亚纯函数族的正规性

杨 乐
(中国科学院数学研究所,北京)

摘 要

对于域内亚纯的函数族,本文证明了一个普遍与简明的正规定则,它包含了以往的一些正规定则为其特殊情况,并解决了 Baernstein 最近提出的一个问题.

一、引 言

设 $\mathscr{F}$ 为域 D 内的一族亚纯函数,k 为一正整数. 在文献 [1] 中,作者证明了下述定理.

定理 A. 若对于 $\mathscr{F}$ 中每一函数 $f(z)$,它与其 k 阶导数 $f^{(k)}(z)$ 在 D 内都没有不动点,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

阅读了作者的上述文稿后,Baernstein 曾猜想以下命题应该成立.

若对于 $\mathscr{F}$ 中每一函数 $f(z)$ 有 $f(z)\neq 0$, $f'(z)\neq p(z)$, 其中 $P(z)$ 为一确定的多项式,则 $\mathscr{F}$ 为正规族.

本文目的在于证明以下的普遍定理,它包含了以往的一些正规定则(例如 Miranda[2], 顾永兴[3],定理 A[1])以及上述 Baernstein 所猜想的命题为其特殊情况.

定理 1. 设 $\mathscr{F}$ 为域 D 内的一族亚纯函数,k 为一正整数. 又设 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 于 D 内全纯,且 $\varphi^{(k)}(z)\not\equiv\psi(z)$. 若对于 $\mathscr{F}$ 中每一函数 $f(z)$ 有 $f(z)\neq\varphi(z)$, $f^{(k)}(z)\neq\psi(z)$, 则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

作者曾与 Baernstein 教授进行了有益的交谈与通信,谨于此表示谢意.

二、一些引理

引理 1. 设在 $|z|<R\,(0<R\leqslant\infty)$ 内,$f(z)$ 亚纯, $\varphi(z)$ 全纯. 若 $f(0)\neq 0,\ \infty$; $\varphi(0)\neq 0$; $f'(0)\neq\varphi(0)$ 及 $f''(0)\varphi(0)-f'(0)\varphi'(0)\neq 0$, 则当 $0<r<R$ 时有

$$T(r,f)<\bar{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f'-\varphi}\right)-N\left(r,\frac{1}{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}\right)+S(r,f), \tag{2.1}$$

其中

本文 1985 年 7 月 25 日收到.

$$S(r,f)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\frac{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}{f}\right)+m\left(r,\frac{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}{\frac{f'}{\varphi}-1}\right)$$

$$+T\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+\log\left|\frac{f(0)\varphi(0)(f'(0)-\varphi(0))}{f''(0)\varphi(0)-f'(0)\varphi'(0)}\right|+\log 2. \tag{2.2}$$

证. 由恒等式

$$\frac{1}{f}\equiv\frac{f'}{f\varphi}-\frac{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}{f}\cdot\frac{\frac{f'}{\varphi}-1}{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'} \tag{2.3}$$

出发,有

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+m\left(r,\frac{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}{f}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{\frac{f}{\varphi}-1}{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}\right)+\log 2.$$

应用 Jensen-Nevanlinna 公式[4]于

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

与

$$m\left(r,\frac{\frac{f'}{\varphi}-1}{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}\right),$$

有

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log\frac{1}{|f(0)|}$$

与

$$m\left(r,\frac{\frac{f'}{\varphi}-1}{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}\right)=m\left(r,\frac{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}{\frac{f'}{\varphi}-1}\right)+\left\{N\left(r,\frac{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}{\frac{f'}{\varphi}-1}\right)\right.$$

$$\left.-N\left(r,\frac{\frac{f'}{\varphi}-1}{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}\right)\right\}+\log\left|\frac{\frac{f'(0)}{\varphi(0)}-1}{\frac{f''(0)\varphi(0)-f'(0)\varphi'(0)}{\varphi(0)^2}}\right|.$$

再注意到

$$N\left(r,\frac{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}{\frac{f'}{\varphi}-1}\right)-N\left(r,\frac{\frac{f'}{\varphi}-1}{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}\right)$$

$$=N\left(r,\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'\right)-N\left(r,\frac{f'}{\varphi}-1\right)+N\left(r,\frac{1}{\frac{f'}{\varphi}-1}\right)-N\left(r,\frac{1}{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}\right)$$

$$=\bar{N}\left(r,\frac{f'}{\varphi}\right)+N\left(r,\frac{1}{\frac{f'}{\varphi}-1}\right)-N\left(r,\frac{1}{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}\right),$$

(2.1) 与 (2.2) 式即随之成立.

