FMBEM 求解直圆柱线性波绕射问题

林志良*

上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院海洋工程国家重点实验室, 上海 200240

*E-mail: linzhiliang@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2010-11-08; 接受日期: 2010-12-16

国家自然科学基金资助项目(批准号: 50739004, 50509016)

摘要 运用快速多极子边界元法(Fast Multipole Boundary Element Method, FMBEM)求得单圆柱在线性波浪中的绕射问题的数值解. 所谓的快速多极子边界元法就是采用快速多极子法(Fast Multipole Method, FMM)加速传统边界元法的求解速度. 在文中通过求解二维的 Helmholtz 方程证明 FMBEM 法具有高精度和高效率, 适用于求解大规模的数值问题. 另外, 给出了单圆柱线性平面波绕射问题中相关水动力学系数的数值计算结果.

关键词 快速多极子边界元法, 波浪绕射, Helmholtz 方程

PACS: 47.35.Lf, 71.15.Ap, 92.10.Hm, 92.10.Lq

在海洋工程中, 波浪与垂直柱子相互作用已有深入的研究. 1954 年, Maccamy 和 Fuchs^[1]给出了在线性波浪中单个垂直圆柱绕射问题的解析解. 从那以后, 有许多圆柱平面波绕射问题相关的数值计算报道, 如 Mei^[2]运用混合有限元法求解了垂直多圆柱的平面波绕射问题, 而 Au 和 Brebbia^[3]运用传统的边界元法(Boundary Element Method, BEM)求解了同类问题. 边界元法只需离散所求解问题的边界, 从而使问题的计算维数减少了一维, 并且具有计算精度高的优点. 然而, 运用传统的边界元法需要花费大量的 CPU 时间生成一个 $N \times N$ 阶的满阵(N 为边界离散节点的个数), 同时需要占用大量的内存空间储存这个系数矩阵. 求解该满阵线性方程组同样需要耗费大量的计算时间和内存空间, 采用直接法求解需要 $O(N^3)$ 的计算量级和 $O(N^2)$ 的存储量级, 而采用迭代法求解的计算量级为 $O(N^2)$. 所以当求解大规模问题时, 传统边界元法的计算效率已经成为一个严

重的缺陷. 而最近可采用一种叫作快速多极子法(Fast Multipole Method, FMM)的方法来加速传统边界元法的矩阵计算, 可有效降低内存消耗, 克服传统边界元法的局限性.

快速多极子法最初由 Rokhlin^[4]于 1985 年提出的一种求解二维 Laplace 方程的快速算法, 并已被誉为 20 世纪十大快速算法之一^[5]. 快速多极子法和传统边界元法相结合产生快速多极子边界元法(FMBEM). 当边界上节点数 N 大于数百或上千时, 该新方法的计算速度要明显快于传统的边界元法. 在 Liu 和 Nishimura^[6]中, 已对 FMBEM 及其主要求解过程进行了详细的介绍, 而关于 FMBEM 应用的全面综述可参见 Nishimura^[7].

本文应用 FMBEM 求解单圆柱线性平面波绕射问题, 并将计算结果与传统边界元法的计算结果相比较, 验证 FMBEM 的高计算效率; 也将数值计算结果同 Mei^[8]中所提供的解析解相比较, 验证新方法的

引用格式: 林志良. FMBEM 求解直圆柱线性波绕射问题. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, 41: 155–160

Lin Z L. Diffraction of linear waves around a vertical circular cylinder using the FMBEM (in Chinese). Sci Sin Phys Mech Astron, 2011, 41: 155–160, doi: 10.1360/132010-1067

计算精度. 同时文中给出了单圆柱线性平面波绕射问题中相关水动力学系数的数值计算结果.

1 问题描述

如图 1 所示, 在 z 轴方向上有一个固定圆柱从等深的水底垂直穿出水面, 而在 xy 平面上有个单频入射长峰波, 而坐标原点定义在圆柱体的中轴线与平均水面交接处. 假设流体无粘不可压, 并且无旋, 满足势流理论. 因此, 我们可以引入速度势并定义总速度势为 Φ , 入射波速度势为 Φ_I 以及波浪散射势为 Φ_S . 入射波的波数表示为 k , 且沿 x 轴方向和 y 轴方向的分量分别为 k_x 和 k_y , 入射波频率为 ω , 水深为 h , 波幅为 A , 圆柱半径为 a , 时间为 t , 而重力加速度为 g .

