混合 Boussinesq 方程的有限亏格解

何国亮, 吴丽华*, 耿献国

郑州大学数学系, 郑州 450001

E-mail: glhemath@163.com, wulihuaxyz123@163.com, xggeng@zzu.edu.cn

收稿日期: 2011-11-04; 接受日期: 2012-02-12; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11171312) 资助项目

摘要 借助于 Lenard 递推方程和定态零曲率方程, 我们给出与 3×3 矩阵谱问题相联系的一族混合 Boussinesq 方程. 利用 Lax 矩阵的特征多项式, 引入一条三角曲线 $\mathcal{K}_{m-1}$, 由此构造出相应的 Baker-Akhiezer 函数、亚纯函数和 Dubrovin-型方程. 混合 Boussinesq 流在 Abel 映射下被拉直. 基于三角曲线和三类 Abel 微分的理论, 我们得到了 Baker-Akhiezer 函数、亚纯函数的 Riemann θ 函数表示, 特别地, 给出了混合 Boussinesq 方程的有限亏格解.

关键词 混合 Boussinesq 方程族 三角曲线 有限亏格解

MSC (2010) 主题分类 35Q51, 35C99, 37K10

1 引言

Boussinesq 方程

$$u_{tt} + au_{xx} + b(u^2)_{xx} + cu_{xxxx} = 0, \quad (1.1)$$

其中 a, b 和 c 为常数, 最初由 Boussinesq^[1] 在 1871 年引入, 用来描述长水波在浅水中的传播. 关于 Boussinesq 方程的各种解的研究已有不少, 例如, Airault, McKean, Moser 等人^[2, 3] 研究了 Boussinesq 方程的有理解. McKean^[4] 讨论了 Boussinesq 方程的周期解. 在 [5, 6] 中探讨了与 Boussinesq 方程的初值问题相关的三阶微分算子的反散射变换. 作为 Kadomtsev-Petviashvili 方程的特解或者利用 Riemann θ 函数的约化理论, 人们得到了 Boussinesq 方程的代数几何解^[7-15]. Dickson, Gesztesy 和 Unterkofler^[16] 在 1999 年由代数几何方法得到了 Boussinesq 方程族的代数几何拟周期解. 在文献 [17] 中, 作者研究了变形 Boussinesq 方程族的拟周期解.

众所周知, 寻找孤子方程的有限亏格解具有重要的意义, 它不仅可以揭示解的内在结构, 描述非线性现象的拟周期行为, 还可以约化出多孤子解、椭圆函数解等有特殊性质的解. 对于研究与 2×2 矩阵谱问题相联系的孤子方程的有限亏格解^[18-29] 及其他性质^[30-33] 已有一些系统的方法, 也得到了令人满意的结果, 其中包括一些经典方程的有限亏格解, 例如, KdV 方程, 非线性 Schrödinger 方程, mKdV 方程, sine-Gordon 方程, Toda 晶格方程等. 然而, 当我们试着把这些方法推广到与 3×3 矩阵谱问题相联系的孤子方程时却遇到了巨大的困难. 究其原因在于 2×2 的情形涉及到的都是超椭圆曲线, 而在 3×3 情形遇到的通常都是非超椭圆的三角曲线^[34-36]. 到目前为止, 关于三角曲线的理论还很不完善, 这更增加了与 3×3 矩阵谱问题相联系的孤子方程求解时的困难.

最近, 一类称为混合孤子方程或者非完整形变孤子方程的可积系统引起了人们的广泛关注, 例如, 混合 KdV (KdV6) 方程, 混合 AKNS 方程, 混合 mKdV 方程和混合 Toda 方程等^[37-43]. 对于任意一个具有 Hamilton 算子 K 和 J 的孤子方程

$$u_t = J \frac{\delta H_n}{\delta u}, \quad (1.2)$$

Kupershmidt 提出了如下的非完整形变:

$$\begin{cases} u_t = J \frac{\delta H_n}{\delta u} - Jw, \\ Kw = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

该形变称为 Kupershmidt 形变, 它具有保持 bi-Hamilton 结构的特性^[43]. 在 [39] 中, Zhou 证明了 Kupershmidt 形变系统恰好是混合孤子方程族中的一些特殊方程. 本文中, 我们借助于 Kupershmidt 形变给出了 Boussinesq 方程的 Kupershmidt 形变系统, 即混合 Boussinesq 方程, 并构造了该混合 Boussinesq 方程的有限亏格解.

本文结构安排如下: 第 2 节, 借助 Lenard 递推方程和定态零曲率方程, 通过在辅助谱问题中增加一个负幂项构造混合 Boussinesq 方程族. 在第 3 节中, 我们首先构造 Baker-Akhiezer 函数、亚纯函数、以及混合 Boussinesq 族的 Lax 矩阵, 进而由此 Lax 矩阵导出一条算术亏格为 $m-1$ 的 m 次三角曲线, 其紧化产生一个三叶 Riemann 面. 然后, 混合 Boussinesq 方程被分解成可解的常微分方程组. 第 4 节研究三叶 Riemann 面上的三类 Abel 微分、Baker-Akhiezer 函数和亚纯函数的性质, 由此导出 Baker-Akhiezer 函数和亚纯函数的 Riemann θ 函数表示. 最后, 在 Abel 映射下拉直混合 Boussinesq 流, 并基于三角曲线和三类 Abel 微分的理论, 得到了混合 Boussinesq 方程的有限亏格解.

2 混合 Boussinesq 方程族

本节将导出与如下 3×3 矩阵谱问题相联系的混合 Boussinesq 方程族,

$$\psi_x = U\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ v_x & 0 & u_x + \lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

其中 u 和 v 是两个位势, λ 是一个常值谱参数. 为此, 首先引入两组 Lenard 递推方程

$$Kg_{j-1} = Jg_j, \quad g_j|_{(u,v)=0} = 0, \quad j \geq 0, \quad (2.2)$$

和

$$K\hat{g}_{j-1} = J\hat{g}_j, \quad \hat{g}_j|_{(u,v)=0} = 0, \quad j \geq 0, \quad (2.3)$$

其中 K 和 J 算子分别定义为 (此处的初始条件意味着取积分常数为零)

$$K = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\partial^5 + \frac{2}{3}(\partial^3 v_x + v_x \partial^3) + u_x \partial^2 - \partial^2 u_x - \frac{2}{3}v_x \partial v_x & \partial^4 - \partial u_x - 2u_x \partial - v_x \partial^2 \\ -\partial^4 - u_x \partial - 2\partial u_x + \partial^2 v_x & 2\partial^3 - v_x \partial - \partial v_x \end{pmatrix},$$

$$J = 3 \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix},$$

并选取初值为

$$g_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{g}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

易见 $\ker J = \{\alpha_0 g_{-1} + \beta_0 \hat{g}_{-1} \mid \forall \alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}\}$. 因此 g_j 和 $\hat{g}_j$ 可以由 (2.2) 和 (2.3) 唯一确定, 且前两个为

$$g_0 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -6u_x + 3v_{xx} \\ 2v_{xxx} - 3u_{xx} - v_x^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{g}_0 = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} v_x \\ u_x \end{pmatrix}.$$

为了导出与 3×3 矩阵谱问题 (2.1) 相联系的演化方程族, 我们求解定态零曲率方程

$$V_x - [U, V] = 0, \quad V = (V_{ij})_{3 \times 3}, \quad (2.5)$$

该方程等价于

$$\begin{aligned} V_{11,x} + v_x V_{12} + V_{13} - V_{21} &= 0, \\ V_{12,x} + V_{11} - V_{22} &= 0, \\ V_{13,x} - V_{23} + (u_x + \lambda) V_{12} &= 0, \\ V_{21,x} + v_x (V_{22} - V_{11}) + V_{23} - (u_x + \lambda) V_{31} &= 0, \\ V_{22,x} + V_{21} - v_x V_{12} - (u_x + \lambda) V_{32} &= 0, \\ V_{23,x} - v_x V_{13} + (u_x + \lambda) (V_{22} - V_{33}) &= 0, \\ V_{31,x} + v_x V_{32} + V_{33} - V_{11} &= 0, \\ V_{32,x} + V_{31} - V_{12} &= 0, \\ V_{33,x} - V_{13} + (u_x + \lambda) V_{32} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中每个元素 $V_{ij} = V_{ij}(b, c)$ 都是关于 λ 的 Laurent 展式:

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{1}{3}(\partial^2 - v_x)b, \quad V_{12} = -c, \quad V_{13} = \partial^2 c + \left(-\frac{2}{3}\partial^3 + \frac{2}{3}\partial v_x - u_x - \lambda\right)b, \\ V_{21} &= (\partial^2 - v_x)c + \left(-\frac{1}{3}\partial^3 + \frac{1}{3}\partial v_x - u_x - \lambda\right)b, \quad V_{22} = -\partial c + \frac{1}{3}(\partial^2 - v_x)b, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} V_{23} &= (\partial^3 - u_x - \lambda)c + \left(-\frac{2}{3}\partial^4 + \frac{2}{3}\partial^2 v_x - \partial u_x - \lambda\partial\right)b, \\ V_{31} &= \partial b - c, \quad V_{32} = -b, \quad V_{33} = \partial c + \frac{2}{3}(v_x - \partial^2)b, \\ b &= \sum_{j \geq 0} b_{j-1} \lambda^{-j}, \quad c = \sum_{j \geq 0} c_{j-1} \lambda^{-j}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