引理 2. 命 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 如引理 1 所设,而

$$g(z)=\frac{\{f''(z)\varphi(z)-f'(z)\varphi'(z)\}^2}{\varphi(z)^3(f'(z)-\varphi(z))^3}. \tag{2.4}$$

若 $g(0)\neq 0,\ \infty$; $g'(0)\neq 0$, 则

$$N_{1)}(r,f)\leqslant \bar{N}_{(2}(r,f)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f'-\varphi}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f''\varphi-f'\varphi'}\right)$$
$$+2\bar{N}\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+m\left(r,\frac{g'}{g}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|, \tag{2.5}$$

其中 $N_{1)}(r,f)$ 为 $f(z)$ 的单极点的密指量, $\bar{N}_{(2}(r,f)$ 为 $f(z)$ 的重极点的精简密指量, 即每个值点仅计一次.

证. 设 $f(z)$ 在点 z_0 具有单极点, 且 z_0 不是 $\varphi(z)$ 的零点. 因此在 z_0 的一个小邻域 $\Omega(z_0)$ 内有

$$f(z)=\frac{a}{z-z_0}+O(1)\qquad (a\neq 0),$$

$$f'(z)=\frac{-a}{(z-z_0)^2}+O(1)$$

以及

$$f''(z)=\frac{2a}{(z-z_0)^3}+O(1).$$

另一方面,在 $\Omega(z_0)$ 内有展式

$$\varphi(z)=\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)+\cdots\qquad (\varphi(z_0)\neq 0),$$

于是由初等计算,在 $\Omega(z_0)$ 内有

$$g(z)=\frac{\frac{4a^2\varphi(z_0)^2}{(z-z_0)^6}+\frac{12a^2\varphi(z_0)\varphi'(z_0)}{(z-z_0)^5}+O\left(\frac{1}{(z-z_0)^4}\right)}{\frac{-a^3\varphi(z_0)^3}{(z-z_0)^6}-\frac{3a^3\varphi(z_0)^2\varphi'(z_0)}{(z-z_0)^5}+O\left(\frac{1}{(z-z_0)^4}\right)}$$
$$=-\frac{4}{a\varphi(z_0)}\{1+O((z-z_0)^2)\}.$$

即 z_0 既不是 $g(z)$ 的零点,也不是 $g(z)$ 的极点,而是 $g'(z)$ 的零点. 从而

$$N_{1)}(r,f)\leqslant N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{\varphi}\right). \tag{2.6}$$

这里 $N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)$ 表 $g'(z)$ 的零点但非 $g(z)$ 的零点的密指量.

另一方面,由 Jensen 公式有

$$\begin{aligned} m\left(r,\frac{g'}{g}\right)-m\left(r,\frac{g}{g'}\right)-\log\left|\frac{g'(0)}{g(0)}\right| &= N\left(r,\frac{g}{g'}\right)-N\left(r,\frac{g'}{g}\right)\\ &= N(r,g)-N(r,g')+N\left(r,\frac{1}{g'}\right)-N\left(r,\frac{1}{g}\right)\\ &= -\bar{N}(r,g)+N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)-\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} N_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)\leqslant \bar{N}(r,g)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)\\ +m\left(r,\frac{g'}{g}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|. \end{aligned} \tag{2.7}$$

从 $g(z)$ 的表达式 (2.4) 可以看出, $g(z)$ 的零点和极点仅能出现在 $f'(z)-\varphi(z)$ 的零点, $f''(z)\varphi(z)-f'(z)\varphi'(z)$ 的零点, $f(z)$ 的重极点与 $\varphi(z)$ 的零点,所以

$$\begin{aligned} \bar{N}(r,g)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)\leqslant \bar{N}_{(2}(r,f)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f'-\varphi}\right)\\ +\bar{N}\left(r,\frac{1}{f''\varphi-f'\varphi'}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{\varphi}\right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

比较 (2.6),(2.7) 与 (2.8) 式,引理 2 即得证.