图 1 坐标系示意图

在线性波理论中, 总速度势 Φ 在整个流场(Ω)中应满足 Laplace 方程, 即

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (1)$$

并在平均水面($z=0$)上满足线性化自由面条件

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

而在水底($z=-h$)和圆柱表面(S_b)上满足不可穿透条件, 分别为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

和

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad (4)$$

其中 n 表示圆柱表面的单位法向量.

对于线性单频波问题, 速度势可做如下分解

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y)Z(z)e^{-i\omega t}, \quad (5)$$

$$\Phi_I(x, y, z, t) = \phi^I(x, y)Z(z)e^{-i\omega t}, \quad (6)$$

$$\Phi_S(x, y, z, t) = \phi^S(x, y)Z(z)e^{-i\omega t}, \quad (7)$$

其中

$$Z(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}. \quad (8)$$

在这个简化过程中, 水底边界条件自动满足, 而线性自由面边界条件满足色散关系

$$\omega^2 = gk \tanh kh. \quad (9)$$

因此, 原问题可以简化为只在自由水面上的二维问题. 而且入射波速度势 Φ_I 给定, 从而未知量 $\phi^S(x, y)$ 的控制方程为 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \phi^S + k^2 \phi^S = 0, \quad (10)$$

并且在圆柱表面满足边界条件

$$\frac{\partial \phi^S}{\partial n} = -\frac{\partial \phi^I}{\partial n} \quad \text{在 } r = a \text{ 上}, \quad (11)$$

无穷远处满足所谓的 Sommerfeld 条件

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} (kr)^{1/2} \left(\frac{\partial \phi^S}{\partial r} - ik \phi^S \right) = 0, \quad (12)$$

其中 r 是径向坐标, 而 $i = \sqrt{-1}$.

给定的线性平面入射波的速度势表示为

$$\Phi_I = -\frac{igA}{\omega} Z(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}. \quad (13)$$

而总速度势与散射波速度势和入射波速度势的关系如下:

$$\Phi = \Phi_I + \Phi_S, \quad \phi = \phi^I + \phi^S. \quad (14)$$

因此, 垂直圆柱单频线性波绕射问题由控制方程(10)和边界条件(11), (12)组成. 通过求解这个边值问题, 我们可以求得未知量 ϕ^S 和 Φ . 从而流场中流体的速度、自由表面的升高以及动压力可以通过

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi, \quad (15)$$

$$\eta = \frac{i\omega}{g} \phi, \quad (16)$$

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (17)$$

分别计算得到, 其中 ρ 表示流体的密度.

对于平面入射波, 我们总能重新定义一个新坐

标使得波沿着 x 轴的正方向传播, 也就是说可以令 $k_x = k$ 和 $k_y = 0$. 因此, 假设平面入射波沿着 x 轴的正方向传播. 对于一个单位的高度水平切片, 在波浪传播方向上的所受的力为

$$\frac{dF_x}{dz} = -a \int_0^{2\pi} p(a, \theta, z) \cos(\theta) d\theta, \quad (18)$$

其中 $p(a, \theta, z)$ 表示圆柱表面上的压力. 作用在圆柱上无量纲力可定义为

$$R(k, a) = \frac{\frac{dF_x}{dz}}{2\pi a \rho g A Z(z) e^{-i\omega t}}. \quad (19)$$

因此, 作用在圆柱上沿水平方向的总力为

$$F_x = \int_{-h}^0 \frac{dF_x}{dz} dz = 2\pi a R(k, a) \rho g A e^{-i\omega t} \tanh(kh) / k. \quad (20)$$

根据 Mei^[8], 每一单位高度柱体的总受力可以表示为

$$\operatorname{Re} \left(\frac{dF_x}{dz} \right) = \rho \pi a^2 (C_M \dot{U} + \omega C_D U), \quad (21)$$

其中 C_M 为惯性系数, C_D 为阻力系数, 而 U 是不存在圆柱体时, $x = 0$ 处的入射波速度.

根据(13), (15), (18), (19)和(21), 我们可以得到

$$C_M = -\frac{2R_i}{ka}, \quad C_D = \frac{2R_r}{ka}, \quad (22)$$

其中 R_r 和 R_i 分别表示无量纲受力 $R(k, a)$ 的实部和虚部.