从 (2.6) 和 (2.7) 直接计算可得 Lenard 方程

$$KG = \lambda JG, \quad G = (b, c)^T. \quad (2.9)$$

将 (2.8) 代入 (2.9), 比较 λ 的同次幂系数便得到下面的递推方程,

$$KG_{j-1} = JG_j, \quad JG_{-1} = 0, \quad (2.10)$$

其中 $G_j = (b_j, c_j)^T$. 由于 $JG_{-1} = 0$ 的通解为

$$G_{-1} = \alpha_0 g_{-1} + \beta_0 \hat{g}_{-1}, \quad (2.11)$$

从而 G_j 可以表示为

$$G_j = \alpha_0 g_j + \beta_0 \hat{g}_j + \cdots + \alpha_j g_0 + \beta_j \hat{g}_0 + \alpha_{j+1} g_{-1} + \beta_{j+1} \hat{g}_{-1}, \quad j \geq -1, \quad (2.12)$$

这里的 α_j 和 β_j 为任意常数.

假设 ψ 满足谱问题 (2.1) 及如下辅助谱问题,

$$\psi_{t_r} = \tilde{V}^{(r)} \psi, \quad \tilde{V}^{(r)} = (\tilde{V}_{ij}^{(r)})_{3 \times 3}, \quad (2.13)$$

其中 $\tilde{V}_{ij}^{(r)} = \tilde{V}_{ij}(\tilde{b}^{(r)}, \tilde{c}^{(r)})$,

$$\tilde{b}^{(r)} = \left(\tilde{b}_r - \frac{1}{3} v_{t_r} \right) \lambda^{-1} + \sum_{j=0}^r \tilde{b}_{j-1} \lambda^{r-j}, \quad \tilde{c}^{(r)} = \left(\tilde{c}_r - \frac{1}{3} u_{t_r} \right) \lambda^{-1} + \sum_{j=0}^r \tilde{c}_{j-1} \lambda^{r-j}, \quad (2.14)$$

而 $\tilde{G}_l = (\tilde{b}_l, \tilde{c}_l)^T$ 由下式决定, $\tilde{G}_l = \tilde{\alpha}_0 g_l + \tilde{\beta}_0 \hat{g}_l + \cdots + \tilde{\alpha}_l g_0 + \tilde{\beta}_l \hat{g}_0 + \tilde{\alpha}_{l+1} g_{-1} + \tilde{\beta}_{l+1} \hat{g}_{-1}$, $l \geq -1$, 此处 $\{\tilde{\alpha}_l, \tilde{\beta}_l\}$ 是与 $\{\alpha_j, \beta_j\}$ 的选取无关的常数. 那么 (2.1) 和 (2.13) 的相容性条件便给出了零曲率方程 $U_{t_r} - \tilde{V}_x^{(r)} + [U, \tilde{V}^{(r)}] = 0$, 经计算可知它恰好等价于下面的混合非线性演化方程族,

$$K(\tilde{G}_r - \sigma W_{t_r}) = 0, \quad r \geq -1, \quad (2.15)$$

其中 $W = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\sigma = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 当 $r = -1$ 时, 方程 (2.15) 即为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9} \{ 2v_{5x,t-1} - 2(v_x v_{t-1})_{xxx} - 2v_x v_{3x,t-1} + 2v_x (v_x v_{t-1})_x + 3u_{xxx} v_{t-1} \\ & \quad + 6u_{xx} v_{x,t-1} + 3u_{xx,t-1} v_x + 9u_x u_{x,t-1} + 3u_{xx} u_{t-1} - 3u_{4x,t-1} \} \\ & \quad + \tilde{\alpha}_0 \left(\frac{2}{3} v_{4x} - u_{xxx} - \frac{2}{3} v_x v_{xx} \right) - \tilde{\beta}_0 u_{xx} = 0, \\ & \frac{1}{3} \{ v_{4x,t-1} - (v_x v_{t-1})_{xx} + 3u_x v_{x,t-1} + 2u_{xx} v_{t-1} + 2u_{x,t-1} v_x + u_{t-1} v_{xx} \\ & \quad - 2u_{xxx,t-1} \} + \tilde{\alpha}_0 (-2u_{xx} + v_{xxx}) - \tilde{\beta}_0 v_{xx} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

如果令 $\tilde{\alpha}_0 = 0, \tilde{\beta}_0 = 0$, 则方程 (2.16) 约化为

$$\begin{aligned} & 2v_{5x,t-1} - 2(v_x v_{t-1})_{xxx} - 2v_x v_{3x,t-1} + 2v_x (v_x v_{t-1})_x + 3u_{xxx} v_{t-1} + 6u_{xx} v_{x,t-1} \\ & \quad + 3u_{xx,t-1} v_x + 9u_x u_{x,t-1} + 3u_{xx} u_{t-1} - 3u_{4x,t-1} = 0, \\ & v_{4x,t-1} - (v_x v_{t-1})_{xx} + 3u_x v_{x,t-1} + 2u_{xx} v_{t-1} + 2u_{x,t-1} v_x + u_{t-1} v_{xx} - 2u_{xxx,t-1} = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

3 Baker-Akhiezer 函数与 Dubrovin- 型方程

本节首先引入 Baker-Akhiezer 函数及混合 Boussinesq 方程族的 Lax 矩阵, 进而由 Lax 矩阵的特征多项式来定义一条算术亏格为 $m-1$ 的三角曲线 $\mathcal{K}_{m-1}$. 然后给出与 Baker-Akhiezer 函数有紧密联系的亚纯函数. 最后, 混合 Boussinesq 方程被分解成可解的常微分方程组.

首先, 引入满足如下条件的 Baker-Akhiezer 函数 $\psi(P, x, x_0, t_r, t_{0,r})$:

$$\begin{aligned}\psi_x(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}) &= U(u(x, t_r), v(x, t_r); \lambda(P))\psi(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}), \\ \psi_{t_r}(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}) &= \tilde{V}^{(r)}(u(x, t_r), v(x, t_r); \lambda(P))\psi(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}), \\ V^{(n)}(u(x, t_r), v(x, t_r); \lambda(P))\psi(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}) &= y(P)\psi(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}), \\ \psi_3(P, x_0, x_0, t_{0,r}, t_{0,r}) &= 1, \quad x, x_0, t_r, t_{0,r} \in \mathbb{C},\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 $V^{(n)} = (\lambda^n V)_+ = (V_{ij}^{(n)})_{3 \times 3}$, $V_{ij}^{(n)} = V_{ij}(b^{(n)}, c^{(n)})$, $b^{(n)} = \sum_{j=0}^n b_{j-1} \lambda^{n-j}$, $c^{(n)} = \sum_{j=0}^n c_{j-1} \lambda^{n-j}$, 这里 b_j 和 c_j 由 (2.12) 决定. 易见 (3.1) 中前三个方程的相容性条件分别为

$$U_{t_r} - \tilde{V}_x^{(r)} + [U, \tilde{V}^{(r)}] = 0, \tag{3.2}$$

$$-V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0, \tag{3.3}$$

$$-V_{t_r}^{(n)} + [\tilde{V}^{(r)}, V^{(n)}] = 0. \tag{3.4}$$

直接验证可知 $yI - V^{(n)}$ 同时满足 (3.3) 和 (3.4), 从而 Lax 矩阵 $V^{(n)}$ 的特征多项式 $\mathcal{F}_m(\lambda, y) = \det(yI - V^{(n)})$ 便是一个与变量 x 和 t_r 无关的常数, 并且可以展开成

$$\det(yI - V^{(n)}) = y^3 + yS_m(\lambda) - T_m(\lambda),$$

其中 $S_m(\lambda)$ 和 $T_m(\lambda)$ 均为 λ 的常系数多项式,

$$\begin{aligned}S_m(\lambda) &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \begin{vmatrix} V_{ii}^{(n)} & V_{ij}^{(n)} \\ V_{ji}^{(n)} & V_{jj}^{(n)} \end{vmatrix} = -3\alpha_0\beta_0\lambda^{2n+1} - 3(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\lambda^{2n} + \cdots, \\ T_m(\lambda) &= \begin{vmatrix} V_{11}^{(n)} & V_{12}^{(n)} & V_{13}^{(n)} \\ V_{21}^{(n)} & V_{22}^{(n)} & V_{23}^{(n)} \\ V_{31}^{(n)} & V_{32}^{(n)} & V_{33}^{(n)} \end{vmatrix} = -\alpha_0^3\lambda^{3n+2} - (3\alpha_0^2\alpha_1 + \beta_0^3)\lambda^{3n+1} + \cdots.\end{aligned}\tag{3.5}$$

那么从 $\mathcal{F}_m(\lambda, y) = 0$ 自然就得到了一条 m 次三角曲线

$$\mathcal{K}_{m-1}: \quad \mathcal{F}_m(\lambda, y) = y^3 + yS_m(\lambda) - T_m(\lambda) = 0, \tag{3.6}$$

当 $\alpha_0 = 1$ 时, $m = 3n + 2$; 而当 $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1$ 时, $m = 3n + 1$. 为方便起见, 我们仍然用 $\mathcal{K}_{m-1}$ 来表示三角曲线 $\mathcal{K}_{m-1}$ 的紧致化. 如果曲线非奇异或者光滑, 那么 $\mathcal{K}_{m-1}$ 便是一个算术亏格为 $m-1$ 的三叶 Riemann 曲面. 这里曲线非奇异的意思是说对每一个点 $(\lambda_0, y_0) \in \mathcal{K}_{m-1}$, 都有 $(\frac{\partial \mathcal{F}_m(\lambda, y)}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathcal{F}_m(\lambda, y)}{\partial y})|_{(\lambda, y)=(\lambda_0, y_0)} \neq (0, 0)$. 另外, $\mathcal{K}_{m-1}$ 上的点的局部坐标的选取类似于 [16, 17].