引理 3 命 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 如引理 1 所设. 关于 f 与 φ 的原始值,我们还假设 $H\neq 0$,其中

$$\begin{aligned} H = {} & 2\varphi(0)^2f'''(0)(f'(0)-\varphi(0))-2\varphi(0)\varphi''(0)f'(0)(f'(0)-\varphi(0))\\ & +3\varphi'(0)^2f'(0)^2-3\varphi(0)^2f''(0)^2+6\varphi(0)^2\varphi'(0)f''(0)\\ & -6\varphi(0)\varphi'(0)^2f'(0), \end{aligned} \tag{2.9}$$

则当 $0<r<R$ 时,有

$$T(r,f)<3N\left(r,\frac{1}{f}\right)+4N\left(r,\frac{1}{f'-\varphi}\right)+S_1(r,f), \tag{2.10}$$

其中

$$\begin{aligned} S_1(r,f) = {} & 3m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+3m\left(r,\frac{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}{f}\right)+3m\left(r,\frac{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}{\frac{f'}{\varphi}-1}\right)\\ & +m\left(r,\frac{(f''\varphi-f'\varphi')'}{f''\varphi-f'\varphi'}\right)+m\left(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)+m\left(r,\frac{f''-\varphi'}{f'-\varphi}\right) \end{aligned}$$

$$+3T\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+4N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+3\log|f(0)|+4\log|f'(0)-\varphi(0)|$$

$$+4\log|\varphi(0)|+2\log\frac{1}{|f''(0)\varphi(0)-f'(0)\varphi'(0)|}+\log\frac{1}{|H|}$$

$$+4\log 2+3\log 3. \tag{2.11}$$

证．比较

$$\bar{N}_{(2}(r,f)+\bar{N}(r,f)\leqslant N(r,f)\leqslant T(r,f)$$

与引理 1，有

$$\bar{N}_{(2}(r,f)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f'-\varphi}\right)$$

$$-N\left(r,\frac{1}{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}\right)+S(r,f), \tag{2.12}$$

其中 $S(r,f)$ 由 (2.2) 式给出．

由引理 2 与 (2.12) 式，得

$$\bar{N}(r,f)=N_{1)}(r,f)+\bar{N}_{(2}(r,f)$$

$$\leqslant 2N\left(r,\frac{1}{f}\right)+3N\left(r,\frac{1}{f'-\varphi}\right)-N\left(r,\frac{1}{\left(\frac{f'}{\varphi}\right)'}\right)$$

$$+2N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+2\bar{N}\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+m\left(r,\frac{g'}{g}\right)$$

$$+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|+2S(r,f).$$

将上述不等式代入 (2.1) 式，并注意

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{2(f''\varphi-f'\varphi')'}{f''\varphi-f'\varphi'}-\frac{3\varphi'}{\varphi}-\frac{3(f'-\varphi)'}{f'-\varphi},$$

$$m\left(r,\frac{g'}{g}\right)\leqslant m\left(r,\frac{(f''\varphi-f'\varphi')'}{f''\varphi-f'\varphi'}\right)+m\left(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{(f'-\varphi)'}{f'-\varphi}\right)+3\log 3+\log 2$$

与

$$\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|=\log\left|\frac{\varphi(0)(f'(0)-\varphi(0))(f''(0)\varphi(0)-f'(0)\varphi'(0))}{H}\right|,$$

引理 3 即得证．

类似于文献 [5] 中的步骤，用 Nevanlinna 基本引理及其推广来界囿 $S_1(r,f)$ 中的前六项，用 Bureau 引理消去出现的项 $\log^+T(\rho,f)$，可得