根据 Mei^[8], 我们还可以得到 $\frac{dF_x}{dz}$, C_M 和 C_D 的精确解表达式, 即

$$\frac{dF_x}{dz} = \frac{4A}{ka} \frac{\rho g a}{H_1'(ka)} Z(z) e^{-i\omega t}, \quad (23)$$

$$C_M = \frac{4}{\pi} \frac{Y_1'(ka)}{(ka)^2 |H_1'(ka)|^2}, \quad (24)$$

$$C_D = \frac{4}{\pi} \frac{J_1'(ka)}{(ka)^2 |H_1'(ka)|^2}, \quad (25)$$

其中 $H_1'(s) \equiv dH_1^{(1)}/ds$, $J_1'(s) \equiv dJ_1/ds$ 以及 $Y_1'(s) \equiv dY_1/ds$, 而 $H_1^{(1)}$ 为第一类一阶 Hankel 函数, J_1 和 Y_1 分别为第一类和第二类一阶 Bessel 函数. 根据(19), 无量纲受力 $R(k, a)$ 的精确解为

$$R(k, a) = \frac{2}{\pi k a H_1'(ka)}. \quad (26)$$

因此, 我们可以将数值计算结果与精确解相比较, 从而验证计算精度.

2 FMBEM 求解二维 Helmholtz 方程

在线性波理论假设下, 圆柱波浪绕射问题可简化为一个关于散射波速度势 ϕ^s 的二维 Helmholtz 方程边值问题, 由控制方程(10)和边界条件(11), (12)组成. 从而可以运用快速多极子边界元法进行求解, 为了简便, 将控制方程和边界条件重写为

$$(\nabla^2 + k^2)\phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (27)$$

满足边界条件

$$q(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) = \bar{q}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S, \quad (28)$$

其中 $\mathbf{x}$ 表示流体计算域内的坐标为 (x, y) 的点, 而在边界条件中, 上划线表示参量给定. 通过选择方程(27)的基本解, 可以使得无穷远处的边界条件自动满足.

对于二维的 Helmholtz 方程边值问题, 可以直接得到边界积分方程

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) - F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y})) d\Gamma(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (29)$$

其中 G 是二维 Helmholtz 方程的基本解, 表示为

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad (30)$$

而相应的有

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n}. \quad (31)$$

在方程(30)式中, $\mathbf{x}$ 表示从坐标原点 O 指向配置点 $\mathbf{x}$ 的矢量, $H_0^{(1)}$ 表示第一类零阶 Hankel 函数, 而 $\mathbf{y}$ 表示场点.

2.1 FMBEM 基本公式

快速多极子边界元法中, 有若干个重要的公式推导, 包括多极子动量矩(Multipole Moment)、动量矩转移(Moment-to-Moment Translation, M2M)、局部展开系数(Local Expansion)、动量矩到局部展开系数的转移(Moment-to-Local Translation, M2L)和局部展开系数的转移(Local-to-Local Translation, L2L), 详细内容请参见 Liu 和 Nishimura^[6]. 在这里, 仅简要给出二维 Helmholtz 方程相应的公式, 而公式中所用到的相关点的位置如图 2 所示.

设置每个叶子单元所包含的最多节点数为 20 个; 而 GMRES 迭代算法中的误差判断标准设置为 10^{-8} . 在本文中, 所有的 Fortran 程序计算都是在一台 3.0 GHz CPU, 2.0GB RAM 的台式计算机完成的.

在表 1 中, 分别给出运用 FMBEM 和传统的 BEM 求解得到的惯性系数 C_M , 阻力系数 C_D 和无量纲受力 $|2\pi aR|$ 的值. 与相应的解析解比较, 可知两种方法得到的数值计算结果随着边界离散单元数目 N 的增加是收敛于精确解的. 表 2 给出了两种方法在不同离散单元情况下所需的计算时间, 并在图 3 中给出了计算时间关于离散单元数目的变化曲线. 当 N 少于 200 时, 传统 BEM 所需要的计算时间少于 FMBEM. 但是, 随着 N 的增加, 传统边界元法所需的计算时间成几何增长, 而采用 FMBEM, 计算时间却几乎是线性增长. 这说明了快速多极子边界元法将边界元法的计算时间降低到 $O(N)$ 量级, 成功地克服了传统边界元方法计算时间长、计算效率低下的缺点. 在台式机上, 当离散单元数达到 9600 左右, 也就是不到一万个离散节点, 传统边界元法早已失效, 而运用快速多极子边界元法进行求解, 所需的时间仅仅需要 43.7 s, 少于 1 min. 这很好地证明了快速多极边界元法求解大规模数值问题时所具有的高效性.

3.2 波浪绕射的数值结果

对于不同的圆柱半径 a 和波数 k , 表 3 分别给出了惯性系数 C_M , 阻力系数 C_D 和无量纲受力 $|2\pi aR|$ 的值. 从表中可知, C_M , C_D 和 $|R|$ 是 ka 的函数. 图 4 给出

图 3 CPU 计算时间比较

图 4 惯性系数、阻力系数和无量纲力随着 ka 的变化曲线

了惯性系数 C_M , 阻力系数 C_D 和无量纲受力 $|2\pi aR|$ 随着 ka 的变化曲线.