接下来, 我们定义 $\mathcal{K}_{m-1}$ 上与 $\psi(P, x, x_0, t_r, t_{0,r})$ 有紧密联系的亚纯函数 $\phi_3(P, x, t_r)$:

$$\phi_3(P, x, t_r) = \frac{\partial_x \psi_3(P, x, x_0, t_r, t_{0,r})}{\psi_3(P, x, x_0, t_r, t_{0,r})}, \quad P \in \mathcal{K}_{m-1}. \tag{3.7}$$

从 (3.1) 可知

$$\begin{aligned}
 \phi_3(P, x, t_r) &= \frac{\varepsilon(m)F_m(\lambda, x, t_r)}{y^2V_{12}^{(n)}(\lambda, x, t_r) - yC_m(\lambda, x, t_r) + D_m(\lambda, x, t_r)} \\
 &= \frac{y^2V_{32}^{(n)}(\lambda, x, t_r) - yA_m(\lambda, x, t_r) + B_m(\lambda, x, t_r)}{-\varepsilon(m)E_{m-1}(\lambda, x, t_r)} \\
 &= \frac{yV_{12}^{(n)}(\lambda, x, t_r) + C_m(\lambda, x, t_r)}{yV_{32}^{(n)}(\lambda, x, t_r) + A_m(\lambda, x, t_r)}, \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

其中 $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_{m-1}$, $(x, t_r) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned}
 A_m(\lambda, x, t_r) &= V_{12}^{(n)}V_{31}^{(n)} - V_{11}^{(n)}V_{32}^{(n)}, \\
 B_m(\lambda, x, t_r) &= V_{32}^{(n)}(V_{22}^{(n)}V_{33}^{(n)} - V_{23}^{(n)}V_{32}^{(n)}) + V_{31}^{(n)}(V_{12}^{(n)}V_{33}^{(n)} - V_{13}^{(n)}V_{32}^{(n)}), \\
 C_m(\lambda, x, t_r) &= V_{13}^{(n)}V_{32}^{(n)} - V_{12}^{(n)}V_{33}^{(n)}, \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_m(\lambda, x, t_r) &= V_{12}^{(n)}(V_{11}^{(n)}V_{22}^{(n)} - V_{12}^{(n)}V_{21}^{(n)}) + V_{13}^{(n)}(V_{11}^{(n)}V_{32}^{(n)} - V_{12}^{(n)}V_{31}^{(n)}), \\
 E_{m-1}(\lambda, x, t_r) &= -\varepsilon(m)[V_{32}^{(n)}(V_{21}^{(n)}V_{32}^{(n)} - V_{22}^{(n)}V_{31}^{(n)}) + V_{31}^{(n)}(V_{11}^{(n)}V_{32}^{(n)} - V_{12}^{(n)}V_{31}^{(n)})], \\
 F_m(\lambda, x, t_r) &= \varepsilon(m)[V_{12}^{(n)}(V_{12}^{(n)}V_{23}^{(n)} - V_{13}^{(n)}V_{22}^{(n)}) + V_{13}^{(n)}(V_{12}^{(n)}V_{33}^{(n)} - V_{13}^{(n)}V_{32}^{(n)})], \\
 \varepsilon(m) &= \begin{cases} 1, & m = 3n + 2, \\ -1, & m = 3n + 1, \end{cases} \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

这里 $\varepsilon(m)$ 的引入是为了保证 E_{m-1} 和 F_m 同时都是首项系数为 1 的多项式.

经过直接计算, 我们发现在多项式 $A_m, B_m, C_m, D_m, E_{m-1}, F_m, S_m$ 和 T_m 之间存在一些重要的关系式:

$$\varepsilon(m)V_{32}^{(n)}F_m = V_{12}^{(n)}D_m - (V_{12}^{(n)})^2S_m - C_m^2, \tag{3.11}$$

$$\varepsilon(m)A_mF_m = (V_{12}^{(n)})^2T_m + C_mD_m,$$

$$\varepsilon(m)V_{12}^{(n)}E_{m-1} = (V_{32}^{(n)})^2S_m - V_{32}^{(n)}B_m + A_m^2, \tag{3.12}$$

$$-\varepsilon(m)C_mE_{m-1} = (V_{32}^{(n)})^2T_m + A_mB_m,$$

$$\begin{aligned}
 V_{12}^{(n)}B_m + V_{32}^{(n)}D_m - V_{12}^{(n)}V_{32}^{(n)}S_m + A_mC_m &= 0, \\
 V_{12}^{(n)}V_{32}^{(n)}T_m + V_{12}^{(n)}A_mS_m + V_{32}^{(n)}C_mS_m - B_mC_m - A_mD_m &= 0, \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{12}^{(n)}A_mT_m + V_{32}^{(n)}C_mT_m - E_{m-1}F_m - B_mD_m &= 0, \\
 \varepsilon(m)E_{m-1,x} &= 2V_{32}^{(n)}S_m - 3B_m, \\
 V_{12}^{(n)}F_{m,x} &= -3V_{11}^{(n)}F_m + \varepsilon(m)V_{13}^{(n)}(2V_{12}^{(n)}S_m - 3D_m). \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

由这些关系式及 (3.8), 不难得到亚纯函数 $\phi_3(P, x, t_r)$ 所具有的一些性质:

$$\phi_{3,xx}(P, x, t_r) + 3\phi_3(P, x, t_r)\phi_{3,x}(P, x, t_r) + \phi_3^3(P, x, t_r) - v_x(x, t_r)\phi_3(P, x, t_r) = \lambda + u_x(x, t_r), \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{3,t_r}(P, x, t_r) &= \partial_x[\tilde{V}_{32}^{(r)}(\lambda, x, t_r)(\phi_{3,x}(P, x, t_r) + \phi_3^2(P, x, t_r)) \\
 &\quad + \tilde{V}_{31}^{(r)}(\lambda, x, t_r)\phi_3(P, x, t_r) + \tilde{V}_{33}^{(r)}(\lambda, x, t_r)], \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

$$\phi_3(P, x, t_r)\phi_3(P^*, x, t_r)\phi_3(P^{**}, x, t_r) = \frac{F_m(\lambda, x, t_r)}{E_{m-1}(\lambda, x, t_r)}, \tag{3.17}$$

$$\phi_3(P, x, t_r) + \phi_3(P^*, x, t_r) + \phi_3(P^{**}, x, t_r) = \frac{E_{m-1,x}(\lambda, x, t_r)}{E_{m-1}(\lambda, x, t_r)}, \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{\phi_3(P, x, t_r)} + \frac{1}{\phi_3(P^*, x, t_r)} + \frac{1}{\phi_3(P^{**}, x, t_r)} = -3 \frac{V_{11}^{(n)}(\lambda, x, t_r)}{V_{13}^{(n)}(\lambda, x, t_r)} - \frac{V_{12}^{(n)}(\lambda, x, t_r) F_{m,x}(\lambda, x, t_r)}{V_{13}^{(n)}(\lambda, x, t_r) F_m(\lambda, x, t_r)}, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & \phi_{3,x}(P, x, t_r) + \phi_{3,x}(P^*, x, t_r) + \phi_{3,x}(P^{**}, x, t_r) + \phi_3^2(P, x, t_r) + \phi_3^2(P^*, x, t_r) + \phi_3^2(P^{**}, x, t_r) \\ &= -3 \frac{V_{33}^{(n)}(\lambda, x, t_r)}{V_{32}^{(n)}(\lambda, x, t_r)} - \frac{V_{31}^{(n)}(\lambda, x, t_r) E_{m-1,x}(\lambda, x, t_r)}{V_{32}^{(n)}(\lambda, x, t_r) E_{m-1}(\lambda, x, t_r)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