引理 4. 设 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 适合引理 3 的条件，且 $R<\infty$．若在 $|z|<R$ 内有 $f(z)\neq 0$，$f'(z)\neq\varphi(z)$，则对于 $0<r<R$ 有

$$\log M\left(r,\frac{1}{f}\right)<C\frac{R}{R-r}\left\{1+B+\log^+R+\log^+\frac{1}{R}\right.$$

$$+T\left(R,\frac{1}{\varphi}\right)+\log\frac{R}{R-r}\Bigg\},$$

其中C为数字常数,而

$$B=\log^+|\varphi(0)|+\log^+\frac{1}{|\varphi(0)|}+\log^+|f(0)|$$

$$+\log^+|f'(0)|+\log^+\frac{1}{|f''(0)\varphi(0)-f'(0)\varphi'(0)|}+\log^+\frac{1}{|H|}.$$

这里H由 (2.9) 式确定.

三、界囿定理

定理 2. 设在 $|z|\leqslant R(R\leqslant 1)$ 上,$f(z)$ 亚纯,$\varphi(z)$ 全纯且无零点,且 $f(z)\neq 0, f'(z)\neq\varphi(z)$. 又设 $0<m\leqslant 1$, $1\leqslant M<+\infty$, 使得在 $|z|\leqslant R$ 上有

$$m\leqslant|\varphi(z)|\leqslant M,\quad |\varphi'(z)|\leqslant M,\quad |\varphi''(z)|\leqslant M.$$

若记

$$R_1=\frac{m^3}{160M^3}R,\tag{3.1}$$

则在 $|z|<R_1$ 内,或者恒有 $|f(z)|<1$,或者恒有 $|f(z)|>C(R,m,M)$,其中 $C(R,m,M)$ 表示仅依赖于 R,m,M 的常数.

证. 在 $|z|<R_1$ 内,倘若 $|f(z)|<1$ 或 $|f(z)|>1$ 一致成立,则定理 2 的结论已经成立. 因而可设存在点 z_1 使

$$|f(z_1)|=1,\quad |z_1|<R_1.\tag{3.2}$$

区分两种情况进行论证.

(A) 在 $|z|<4R_1$ 内恒有 $\sum_{j=0}^{2}|f^{(j)}(z)|\geqslant\frac{m}{8M}$.

于是在 $|z|<4R_1$ 内有

$$\frac{1}{|f|}\leqslant\frac{8M}{m}\sum_{j=0}^{2}\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|.$$

从而

$$m\left(r,z_1,\frac{1}{f}\right)\leqslant\sum_{j=0}^{2}m\left(r,z_1,\frac{f^{(j)}}{f}\right)+\log\frac{24M}{m},\quad (0<r<3R_1).$$

结合 $N\left(r,z_1,\frac{1}{f}\right)=0$,并应用 Nevanlinna 引理及其推广遂有

$$T\left(r,z_1,\frac{1}{f}\right)<C\left\{1+\log^+\frac{1}{R_1}+\log^+\frac{1}{\rho-r}\right.$$
$$\left.+\log^+T(\rho,z_1,f)\right\}\qquad(R_1<r<\rho<3R_1).$$

这里及以后,C恒表示数字常数,至多依赖于 m,M 与 R,此但是每次出现时不必具有相同数值. 再应用 Bureau 引理可得

$$T\left(r,z_1,\frac{1}{f}\right)<C\left\{1+\log^+\frac{1}{R_1}+\log\frac{3R_1}{3R_1-r}\right\}\quad(R_1<r<3R_1).$$

于是

$$\log M\left(R_1, \frac{1}{f}\right) \leqslant \log M\left(2R_1, z_1, \frac{1}{f}\right)$$
$$\leqslant 9T\left(\frac{5}{2}R_1, z_1, \frac{1}{f}\right) < C(R,m,M).$$

(B) 存在点 z_2 有

$$\sum_{j=0}^{2} |f^{(j)}(z_2)| < \frac{m}{8M}, \qquad |z_2| < 4R_1. \tag{3.3}$$

我们断言，在这种情况，线段 $\overline{z_2z_1}$ 上必存在点 z_0 适合下述条件

$$\begin{aligned} &|f'''(z_0)| \geqslant \frac{8M}{m^3}, \qquad \frac{1}{2} \leqslant |f''(z_0)| \leqslant 1, \\ &|f'(z_0)| \leqslant \frac{m}{4M}, \qquad |f(z_0)| \leqslant \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

