108
- 5 Jeng D S. Wave-induced sea floor dynamics. *Appl Mech Rev*, 2003, 56: 407—429
- 6 Putnam J A. Loss of wave energy due to percolation in a permeable sea bottom. *Trans Am Geophys Union*, 1949, 30: 349—356
- 7 Sleath J F A. Wave-induced pressures in beds of sand. *J Hydraul Div Am Soc Civ Eng*, 1970, 96: 367—378
- 8 Liu P L F. Damping of water waves over porous bed. *J Hydraul Div Am Soc Civ Eng*, 1973, 99: 2263—2271
- 9 Massel S R. Gravity waves propagated over permeable bottom. *J Waterw Harbors Coastal Eng Div Am Soc Civ Eng*, 1976, 102: 111—121
- 10 Nakamura H, Onishi R, Minamide H. On the seepage in the seabed due to waves. In: Proceeding of 20th Coastal Engineering Conference, JSCE, 1973. 421—428
- 11 Moshagen H, Torum A. Wave induced pressures in permeable seabeds. *J Waterw Harbors Coastal Eng Div Am Soc Civ Eng*, 1975, 101: 49—57
- 12 Yamamoto T, Koning H L, Sellmeijer H, et al. On the response of a poro-elastic bed to water waves. *J Fluid Mech*, 1978, 87: 193—206
- 13 Yamamoto T. Wave induced instability seabeds. In: Proceeding ASCE Special Conference, Coastal Sediments 77, Charleston, SC, 1977. 898—913
- 14 Madsen O S. Wave-induced pore pressures and effective stresses in a porous bed. *Geotech*, 1978, 28: 377—393
- 15 Biot M A. General theory of three-dimensional consolidation. *J Appl Phys*, 1941, 12: 155—164
- 16 Verruijt A. *Elastic Storage of Aquifers, Flow Through Porous Media*. New York: Academic Press, 1969. 331—376
- 17 Yamamoto T. Wave-induced pore pressures and effective stresses in inhomogeneous seabed foundations. *Ocean Eng*, 1981, 8: 1—16
- 18 Okusa S. Wave-induced stresses in unsaturated submarine sediments. *Geotech*, 1985, 35: 517—532
- 19 Hsu J R C, Jeng D S, Tasi C P. Short-crested wave-induced soil response in a porous seabed of infinite thickness. *Int J Numer Analyt Meth Geomech*, 1993, 17: 553—576
- 20 Hsu J R C, Jeng D S. Wave-induced soil response in an unsaturated anisotropic seabed of finite thickness. *Int J Numer Analyt Meth Geomech*, 1994, 18: 785—807
- 21 Mei C C, Foda M A. Wave-induced response in a fluid-filled poro-elastic solid with a free surface—a boundary layer theory. *Geophys J R Astron Soc*, 1981, 66: 597—631
- 22 Jeng D S, Seymour B R. Response in seabed of finite depth with variable permeability. *J Geotech Geoenviron Engrg*, 1997, 123: 902—911
- 23 Jeng D S, Seymour B R. Wave-induced pore pressure and effective stresses in a porous seabed with variable permeability. *ASME J Offshore Mech Arct Eng*, 1997, 119: 327—334
- 24 Kitano T, Mase H, Nakano S. Effects of inhomogeneity of permeability on wave-induced porewater pressure in seabed. In: Canadian Coastal Conference, 1999. 611—623
- 25 Kitano T, Mase H. Wave-induced porewater pressure in a seabed with inhomogeneous permeability. *Ocean Eng*, 2001, 28: 279—296
- 26 Liu H, Jeng D S. Response of a porous seabed under random wave loading. In: Proceedings of the 25th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Humberg, Germany, 2006. 9
- 27 吴宋仁. 海岸动力学. 北京: 人民交通出版社, 2004