这里的换叶运算 $*$ 是如下定义的全纯映射:

$$*: \begin{cases} \mathcal{K}_{m-1} \rightarrow \mathcal{K}_{m-1}, \\ P = (\lambda, y_i(\lambda)) \rightarrow P^* = (\lambda, y_{i+1 \pmod{3}}(\lambda)), \quad i = 0, 1, 2, \\ P^{**} := (P^*)^*, \end{cases} \quad (3.21)$$

其中 $y_i(\lambda)$ 表示满足 $\mathcal{F}_m(\lambda, y) = 0$ 的三个分支, 即满足

$$(y - y_0(\lambda))(y - y_1(\lambda))(y - y_2(\lambda)) = y^3 + yS_m(\lambda) - T_m(\lambda) = 0.$$

从中可得

$$\begin{aligned} y_0 + y_1 + y_2 &= 0, \quad y_0 y_1 + y_0 y_2 + y_1 y_2 = S_m(\lambda), \\ y_0 y_1 y_2 &= T_m(\lambda), \quad y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = -2S_m(\lambda), \\ y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 &= 3T_m(\lambda), \quad y_0^2 y_1^2 + y_0^2 y_2^2 + y_1^2 y_2^2 = S_m^2(\lambda). \end{aligned} \quad (3.22)$$

引理 3.1 假设 (3.1) 和 (3.2) 成立, 并且令 $(\lambda, x, t_r) \in \mathbb{C}^3$, 则

$$\begin{aligned} E_{m-1,t_r}(\lambda, x, t_r) &= E_{m-1,x}(\lambda, x, t_r) \left(\tilde{V}_{31}^{(r)} - \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}}{V_{32}^{(n)}} V_{31}^{(n)} \right) + 3E_{m-1}(\lambda, x, t_r) \left(\tilde{V}_{33}^{(r)} - \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}}{V_{32}^{(n)}} V_{33}^{(n)} \right), \\ F_{m,t_r}(\lambda, x, t_r) &= F_{m,x}(\lambda, x, t_r) \left(\tilde{V}_{12}^{(r)} - \frac{\tilde{V}_{13}^{(r)}}{V_{13}^{(n)}} V_{12}^{(n)} \right) + 3F_m(\lambda, x, t_r) \left(\tilde{V}_{11}^{(r)} - \frac{\tilde{V}_{13}^{(r)}}{V_{13}^{(n)}} V_{11}^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

证明 将 (3.18) 关于 t_r 求导可得

$$\begin{aligned} \partial_{t_r} [\phi_3(P, x, t_r) + \phi_3(P^*, x, t_r) + \phi_3(P^{**}, x, t_r)] &= \partial_{t_r} \left[\frac{E_{m-1,x}(\lambda, x, t_r)}{E_{m-1}(\lambda, x, t_r)} \right] \\ &= \partial_x \partial_{t_r} (\ln E_{m-1}(\lambda, x, t_r)). \end{aligned} \quad (3.24)$$

利用 (3.16), (3.18) 和 (3.20), 并且不失一般性选取积分常数为零, 便可以得到

$$\begin{aligned} \partial_{t_r} (\ln E_{m-1}(\lambda, x, t_r)) &= \tilde{V}_{31}^{(r)} [\phi_3(P, x, t_r) + \phi_3(P^*, x, t_r) + \phi_3(P^{**}, x, t_r)] + \tilde{V}_{32}^{(r)} [\phi_{3,x}(P, x, t_r) \\ &\quad + \phi_3^2(P, x, t_r) + \phi_{3,x}(P^*, x, t_r) + \phi_3^2(P^*, x, t_r) + \phi_{3,x}(P^{**}, x, t_r) \\ &\quad + \phi_3^2(P^{**}, x, t_r)] + 3\tilde{V}_{33}^{(r)} \\ &= \tilde{V}_{31}^{(r)} \left[\frac{E_{m-1,x}(\lambda, x, t_r)}{E_{m-1}(\lambda, x, t_r)} \right] - \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}}{V_{32}^{(n)}} \left[3V_{33}^{(n)} + V_{31}^{(n)} \frac{E_{m-1,x}(\lambda, x, t_r)}{E_{m-1}(\lambda, x, t_r)} \right] + 3\tilde{V}_{33}^{(r)} \end{aligned}$$

$$= \left(\tilde{V}_{31}^{(r)} - \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}}{V_{32}^{(n)}} V_{31}^{(n)} \right) \frac{E_{m-1,x}(\lambda, x, t_r)}{E_{m-1}(\lambda, x, t_r)} + 3\tilde{V}_{33}^{(r)} - 3\frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}}{V_{32}^{(n)}} V_{33}^{(n)}. \quad (3.25)$$

由此便知 (3.23) 的第一个式子成立. 通过观察 (3.16)–(3.20) 以及 (3.17) 关于时间的导数, 我们可以推导出

$$\begin{aligned} \partial_{t_r} \left[\frac{F_m(\lambda, x, t_r)}{E_{m-1}(\lambda, x, t_r)} \right] &= \frac{F_m}{E_{m-1}} \left[(\tilde{V}_{12}^{(r)} - \tilde{V}_{31}^{(r)}) \frac{E_{m-1,x}}{E_{m-1}} + \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}}{V_{32}^{(n)}} \left(V_{31}^{(n)} \frac{E_{m-1,x}}{E_{m-1}} + 3V_{33}^{(n)} \right) \right. \\ &\quad \left. + 3(\tilde{V}_{11}^{(r)} - \tilde{V}_{33}^{(r)}) + \tilde{V}_{12}^{(r)} \left(\ln \frac{F_m}{E_{m-1}} \right)_x - \frac{\tilde{V}_{13}^{(r)}}{V_{13}^{(n)}} \left(V_{12}^{(n)} \frac{F_{m,x}}{F_m} + 3V_{11}^{(n)} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

即

$$\begin{aligned} \frac{F_{m,t_r}}{E_{m-1}} - \frac{F_m E_{m-1,t_r}}{E_{m-1}^2} &= \frac{F_m}{E_{m-1}} \left[\left(\tilde{V}_{12}^{(r)} - \frac{\tilde{V}_{13}^{(r)}}{V_{13}^{(n)}} V_{12}^{(n)} \right) \frac{F_{m,x}}{F_m} - \left(\tilde{V}_{31}^{(r)} - \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}}{V_{32}^{(n)}} V_{31}^{(n)} \right) \frac{E_{m-1,x}}{E_{m-1}} \right. \\ &\quad \left. - 3 \left(\tilde{V}_{33}^{(r)} - \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}}{V_{32}^{(n)}} V_{33}^{(n)} - \tilde{V}_{11}^{(r)} + \frac{\tilde{V}_{13}^{(r)}}{V_{13}^{(n)}} V_{11}^{(n)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

从 (3.27) 和 (3.23) 的第一个等式立刻便得到 (3.23) 的第二个等式. 引理证明完毕. $\square$

由 (3.1), (3.8), (3.14), (3.17), (3.18) 和 (3.23), 我们可以概括出 $\psi_3(P, x, x_0, t_r, t_{0,r})$ 所满足的一些性质:

$$\begin{aligned} \psi_{3,t_r}(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}) &= [\tilde{V}_{32}^{(r)}(\lambda, x, t_r)(\phi_{3,x}(P, x, t_r) + \phi_3^2(P, x, t_r)) \\ &\quad + \tilde{V}_{31}^{(r)}(\lambda, x, t_r)\phi_3(P, x, t_r) + \tilde{V}_{33}^{(r)}(\lambda, x, t_r)]\psi_3(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}) &= \exp \left(\int_{x_0}^x \phi_3(P, x', t_r) dx' + \int_{t_{0,r}}^{t_r} [\tilde{V}_{32}^{(r)}(\lambda, x_0, t')(\phi_{3,x}(P, x_0, t') + \phi_3^2(P, x_0, t')) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{V}_{31}^{(r)}(\lambda, x_0, t')\phi_3(P, x_0, t') + \tilde{V}_{33}^{(r)}(\lambda, x_0, t')] dt' \right), \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\psi_3(P, x, x_0, t_r, t_{0,r})\psi_3(P^*, x, x_0, t_r, t_{0,r})\psi_3(P^{**}, x, x_0, t_r, t_{0,r}) = \frac{E_{m-1}(\lambda, x, t_r)}{E_{m-1}(\lambda, x_0, t_{0,r})}, \quad (3.30)$$

$$\psi_{3,x}(P, x, x_0, t_r, t_{0,r})\psi_{3,x}(P^*, x, x_0, t_r, t_{0,r})\psi_{3,x}(P^{**}, x, x_0, t_r, t_{0,r}) = \frac{F_m(\lambda, x, t_r)}{E_{m-1}(\lambda, x_0, t_{0,r})}, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}) &= \left[\frac{E_{m-1}(\lambda, x, t_r)}{E_{m-1}(\lambda, x_0, t_{0,r})} \right]^{1/3} \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_{x_0}^x \frac{y^2(P)V_{32}^{(n)}(\lambda, x', t_r) - y(P)A_m(\lambda, x', t_r) + \frac{2}{3}V_{32}^{(n)}(\lambda, x', t_r)S_m(\lambda)}{-\varepsilon(m)E_{m-1}(\lambda, x', t_r)} dx' \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_{0,r}}^{t_r} \left(\frac{y^2(P)V_{32}^{(n)}(\lambda, x_0, t') - y(P)A_m(\lambda, x_0, t') + \frac{2}{3}V_{32}^{(n)}(\lambda, x_0, t')S_m(\lambda)}{-\varepsilon(m)E_{m-1}(\lambda, x_0, t')} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left[\tilde{V}_{31}^{(r)}(\lambda, x_0, t') - \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}(\lambda, x_0, t')}{V_{32}^{(n)}(\lambda, x_0, t')} V_{31}^{(n)}(\lambda, x_0, t') \right] + y(P) \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}(\lambda, x_0, t')}{V_{32}^{(n)}(\lambda, x_0, t')} \right) dt' \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