首先，我们证明在 $\overline{z_2z_1}$ 上不可能恒有 $|f''(z)| < \frac{3}{4}$. 否则对于 $\overline{z_2z_1}$ 上的任意点 z 有

$$|f'(z)| \leqslant |f'(z_2)| + \left|\int_{\overline{z_2z}} f''(\zeta)d\zeta\right|$$
$$< \frac{m}{8M} + \frac{3}{4}\cdot\frac{m^3}{32M^3} < \frac{5}{32}\cdot\frac{m}{M},$$
$$|f(z)| \leqslant |f(z_2)| + \left|\int_{\overline{z_2z}} f'(\zeta)d\zeta\right|$$
$$< \frac{m}{8M} + \left(\frac{5}{32}\cdot\frac{m}{M}\right)\frac{m^3}{32M^3} < \frac{5}{32}\cdot\frac{m}{M}.$$

这与 $|f(z_1)| = 1$ 相矛盾.

于是存在点 $z_3 \in \overline{z_2z_1}$, 使 $|f''(z_3)| = \frac{3}{4}$, 且在 $\overline{z_2z_3}$ 内恒有 $|f''(z)| < \frac{3}{4}$. 显然

$$|f'(z_3)| < \frac{5}{32}\cdot\frac{m}{M}, \quad |f(z_3)| < \frac{5}{32}\cdot\frac{m}{M}.$$

若 $|f'''(z_3)| \geqslant \frac{8M^3}{m^3}$, 则点 z_3 即合 (3.4) 式关于点 z_0 的要求.

若 $|f'''(z_3)| < \frac{8M^3}{m^3}$, 则在 $\overline{z_3z_1}$ 上不可能恒有 $|f'''(z)| < \frac{8M^3}{m^3}$. 否则对于 $\overline{z_3z_1}$ 上的任意点 z 有

$$|f''(z)| \leqslant |f''(z_3)| + \left|\int_{\overline{z_3z}} f'''(\zeta)d\zeta\right|$$
$$< \frac{3}{4} + \frac{8M^3}{m^3}\cdot\frac{m^3}{32M^3} = 1,$$

$$|f'(z)| \leqslant |f'(z_3)| + \left|\int_{\overline{z_3z}} f''(\zeta)d\zeta\right|$$

$$< \frac{5}{32} \cdot \frac{m}{M} + \frac{m^3}{32M^3} < \frac{3}{16} \cdot \frac{m}{M}.$$

从而

$$|f(z_1)| \leqslant |f(z_3)| + \left|\int_{\overline{z_3 z_1}} f'(\zeta)d\zeta\right| < \frac{5}{32} \cdot \frac{m}{M} + \frac{3}{16}\frac{m}{M} \cdot \frac{m^3}{32M^3} < \frac{3}{16}.$$

这与 $|f(z_1)| = 1$ 矛盾.

于是存在点 $z_4 \in \overline{z_3 z_1}$, 使 $|f'''(z_4)| = \frac{8M^3}{m^3}$,且在 $\overline{z_3 z_4}$ 内有 $|f'''(z)| < \frac{8M^3}{m^3}$. 如上有

$$|f''(z_4)| < 1, \quad |f'(z_4)| < \frac{m}{4M}, \ |f(z_4)| < \frac{1}{4}$$

以及

$$\begin{aligned} |f''(z_4)| &\geqslant |f''(z_3)| - \left|\int_{\overline{z_3 z_4}} f'''(\zeta)d\zeta\right| \\ &\geqslant \frac{3}{4} - \frac{8M^3}{m^3} \cdot \frac{m^3}{32M^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

取 z_4 为点 z_0, 则 (3.4) 式即可满足.