表 1 在 $k_x=k=1.0, a=1.0$ 情况下, C_M 和 C_D 以及 $|2\pi aR|$ 的比较^{a)}

N	C_M		C_D		$ 2\pi aR $	
	FMBEM	TBEM	FMBEM	TBEM	FMBEM	TBEM
36	1.28319	1.28319	0.48213	0.48213	4.3064	4.3064
72	1.28428	1.28428	0.48084	0.48084	4.3082	4.3082
360	1.28469	1.28469	0.48044	0.48044	4.30896	4.30896
720	1.28471	1.28471	0.48044	0.48044	4.30901	4.30901
2400	1.28472	1.28472	0.48044	0.48044	4.30905	4.30905
7200	1.28472	1.28472	0.48043	0.48043	4.30905	4.30905
9600	1.28472		0.48043		4.30906	
精确解	1.28472		0.48043		4.30906	

a) TBEM: 传统的 BEM

表 2 CPU 计算时间比较(单位: s)

N	72	360	1440	2400	4800	7200	9600
FMBEM	0.2	1.3	5.6	10.7	19.9	32.6	43.8
传统 BEM	0.05	2.4	182.0	911.7	7369.7	25642.3	

表 3 在不同的 k 和 a 情况下, C_M 和 C_D 以及 $|R|$ 的比较

a (m)	k_x (m^{-1})	C_M	C_D	$ R $
1.0	1.0	1.28428	0.48084	0.68567
1.0	3.0	0.18055	-0.24936	0.46180
0.5	2.0	1.28428	0.48084	0.68567
1.5	2.0	0.18055	-0.24936	0.46180

4 结论

本文应用快速多极子法加快传统边界元法计算

二维的 Helmholtz 方程的速度, 成功求解线性平面波浪中垂直圆柱绕射问题. 通过与传统边界元法的比较, 快速多极子边界元法具有优越的计算效率, 可以有效快速求解大规模数值问题, 有效克服传统边界元法计算效率低下, 计算规模较小的局限性. 而与已有的解析解比较, FMBEM 可以保证很高的计算精度. FMBEM 具有很高的计算效率和计算精度, 可以快速求解大规模势流问题, 在海洋工程及其他计算领域中具有巨大的应用前景.

参考文献

- 1 MacCamy R C, Fuchs R A. Wave forces on piles: A diffraction theory. U. S. Army Corps of Engineering, Beach Erosion Board, Technical Memorandum, 1954. 69
- 2 Mei C C. Numerical methods in water-wave diffraction and radiation. Annu Rev Fluid Mech, 1978, 10: 393–416
- 3 Au M C, Brebbia C A. Diffraction of water waves for vertical cylinders using boundary elements. Appl Math Model, 1983, 7(2): 106–114
- 4 Rokhlin V. Rapid solution of integral equation of classical potential theory. J Comput Phys, 1985, 60: 187–207
- 5 Board J, Schulten K. The fast multipole algorithm. IEEE Comput Sci Eng, 2000, 2(1): 76–79
- 6 Liu Y J, Nishimura N. The fast multipole boundary element method for potential problems: A tutorial. Eng Anal Bound Elem, 2006, 30: 371–381
- 7 Nishimura N. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. Appl Mech Rev, 2006, 55(4): 299–324
- 8 Mei C C. The applied dynamics of ocean surface waves. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1989. 315–316
- 9 Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover, 1965
- 10 Saad Y, Schultz M. GMRES: A Generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. SIAM Sci Stat Comput, 1986, 7: 856–859

Diffraction of linear waves around a vertical circular cylinder using the FMBEM

LIN ZhiLiang*

State Key Lab of Ocean Engineering School of Naval Architecture Ocean and Civil Engineering, Shanghai JiaoTong University
Shanghai 200240, China

A numerical solution for the diffraction of linear waves around a vertical cylinder is presented in this paper using the fast multipole boundary element method (FMBEM). The fast multipole method (FMM) is employed to accelerate the traditional boundary element method. The accuracy and efficiency of the FMBEM for 2D Helmholtz equation is demonstrated, and it's proved that this approach is suitable for solving large-scaled problems. In addition, numerical results of water dynamics coefficients, which are related to the diffraction problems of linear waves around a cylinder, are supplied in this paper.

fast multipole boundary element method, wave diffraction, Helmholtz equation

PACS: 47.35.Lf, 71.15.Ap, 92.10.Hm, 92.10.Lq

doi: 10.1360/132010-1067