通过观察 (2.12) 和 (3.10), 易见 E_{m-1} 和 F_m 分别为关于 λ 的 $m-1$ 次和 m 次首项系数为 1 的多项式. 因此, 可以把它们分解为如下形式的有限乘积,

$$E_{m-1}(\lambda, x, t_r) = \prod_{j=1}^{m-1} (\lambda - \mu_j(x, t_r)), \quad (3.33)$$

$$F_m(\lambda, x, t_r) = \prod_{l=0}^{m-1} (\lambda - \nu_l(x, t_r)). \quad (3.34)$$

为了给出亚纯函数 $\phi_3(P, x, t_r)$ 的因子, 特定义三角曲线 $\mathcal{K}_{m-1}$ 上的一些点

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_j(x, t_r) = (\mu_j(x, t_r), y(\hat{\mu}_j(x, t_r))) &= \left(\mu_j(x, t_r), -\frac{A_m(\mu_j(x, t_r), x, t_r)}{V_{32}^{(n)}(\mu_j(x, t_r), x, t_r)} \right) \in \mathcal{K}_{m-1}, \\ 1 \leq j \leq m-1, (x, t_r) &\in \mathbb{C}^2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

和

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_l(x, t_r) = (\nu_l(x, t_r), y(\hat{\nu}_l(x, t_r))) &= \left(\nu_l(x, t_r), -\frac{C_m(\nu_l(x, t_r), x, t_r)}{V_{12}^{(n)}(\nu_l(x, t_r), x, t_r)} \right) \in \mathcal{K}_{m-1}, \\ 0 \leq l \leq m-1, (x, t_r) &\in \mathbb{C}^2, \end{aligned} \quad (3.36)$$

以及 $P_{0j} = (0, y_{j0}) \in \mathcal{K}_{m-1}, j = 1, 2, 3$. 而 $\mathcal{K}_{m-1}$ 上的 m 次正因子则定义为

$$\mathcal{D}_{P_1, \dots, P_{m-1}} : \begin{cases} \mathcal{K}_{m-1} \rightarrow \mathbb{N}_0, \\ P \rightarrow \mathcal{D}_{P_1, \dots, P_{m-1}}(P) = \begin{cases} k, & \text{若 } P \text{ 在 } \{P_1, \dots, P_{m-1}\} \text{ 出现 } k \text{ 次,} \\ 0, & \text{若 } P \notin \{P_1, \dots, P_{m-1}\}, \end{cases} \end{cases} \quad (3.37)$$

其中 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. 有了这些准备, 我们可以从 (3.8) 断言 $\phi_3(P, x, t_r)$ 的因子 $(\phi_3(P, x, t_r))$ 可以表示为

$$(\phi_3(P, x, t_r)) = \mathcal{D}_{\hat{\nu}_0(x, t_r), \hat{\nu}_1(x, t_r), \dots, \hat{\nu}_{m-1}(x, t_r)}(P) - \mathcal{D}_{P_\infty, \hat{\mu}_1(x, t_r), \dots, \hat{\mu}_{m-1}(x, t_r)}(P), \quad (3.38)$$

这说明 $\hat{\nu}_0(x, t_r), \hat{\nu}_1(x, t_r), \dots, \hat{\nu}_{m-1}(x, t_r)$ 为 $\phi_3(P, x, t_r)$ 的 m 个零点, 而 $P_\infty, \hat{\mu}_1(x, t_r), \dots, \hat{\mu}_{m-1}(x, t_r)$ 恰为它的 m 个极点.

$E_{m-1}(\lambda, x, t_r)$ 的零点 $\{\mu_j(x, t_r)\}_{j=1}^{m-1}$ 与 $F_m(\lambda, x, t_r)$ 的零点 $\{\nu_l(x, t_r)\}_{l=0}^{m-1}$ 所满足的动力系统可由 Dubrovin- 型方程描述.

引理 3.2 假设 $E_{m-1}(\lambda, x, t_r)$ 的零点 $\{\mu_j(x, t_r)\}_{j=1}^{m-1}$ 和 $F_m(\lambda, x, t_r)$ 的零点 $\{\nu_l(x, t_r)\}_{l=0}^{m-1}$ 分别当 $(x, t_r) \in \Omega_\mu$ 和 $(x, t_r) \in \Omega_\nu$ 时互不相同, 其中 $\Omega_\mu, \Omega_\nu \subseteq \mathbb{C}^2$ 是连通开集, 则 $\{\mu_j(x, t_r)\}_{j=1}^{m-1}$ 和 $\{\nu_l(x, t_r)\}_{l=0}^{m-1}$ 满足下面相应的微分方程组,

$$\mu_{j,x}(x, t_r) = \frac{\varepsilon(m)V_{32}^{(n)}(\mu_j(x, t_r), x, t_r)[3y^2(\hat{\mu}_j(x, t_r)) + S_m(\mu_j(x, t_r))]}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m-1} (\mu_j(x, t_r) - \mu_k(x, t_r))}, \quad 1 \leq j \leq m-1, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \mu_{j,t_r}(x, t_r) &= [V_{32}^{(n)}(\mu_j(x, t_r), x, t_r)\tilde{V}_{31}^{(r)}(\mu_j(x, t_r), x, t_r) - \tilde{V}_{32}^{(r)}(\mu_j(x, t_r), x, t_r)V_{31}^{(n)}(\mu_j(x, t_r), x, t_r)] \\ &\quad \times \frac{\varepsilon(m)[3y^2(\hat{\mu}_j(x, t_r)) + S_m(\mu_j(x, t_r))]}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m-1} (\mu_j(x, t_r) - \mu_k(x, t_r))}, \quad 1 \leq j \leq m-1, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\nu_{l,x}(x, t_r) = \frac{\varepsilon(m)V_{13}^{(n)}(\nu_l(x, t_r), x, t_r)[3y^2(\hat{\nu}_l(x, t_r)) + S_m(\nu_l(x, t_r))]}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{m-1} (\nu_l(x, t_r) - \nu_k(x, t_r))}, \quad 0 \leq l \leq m-1, \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \nu_{l,t_r}(x, t_r) &= [V_{13}^{(n)}(\nu_l(x, t_r), x, t_r)\tilde{V}_{12}^{(r)}(\nu_l(x, t_r), x, t_r) - \tilde{V}_{13}^{(r)}(\nu_l(x, t_r), x, t_r)V_{12}^{(n)}(\nu_l(x, t_r), x, t_r)] \\ &\quad \times \frac{\varepsilon(m)[3y^2(\hat{\nu}_l(x, t_r)) + S_m(\nu_l(x, t_r))]}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{m-1} (\nu_l(x, t_r) - \nu_k(x, t_r))}, \quad 0 \leq l \leq m-1. \end{aligned} \quad (3.42)$$

证明 从 (3.12) 和 (3.35) 可知, 当 $\lambda = \mu_j(x, t_r)$ 时,

$$\begin{aligned} B_m(\mu_j(x, t_r), x, t_r) &= V_{32}^{(n)}(\mu_j(x, t_r), x, t_r) S_m(\mu_j(x, t_r)) + \frac{A_m^2(\mu_j(x, t_r), x, t_r)}{V_{32}^{(n)}(\mu_j(x, t_r), x, t_r)} \\ &= V_{32}^{(n)}(\mu_j(x, t_r), x, t_r) [S_m(\mu_j(x, t_r)) + y^2(\hat{\mu}_j(x, t_r))]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

把 (3.43) 代入 (3.14), 便得

$$\varepsilon(m) E_{m-1, x}(\mu_j(x, t_r), x, t_r) = -V_{32}^{(n)}(\mu_j(x, t_r), x, t_r) [3y^2(\hat{\mu}_j(x, t_r)) + S_m(\mu_j(x, t_r))]. \quad (3.44)$$

另一方面, 对 (3.33) 分别关于 x 和 t_r 进行求导可知

$$E_{m-1, x}(\lambda, x, t_r)|_{\lambda=\mu_j(x, t_r)} = -\mu_{j, x}(x, t_r) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m-1} (\mu_j(x, t_r) - \mu_k(x, t_r)), \quad (3.45)$$

$$E_{m-1, t_r}(\lambda, x, t_r)|_{\lambda=\mu_j(x, t_r)} = -\mu_{j, t_r}(x, t_r) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m-1} (\mu_j(x, t_r) - \mu_k(x, t_r)). \quad (3.46)$$