在 $|z - z_0| < \frac{3}{4}R$ 内应用引理 4 ,注意到

$$|\varphi(z_0)| \leqslant M, \qquad \frac{1}{|\varphi(z_0)|} \leqslant \frac{1}{m},$$

$$|f(z_0)| \leqslant 1, \ |f'(z_0)| \leqslant \frac{m}{4M},$$

$$|f''(z_0)\varphi(z_0) - f'(z_0)\varphi'(z_0)| \geqslant \frac{1}{2}m - \frac{m}{4M} \cdot M = \frac{m}{4}.$$

再由 (2.9) 式,有

$$\begin{aligned} |H| \geqslant\ & 2|\varphi(z)|^2|f'''(z)|(|\varphi(z)| - |f'(z)|) \\ & - 2|\varphi(z)||\varphi''(z)||f'(z)|(|f'(z)| + |\varphi(z)|) \\ & - 3|\varphi'(z)|^2|f'(z)|^2 - 3|\varphi(z)|^2|f''(z)|^2 \\ & - 6|\varphi(z)|^2|\varphi'(z)||f''(z)| \\ & - 6|\varphi(z)||\varphi'(z)|^2|f'(z)| \\ \geqslant\ & 2m^2 \cdot \frac{8M^3}{m^3}\left(m - \frac{m}{4M}\right) - 2M^2 \cdot \frac{m}{4M}\left(\frac{m}{4M} + M\right) \\ & - 3M^2\left(\frac{m}{4M}\right)^2 - 3M^2 - 6M^3 - 6M^3 \cdot \frac{m}{4M} \\ \geqslant\ & 12M^3 - \frac{10}{16}M^2 m - \frac{3}{16}m^2 - 3M^2 - 6M^3 - \frac{3}{2}mM^2 > \frac{M^3}{2}, \end{aligned}$$

遂得

$$\log M\left(\frac{R}{2}, z_0, \frac{1}{f}\right) < C(R, m, M).$$

从而

$$\log M\left(R_1, \frac{1}{f}\right) \leqslant \log M\left(\frac{R}{2}, z_0, \frac{1}{f}\right) < C(R, m, M).$$

四、$k=1$ 时定理 1 的证明

置 $f(z)-\varphi(z)=g(z)$，则函数族 $\mathscr{F}$ 转化为族 G，其中每个函数 $g(z)$ 在 D 内亚纯，且 $g(z)\neq 0$，$g'(z)\neq\psi(z)-\varphi'(z)$.

对域 D 中的点 z_0，若 $\psi(z_0)-\varphi'(z_0)\neq 0$，则存在 δ，$0<\delta<1$，使 $|z-z_0|\leqslant\delta$ 含于 D 内，且在此圆上 $\psi(z)-\varphi'(z)$ 没有零点. 记

$$M=\max_{|z-z_0|\leqslant\delta}\{|\psi(z)-\varphi'(z)|,|\psi'(z)-\varphi''(z)|,|\psi''(z)-\varphi'''(z)|,1\},$$

$$m=\min_{|z-z_0|\leqslant\delta}\{|\psi(z)-\varphi'(z)|,1\}.$$

在 $|z-z_0|\leqslant\delta$ 上对 $g(z)$ 与 $\psi(z)-\varphi'(z)$ 应用定理 2 可知，z_0 是 G 的正规点.

对于 D 中的点 z_0，若 $\psi(z_0)-\psi'(z_0)=0$，则存在 δ，$0<\delta<1$，使 $|z-z_0|\leqslant\delta$ 含于 D 内，且在此圆上 $\psi(z)-\varphi'(z)$ 除去 z_0 外没有其他零点. 由以上的讨论可知，族 G 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内正规. 设 G 中任意一列函数为 $\{g_n(z)\}$，则它含有一个子序列 $\{g_{n_j}(z)\}$，在域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内闭一致收敛到一个极限函数 $g_0(z)$.

倘 $g_0(z)\not\equiv 0$，则 $g_0(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内没有零点. 从而

$$\min_{0\leqslant\theta<2\pi}\left|g_0\left(z_0+\frac{\delta}{2}e^{i\theta}\right)\right|>m.$$

因此存在正整数 N_0，使当 $n_j>N_0$ 时有

$$\min_{0\leqslant\theta<2\pi}\left|g_{n_j}\left(z_0+\frac{\delta}{2}e^{i\theta}\right)\right|>\frac{m}{2}.$$

注意在 D 内 $g_{n_j}(z)\neq 0$，于是

$$\min_{|z-z_0|\leqslant\frac{\delta}{2}}|g_{n_j}(z)|>\frac{m}{2}.$$

从而这时 G 在点 z_0 正规.