通过比较 (3.44) 和 (3.45), 自然就得到 (3.39). 同时, 由 (3.23), (3.39) 和 (3.45) 可知

$$\begin{aligned} E_{m-1, t_r}(\lambda, x, t_r)|_{\lambda=\mu_j(x, t_r)} &= E_{m-1, x}(\mu_j(x, t_r), x, t_r) \frac{V_{32}^{(n)} \tilde{V}_{31}^{(r)} - \tilde{V}_{32}^{(r)} V_{31}^{(n)}}{V_{32}^{(n)}} \Big|_{\lambda=\mu_j(x, t_r)} \\ &= -\mu_{j, x}(x, t_r) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m-1} (\mu_j(x, t_r) - \mu_k(x, t_r)) \frac{V_{32}^{(n)} \tilde{V}_{31}^{(r)} - \tilde{V}_{32}^{(r)} V_{31}^{(n)}}{V_{32}^{(n)}} \Big|_{\lambda=\mu_j(x, t_r)} \\ &= -\varepsilon(m) [3y(\hat{\mu}_j(x, t_r))^2 + S_m(\mu_j(x, t_r))] (V_{32}^{(n)} \tilde{V}_{31}^{(r)} - \tilde{V}_{32}^{(r)} V_{31}^{(n)})|_{\lambda=\mu_j(x, t_r)}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

由该式再结合 (3.46) 就给出了 (3.40). 类似地, 可以证明 (3.41) 和 (3.42) 成立. $\square$

4 混合 Boussinesq 方程的有限亏格解

本节将构造亚纯函数 ϕ_3 和 Baker-Akhiezer 函数 ψ_3 , 特别是混合 Boussinesq 方程的位势 u, v 的显式 Riemann θ 函数表示.

为了考察亚纯函数 ϕ_3 在 $P_\infty \in \mathcal{K}_{m-1}$ 附近的渐近性质, 我们引入局部坐标 $\zeta = \lambda^{-\frac{1}{3}}$, 同时改写 (3.15) 为

$$\phi_{3, xx}(P, x, t_r) + 3\phi_3(P, x, t_r)\phi_{3, x}(P, x, t_r) + \phi_3^3(P, x, t_r) - v_x(x, t_r)\phi_3(P, x, t_r) = \zeta^{-3} + u_x(x, t_r). \quad (4.1)$$

经过简单计算可知 $\phi_3(P, x, t_r)$ 的 Laurent 级数可以显式的表示为

$$\phi_3(P, x, t_r) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\zeta} \sum_{j=0}^{\infty} \kappa_j(x, t_r) \zeta^j, \quad \text{当 } P \rightarrow P_\infty, \quad (4.2)$$

其中

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= 1, \quad \kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = \frac{1}{3}v_x, \quad \kappa_3 = \frac{1}{3}(u_x - v_{xx}), \quad \kappa_4 = \frac{2}{9}v_{xxx} - \frac{1}{3}u_{xx}, \\ \kappa_j &= -\frac{1}{3} \left[\kappa_{j-2,xx} + 3 \sum_{i=2}^{j-1} \kappa_{j-1-i} \kappa_{i,x} + \sum_{i=2}^{j-1} \kappa_i \kappa_{j-i} + \sum_{i=2}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-i} \kappa_i \kappa_l \kappa_{j-i-l} - v_x \kappa_{j-2} \right], \quad j \geq 4. \end{aligned} \quad (4.3)$$

为了构造 Riemann θ 函数, 从而给出亚纯函数、Baker-Akhiezer 函数及位势的 Riemann θ 函数表示, 在 Riemann 曲面 $\mathcal{K}_{m-1}$ 上引入一组同调基 $\{a_j, b_j\}_{j=1}^{m-1}$, 它们相互独立, 且满足相交数关系: $a_j \circ b_k = \delta_{j,k}$, $a_j \circ a_k = 0$, $b_j \circ b_k = 0$, $j, k = 1, \dots, m-1$. 下面, 我们定义 $\mathcal{K}_{m-1}$ 上的 $m-1$ 个线性独立的全纯微分

$$\varpi_l(P) = \frac{1}{3y^2(P) + S_m} \times \begin{cases} \lambda^{l-1} d\lambda, & 1 \leq l \leq m-n-1, \\ y(P) \lambda^{l+n-m} d\lambda, & m-n \leq l \leq m-1. \end{cases} \quad (4.4)$$

借助于同调基 $\{a_j\}$ 和 $\{b_j\}$, 分别定义可逆矩阵 $A = (A_{jk})$ 和 $B = (B_{jk})$ 为

$$A_{jk} = \int_{a_k} \varpi_j, \quad B_{jk} = \int_{b_k} \varpi_j. \quad (4.5)$$

引入记号: $C = A^{-1}$, $\tau = A^{-1}B$, 则可以证明, 矩阵 τ 是对称的 ($\tau_{jk} = \tau_{kj}$), 并且有正定的虚部 ($\text{Im } \tau > 0$)^[44, 45]. 将 $\varpi_l(P)$ 正则化可以得到一组新的基 ω_j :

$$\omega_j = \sum_{l=1}^{m-1} C_{jl} \varpi_l, \quad (4.6)$$

它们满足 $\int_{a_k} \omega_j = \delta_{jk}$, $\int_{b_k} \omega_j = \tau_{jk}$, $j, k = 1, \dots, m-1$.

假设 $\mathcal{T}_{m-1}$ 表示周期格点集, 定义为 $\mathcal{T}_{m-1} = \{z \in \mathbb{C}^{m-1} \mid z = \underline{N} + \tau \underline{L}, \underline{N}, \underline{L} \in \mathbb{Z}^{m-1}\}$, 而复环面 $\mathcal{J}_{m-1} = \mathbb{C}^{m-1} / \mathcal{T}_{m-1}$ 称为 $\mathcal{K}_{m-1}$ 的 Jacobi 簇. 引入 Abel 映射 $\mathcal{A}: \mathcal{K}_{m-1} \rightarrow \mathcal{J}_{m-1}$,

$$\mathcal{A}(P) = (\mathcal{A}_1(P), \dots, \mathcal{A}_{m-1}(P)) = \left(\int_{Q_0}^P \omega_1, \dots, \int_{Q_0}^P \omega_{m-1} \right) \pmod{\mathcal{T}_{m-1}},$$

其中 Q_0 是 $\mathcal{K}_{m-1}$ 上一个合适选择的基点, 该映射可以如下线性扩展到整个因子群 $\text{Div}(\mathcal{K}_{m-1})$,

$$\mathcal{A}\left(\sum n_k P_k\right) = \sum n_k \mathcal{A}(P_k).$$

考虑非特殊因子 $\mathcal{D}_{\hat{\mu}(x, t_r)} = \sum_{k=1}^{m-1} \hat{\mu}_k(x, t_r)$ 和 $\mathcal{D}_{\hat{\nu}(x, t_r)} = \sum_{k=1}^{m-1} \hat{\nu}_k(x, t_r)$, 其中 $\hat{\mu}(x, t_r) = (\hat{\mu}_1(x, t_r), \dots, \hat{\mu}_{m-1}(x, t_r)) \in \sigma^{m-1} \mathcal{K}_{m-1}$, $\hat{\nu}(x, t_r) = (\hat{\nu}_1(x, t_r), \dots, \hat{\nu}_{m-1}(x, t_r)) \in \sigma^{m-1} \mathcal{K}_{m-1}$, 此处 $\sigma^n \mathcal{K}_{m-1} = \{\{Q_1, \dots, Q_n\} \mid Q_j \in \mathcal{K}_{m-1}, j = 1, \dots, n\}$ 表示 $\mathcal{K}_{m-1}$ 的第 n 个对称幂. 从而, 我们定义

$$\mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^{m-1} P_k^{(i)}(x, t_r)\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathcal{A}(P_k^{(i)}(x, t_r)) = \sum_{k=1}^{m-1} \int_{Q_0}^{P_k^{(i)}(x, t_r)} \omega = \rho^{(i)}(x, t_r), \quad i = 1, 2, \quad (4.7)$$

其分量形式为 $\sum_{k=1}^{m-1} \int_{Q_0}^{P_k^{(i)}(x, t_r)} \omega_j = \rho_j^{(i)}(x, t_r)$, $j = 1, \dots, m-1$, 其中 $P_k^{(1)}(x, t_r) = \hat{\mu}_k(x, t_r)$, $P_k^{(2)}(x, t_r) = \hat{\nu}_k(x, t_r)$.

接下来, 我们引入不同形式的第二类 Abel 微分. 假设 $\omega_{P_\infty, 2}^{(2)}(P)$ 表示如下定义的第二类正则化 Abel 微分,

$$\omega_{P_\infty, 2}^{(2)}(P) = - \sum_{j=1}^{m-1} z_j \varpi_j(P) - \frac{1}{3y^2(P) + S_m} \times \begin{cases} y(P)\lambda^n d\lambda, & m = 3n + 2, \\ -\lambda^{2n} d\lambda, & m = 3n + 1, \end{cases} \quad (4.8)$$

它在 $\mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_\infty\}$ 上是全纯的, 且以 P_∞ 为 2 阶极点, 其中的常数 $\{z_j\}_{j=1}^{m-1}$ 由正则化条件决定,

$$\int_{a_j} \omega_{P_\infty, 2}^{(2)}(P) = 0, \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (4.9)$$

微分 $\omega_{P_\infty, 2}^{(2)}$ 的 b -周期定义为

$$U_2^{(2)} = (U_{2,1}^{(2)}, \dots, U_{2,m-1}^{(2)}), \quad U_{2,j}^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_j} \omega_{P_\infty, 2}^{(2)}(P), \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (4.10)$$

类似地, 令 $\omega_{P_{0j}, 2, j}^{(2)}, j = 1, 2, 3$ 表示 $\mathcal{K}_{m-1}$ 上以 P_{0j} 为 2 阶极点的第二类正则化 Abel 微分, 它在 $\mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_{0j}\}$ 上全纯且具有渐近式

$$\omega_{P_{0j}, 2}^{(2)}(P) \underset{\lambda \rightarrow 0}{=} (\lambda^{-2} + O(1))d\lambda, \quad \text{当 } P \rightarrow P_{0j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.11)$$

另外, 用 $\omega_{P_\infty, 3}^{(2)}(P)$ 表示在 $\mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_\infty\}$ 上全纯且以 P_∞ 为 3 阶极点的第二类正则化 Abel 微分

$$\begin{aligned} \omega_{P_\infty, 3}^{(2)}(P) &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} (\zeta^{-3} + O(1))d\zeta, \quad \text{当 } P \rightarrow P_\infty, \\ U_3^{(2)} &= (U_{3,1}^{(2)}, \dots, U_{3,m-1}^{(2)}), \quad U_{3,j}^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_j} \omega_{P_\infty, 3}^{(2)}(P), \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (4.12)$$

注意到, 如果令 $\omega_j = \sum_{l=0}^{\infty} \varrho_{l,j} \zeta^l d\zeta$, 则 $U_{2,j}^{(2)} = \varrho_{0,j}, U_{3,j}^{(2)} = \frac{1}{2} \varrho_{1,j}$ [16].

为了观察第一类与第二类 Abel 微分的性质, 我们有 $y(P)$ 和 $S_m(\lambda)$ 在 P_∞ 附近的渐近性质:

$$y(P) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \begin{cases} -\zeta^{-3n-2}[1 + \beta_0 \zeta + \alpha_1 \zeta^3 + \beta_1 \zeta^4 + O(\zeta^6)], & \text{当 } P \rightarrow P_\infty, \quad m = 3n + 2, \\ -\zeta^{-3n-1}[1 + \alpha_1 \zeta^2 + \beta_1 \zeta^3 + O(\zeta^5)], & \text{当 } P \rightarrow P_\infty, \quad m = 3n + 1, \end{cases} \quad (4.13)$$

$$S_m(\lambda) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \begin{cases} -3\zeta^{-6n-3}[\beta_0 + (\beta_1 + \alpha_1 \beta_0)\zeta^3 + O(\zeta^6)], & \text{当 } P \rightarrow P_\infty, \quad m = 3n + 2, \\ -3\zeta^{-6n}[\alpha_1 + O(\zeta^3)], & \text{当 } P \rightarrow P_\infty, \quad m = 3n + 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

由此便可以得到 (4.6) 和 (4.8) 在 P_∞ 附近的 Laurent 展式:

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_{m-1}), \\ \omega_j &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \begin{cases} \{-C_{j,m-n-1} + (C_{j,m-1} + \beta_0 C_{j,m-n-1})\zeta + [(2\alpha_1 - \beta_0^3)C_{j,m-n-1} \\ -\beta_0^2 C_{j,m-1} - C_{j,m-n-2}]\zeta^3 + O(\zeta^4)\}d\zeta, & m = 3n + 2, \\ [C_{j,m-1} - C_{j,m-n-1}\zeta + (C_{j,m-2} - \beta_1 C_{j,m-1} \\ + \alpha_1 C_{j,m-n-1})\zeta^3 + O(\zeta^4)]d\zeta, & m = 3n + 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.15)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, m-1$,

$$\omega_{P_\infty, 2}^{(2)}(P) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \begin{cases} [-\zeta^{-2} + z_{m-n-1} + \beta_0^2 + (\alpha_1 - \beta_0^3 - \beta_0 z_{m-n-1} - z_{m-1})\zeta + O(\zeta^2)]d\zeta, & m = 3n + 2, \\ [-\zeta^{-2} + \alpha_1 - z_{m-1} + (z_{m-n-1} + 2\beta_1)\zeta + O(\zeta^2)]d\zeta, & m = 3n + 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

从 (4.16) 可知

$$\int_{Q_0}^P \omega_{P_\infty, 2}^{(2)}(P) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \zeta^{-1} + e_2^{(2)}(Q_0) + q_1\zeta + q_2\zeta^2 + O(\zeta^3), \quad \text{当 } P \rightarrow P_\infty, \quad (4.17)$$

其中 $e_2^{(2)}(Q_0)$ 为合适选取的常数, 而

$$q_1 = \begin{cases} z_{m-n-1} + \beta_0^2, & m = 3n + 2, \\ \alpha_1 - z_{m-1}, & m = 3n + 1, \end{cases} \quad (4.18)$$

$$q_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta_0^3 - \beta_0 z_{m-n-1} - z_{m-1}), & m = 3n + 2, \\ \frac{1}{2}z_{m-n-1} + \beta_1, & m = 3n + 1. \end{cases}$$

借助于引入的 Abel 映射, 我们可以把混合 Boussinesq 流在一定条件下拉直.

定理 4.1 假定曲线 $\mathcal{K}_{m-1}$ 非奇异, 且令 $(x, t_r) \in \mathbb{C}^2$, 则在条件

$$\tilde{b}_r - \frac{1}{3}v_{t_r} = b_{n-1}, \quad \tilde{c}_r - \frac{1}{3}u_{t_r} = c_{n-1}, \quad r \geq -1 \quad (4.19)$$

成立的情况下, 可得

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}(x, t_r) &= \rho^{(1)}(x_0, t_{0,r}) + U_2^{(2)}(x - x_0) + \tilde{U}^{(r)}(t_r - t_{0,r}), \\ \mathcal{A}(\hat{v}_0(x, t_r)) + \rho^{(2)}(x, t_r) &= \mathcal{A}(\hat{v}_0(x_0, t_{0,r})) + \rho^{(2)}(x_0, t_{0,r}) + U_2^{(2)}(x - x_0) + \tilde{U}^{(r)}(t_r - t_{0,r}), \end{aligned} \quad (4.20)$$

其中 $(-1 \leq r \leq 0)$

$$\begin{aligned} U_2^{(2)} &= \begin{cases} -C_{m-n-1}, & m = 3n + 2, \\ C_{m-1}, & m = 3n + 1, \end{cases} \\ \tilde{U}^{(-1)} &= C_{m-n}, \\ \tilde{U}^{(0)} &= \begin{cases} (\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0\beta_0)C_{m-n-1} + C_{m-n} - \tilde{\alpha}_0C_{m-1}, & m = 3n + 2, \\ \tilde{\alpha}_0C_{m-n-1} + C_{m-n} - \tilde{\beta}_0C_{m-1}, & m = 3n + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

证明 我们仅证明 (4.20) 的第一式, 而第二式类似可得. 我们暂时假定在连通开集 $\tilde{\Omega}_\mu \subseteq \mathbb{C}^2$ 上, 当 $j \neq j'$ 而 $(x, t_r) \in \tilde{\Omega}_\mu$ 时成立 $\mu_j(x, t_r) \neq \mu_{j'}(x, t_r)$. 经详细计算可得

$$\begin{aligned} \rho_{l,x}^{(1)} &= \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{m-1} \int_{Q_0}^{\hat{\mu}_j} \omega_l \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\varepsilon(m) V_{32}^{(n)}(\mu_j)(3y^2(\hat{\mu}_j) + S_m(\mu_j))}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{k=1}^{m-n-1} C_{l,k} \frac{\mu_j^{k-1}}{3y^2(\hat{\mu}_j) + S_m(\mu_j)} + \sum_{k=m-n}^{m-1} C_{l,k} \frac{y(\hat{\mu}_j)\mu_j^{k+n-m}}{3y^2(\hat{\mu}_j) + S_m(\mu_j)} \right) \\
& = \varepsilon(m) \left[\sum_{k=1}^{m-n-1} C_{l,k} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{V_{32}^{(n)}(\mu_j)\mu_j^{k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} + \sum_{k=1}^n C_{l,k+m-n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{V_{32}^{(n)}(\mu_j)y(\hat{\mu}_j)\mu_j^{k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} \right] \\
& = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m-n-1} C_{l,k} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-\mu_j^n - b_0\mu_j^{n-1} - \dots)\mu_j^{k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} + \sum_{k=1}^n C_{l,k+m-n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\frac{1}{3}v_x\mu_j^{2n+k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)}, & m = 3n + 2, \\ - \sum_{k=1}^{m-n-1} C_{l,k} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-b_0\mu_j^{n-1} - \dots)\mu_j^{k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} - \sum_{k=1}^n C_{l,k+m-n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{-\mu_j^{2n+k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)}, & m = 3n + 1, \end{cases} \\
& = \begin{cases} -C_{l,m-n-1}, & m = 3n + 2, \\ C_{l,m-1}, & m = 3n + 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

其中, 我们用到了标准的 Lagrange 插值公式

$$\sum_{k=1}^N \frac{\mu_k^{l-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^N (\mu_k - \mu_s)} = \delta_{lN}, \quad 1 \leq l \leq N. \quad (4.21)$$

从而由 (4.10) 和 (4.15) 可知 $\rho_x^{(1)}(x, t_r) = U_2^{(2)}$.