若 $g_0(z)\equiv 0$，则 $g_{n_j}(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内闭一致收敛于 0. 于是

$$\frac{g'_{n_j}(z)}{\psi(z)-\varphi'(z)}\quad 与 \quad\left(\frac{g'_{n_j}(z)}{\psi(z)-\varphi'(z)}\right)'$$

也内闭一致收敛于 0. 因而当 n_j 适当大时

$$\left|n\left(\frac{\delta}{2},z_0,\frac{g'_{n_j}}{\psi-\varphi'}-1\right)-n\left(\frac{\delta}{2},z_0,\frac{1}{\dfrac{g'_{n_j}}{\psi-\varphi'}-1}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\frac{\delta}{2}}\frac{\left(\dfrac{g'_{n_j}}{\psi-\varphi'}\right)'}{\dfrac{g'_{n_j}}{\psi-\varphi'}-1}dz\right|<1.$$

由此可知，对于适当大的 n_j 有

$$n\left(\frac{\delta}{2},z_0,g_{n_j}\right)\leqslant n\left(\frac{\delta}{2},z_0,\frac{g'_{n_j}}{\psi-\varphi'}-1\right)$$

$$= n\left(\frac{\delta}{2}, z_0, \frac{1}{\dfrac{g'_{n_j}}{\psi-\varphi'}-1}\right)=0.$$

即 $g_{n_j}(z)$ 在 $|z-z_0|<\dfrac{\delta}{2}$ 内全纯．从而在此小圆内，$g_{n_j}(z)$ 内闭一致收敛于 0，z_0 也是 G 的正规点．

所以，无论何种情况，域 D 内的任意点总是 G 的正规点．从而也是 $\mathscr{F}$ 的正规点．

五、$k\geqslant 2$ 的情况

类似于以上 $k=1$ 时的推理，我们可以证明 $k\geqslant 2$ 时定理 1 成立．这里仅叙述与引理 1—4 以及定理 2 相应的结果．

引理 1′. 设在 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内，$f(z)$ 亚纯，$\varphi(z)$ 全纯． 若 $f(0)\neq 0,\infty$；$\varphi(0)\neq 0$；$f^{(k)}(0)\neq\varphi(0)$ 及 $f^{(k+1)}(0)\varphi(0)-f^{(k)}(0)\varphi'(0)\neq 0$，则当 $0<r<R$ 时有

$$T(r,f)<\bar{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi}\right)$$
$$-N\left(r,\frac{1}{\left(\dfrac{f^{(k)}}{\varphi}\right)'}\right)+S(r,f),$$

其中

$$S(r,f)=m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{\left(\dfrac{f^{(k)}}{\varphi}\right)'}{f}\right)+m\left(r,\frac{\left(\dfrac{f^{(k)}}{\varphi}\right)'}{\dfrac{f^{(k)}}{\varphi}-1}\right)$$
$$+T\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+\log\left|\frac{f(0)\varphi(0)(f^{(k)}(0)-\varphi(0))}{f^{(k+1)}(0)\varphi(0)-f^{(k)}(0)\varphi'(0)}\right|+\log 2.$$

理引 2′. 命 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 如引理 1′ 所设，而

$$g(z)=\frac{\{f^{(k+1)}(z)\varphi(z)-f^{(k)}(z)\varphi'(z)\}^{k+1}}{\varphi(z)^{k+2}\{f^{(k)}(z)-\varphi(z)\}^{k+2}}.$$

若 $g(0)\neq 0,\infty$；$g'(0)\neq 0$，则

$$N_{1)}(r,f)\leqslant\bar{N}_{(2}(r,f)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k-1)}\varphi-f^{(k)}\varphi'}\right)$$
$$+2\bar{N}\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+m\left(r,\frac{g'}{g}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|.$$

引理 3′. 命 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 如引理 1′ 所设．关于 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 的原始值，我们还假设 $H\neq 0$，其中

$$H=(k+1)\varphi(0)^2f^{(k+2)}(0)(f^{(k)}(0)-\varphi(0))-(k+1)\varphi(0)\varphi''(0)f^{(k)}(0)(f^{(k)}(0)$$
$$-\varphi(0))+(k+2)\varphi'(0)^2f^{(k)}(0)^2-(k+2)\varphi(0)^2f^{(k+1)}(0)^2$$
$$+2(k+2)\varphi(0)^2\varphi'(0)f^{(k+1)}(0)-2(k+2)\varphi(0)\varphi'(0)^2f^{(k)}(0),\qquad(5.1)$$

则当 $0<r<R$ 时有

$$T(r,f)<3N\left(r,\frac{1}{f}\right)+4N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi}\right)+S_1(r,f),$$

其中

$$S_1(r,f)=3m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+3m\left(r,\frac{\left(\frac{f^{(k)}}{\varphi}\right)'}{f}\right)+3m\left(r,\frac{\left(\frac{f^{(k)}}{\varphi}\right)'}{\frac{f^{(k)}}{\varphi}-1}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{(f^{(k+1)}\varphi-f^{(k)}\varphi')'}{f^{(k+1)}\varphi-f^{(k)}\varphi'}\right)+m\left(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}-\varphi'}{f^{(k)}-\varphi}\right)$$

$$+3T\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+4N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+3\log|f(0)|$$

$$+4\log|f^{(k)}(0)-\varphi(0)|+4\log|\varphi(0)|+2\log\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)\varphi(0)-f^{(k)}(0)\varphi'(0)|}$$

$$+\log\frac{1}{|H|}+2\log(k+2)+\log(k+1)+\log 3+3\log 2.$$

引理 4′　设 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 适合引理 3′ 的条件，且 $R<+\infty$．若在 $|z|<R$ 内有 $f(z)\neq 0$，$f^{(k)}(z)\neq\varphi(z)$，则对于 $0<r<R$ 有

$$\log M\left(r,\frac{1}{f}\right)<C\frac{R}{R-r}\left\{1+B+\log^+R+\log^+\frac{1}{R}\right.$$

$$\left.+T\left(R,\frac{1}{\varphi}\right)+\log\frac{R}{R-r}\right\},$$

其中

$$B=\log^+|\varphi(0)|+\log^+\frac{1}{|\varphi(0)|}+\log^+|f(0)|$$

$$+\log^+|f^{(k)}(0)|+\log^+\frac{1}{|H|}+\log^+\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)\varphi(0)-f^{(k)}(0)\varphi'(0)|}.$$

定理 2′．设在 $|z|\leqslant R(R\leqslant 1)$ 上，$f(z)$ 亚纯，$\varphi(z)$ 全纯且无零点，且 $f(z)\neq 0$，$f^{(k)}(z)\neq\varphi(z)$．又设 $0<m\leqslant 1$，$1\leqslant M<+\infty$，使得在 $|z|\leqslant R$ 上有

$$m\leqslant|\varphi(z)|\leqslant M,\quad |\varphi'(z)|\leqslant M,\quad |\varphi''(z)|\leqslant M.$$

若记

$$R_1=\frac{3(k+1)}{320(k+2)}\cdot\frac{m^3}{M^3},$$

则在 $|z|<R_1$ 内，或者恒有 $|f(z)|<1$，或者恒有 $|f(z)|>C(R,m,M)$．

在定理 2′ 的证明中，相应于 (3.4) 式为

$$|f^{(k+2)}(z_0)|\geqslant\frac{16(k+2)M^3}{3(k+1)m^3},\qquad \frac{1}{2}<|f^{(k+1)}(z_0)|<1,$$

$$|f^{(k)}(z_0)|<\frac{m}{4M},\qquad |f(z_0)|<1. \tag{5.2}$$

参考文献

[1] Yang Lo, *Indiana Univ. Math. J.* (to appear).
[2] Drasin, D., *Acta Math.*, **122**(1969), 231—263.
[3] 顾永兴，中国科学 1979 年数学专辑 (I), 267—274.
[4] Hayman, W. K., *Meromorphic Functions*, Oxford, 1964.
[5] Yang Lo, *J. London Math. Soc.*, 25(1982), 2: 288—296.