按照同样的方法, 我们可以推导出

$$\begin{aligned}
\rho_{l,t-1}^{(1)} &= \frac{d}{dt_{-1}} \sum_{j=1}^{m-1} \int_{Q_0}^{\hat{\mu}_j} \omega_l \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\varepsilon(m) [V_{32}^{(n)}(\mu_j) \tilde{V}_{31}^{(-1)}(\mu_j) - \tilde{V}_{32}^{(-1)}(\mu_j) V_{31}^{(n)}(\mu_j)] [3y^2(\hat{\mu}_j) + S_m(\mu_j)]}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} \\
&\quad \times \left(\sum_{k=1}^{m-n-1} C_{l,k} \frac{\mu_j^{k-1}}{3y^2(\hat{\mu}_j) + S_m(\mu_j)} + \sum_{k=m-n}^{m-1} C_{l,k} \frac{y(\hat{\mu}_j)\mu_j^{k+n-m}}{3y^2(\hat{\mu}_j) + S_m(\mu_j)} \right) \\
&= \varepsilon(m) \left(\sum_{k=1}^{m-n-1} C_{l,k} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{[V_{32}^{(n)}(\mu_j) \tilde{V}_{31}^{(-1)}(\mu_j) - \tilde{V}_{32}^{(-1)}(\mu_j) V_{31}^{(n)}(\mu_j)] \mu_j^{k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n C_{l,k+m-n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{[V_{32}^{(n)}(\mu_j) \tilde{V}_{31}^{(-1)}(\mu_j) - \tilde{V}_{32}^{(-1)}(\mu_j) V_{31}^{(n)}(\mu_j)] y(\hat{\mu}_j) \mu_j^{k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} \right) \\
&= \varepsilon(m) C_{l,1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{-\mu_j^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} [b_{n-1}(b_{n-1,x} - c_{n-1}) - (b_{n-1,x} - c_{n-1})b_{n-1}] \\
&\quad + \varepsilon(m) C_{l,m-n} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\mu_j^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} \left\{ (b_{n-1,x} - c_{n-1}) \left[c_{n-1}(b_{n-1,x} - c_{n-1}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{3}b_{n-1}(b_{n-1,xx} - v_x b_{n-1}) \right] - b_{n-1} \left[b_{n-1} \left(\frac{1}{3}b_{n-1,xxx} - \frac{1}{3}v_x b_{n-1,x} - \frac{1}{3}v_{xx} b_{n-1} \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_{n-1,xx} + v_x c_{n-1} + u_x b_{n-1} \Big) - \left(\frac{1}{3} b_{n-1,xx} - \frac{1}{3} v_x b_{n-1} - c_{n-1,x} \right) (b_{n-1,x} - c_{n-1}) \Big] \Big\} \\
& = -C_{l,m-n} E_{m-1}(0, x, t_r) \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\mu_j^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} \\
& = C_{l,m-n},
\end{aligned}$$

此处, 我们用到了假设 $\tilde{b}_r - \frac{1}{3}v_{t_r} = b_{n-1}$, $\tilde{c}_r - \frac{1}{3}u_{t_r} = c_{n-1}$, (3.10), (4.21) 和插值公式

$$\sum_{k=1}^N \frac{\mu_k^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^N (\mu_k - \mu_s)} = \frac{(-1)^{N+1}}{\prod_{s=1}^N \mu_s}.$$

同理

$$\begin{aligned}
\rho_{l,t_0}^{(1)} &= \varepsilon(m) \left(\sum_{k=1}^{m-n-1} C_{l,k} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{[V_{32}^{(n)}(\mu_j) \tilde{V}_{31}^{(0)}(\mu_j) - \tilde{V}_{32}^{(0)}(\mu_j) V_{31}^{(n)}(\mu_j)] \mu_j^{k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n C_{l,k+m-n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{[V_{32}^{(n)}(\mu_j) \tilde{V}_{31}^{(0)}(\mu_j) - \tilde{V}_{32}^{(0)}(\mu_j) V_{31}^{(n)}(\mu_j)] y(\hat{\mu}_j) \mu_j^{k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} \right) \\
&= \varepsilon(m) \sum_{k=1}^{m-n-1} C_{l,k} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(b_{-1} \tilde{c}_{-1} - c_{-1} \tilde{b}_{-1}) \mu_j^{n+k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} \\
&\quad + \varepsilon(m) \sum_{k=1}^n C_{l,k+m-n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} \left\{ -b_{-1}^2 \tilde{b}_{-1} \mu_j^{2n+k} + \left[\tilde{c}_{-1} \left(c_{-1}^2 - \frac{1}{3} v_x b_{-1} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \tilde{b}_{-1} \left(u_x b_{-1}^2 - \frac{1}{3} v_{xx} b_{-1}^2 + b_{-1} b_0 + \frac{2}{3} v_x b_{-1} c_{-1} \right) - b_{n-1} b_{-1}^2 \right] \mu_j^{2n+k-1} \right\} \\
&\quad + \varepsilon(m) C_{l,1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{-\mu_j^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} [b_{n-1} (b_{n-1,x} - c_{n-1}) - (b_{n-1,x} - c_{n-1}) b_{n-1}] \\
&\quad - C_{l,m-n} E_{m-1}(0, x, t_r) \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\mu_j^{-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} \\
&= \begin{cases} \sum_{k=1}^{m-n-1} C_{l,k} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(\tilde{\beta}_0 - \beta_0 \tilde{\alpha}_0) \mu_j^{n+k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} - \sum_{k=1}^n C_{l,k+m-n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\tilde{\alpha}_0 \mu_j^{2n+k}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} + C_{l,m-n}, & m = 3n + 2, \\ \sum_{k=1}^{m-n-1} C_{l,k} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\tilde{\alpha}_0 \mu_j^{n+k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} - \sum_{k=1}^n C_{l,k+m-n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\tilde{\beta}_0 \mu_j^{2n+k-1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m-1} (\mu_j - \mu_s)} + C_{l,m-n}, & m = 3n + 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\tilde{\beta}_0 - \beta_0 \tilde{\alpha}_0) C_{l,m-n-1} - \tilde{\alpha}_0 C_{l,m-1} + C_{l,m-n}, & m = 3n + 2, \\ \tilde{\alpha}_0 C_{l,m-n-1} - \tilde{\beta}_0 C_{l,m-1} + C_{l,m-n}, & m = 3n + 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

易见, 我们的假设是合理的. 事实上, 从 (2.15) 可知 $(\tilde{b}_r - \frac{1}{3}v_{t_r}, \tilde{c}_r - \frac{1}{3}u_{t_r})^T \in \ker K$ 和 $(b_{n-1}, c_{n-1})^T \in$

$\ker K$ 分别成立, 则在我们的假设下, 由算子 K 的表达式可知 $0 = (\tilde{b}_r - \frac{1}{3}v_{t_r} - b_{n-1}, \tilde{c}_r - \frac{1}{3}u_{t_r} - c_{n-1})^T \in \ker K$ 自然成立.

所有这些结论都可以由 $\rho^{(i)}(x, t_r)$, $i = 1, 2$ 的连续性与正非特殊因子在正因子空间中的稠密性, 从 $(x, t_r) \in \tilde{\Omega}_\mu$ 扩展到 $(x, t_r) \in \mathbb{C}^2$. 定理证明完毕. $\square$

为了得到 $\phi_3(P, x, t_r)$ 的 Riemann θ 函数表示, 我们引入第三类正则化 Abel 微分 $\omega_{P_\infty, \hat{\nu}_0}^{(3)}(P)$. 该微分在 $\mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_\infty, \hat{\nu}_0(x, t_r)\}$ 上全纯, 以 P_∞ 和 $\hat{\nu}_0(x, t_r)$ 为单极点, 且在 P_∞ 和 $\hat{\nu}_0(x, t_r)$ 处的留数分别是 ± 1 , 即

$$\begin{aligned}\omega_{P_\infty, \hat{\nu}_0}^{(3)}(P) &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} (\zeta^{-1} + O(1))d\zeta, & \text{当 } P \rightarrow P_\infty, \\ \omega_{P_\infty, \hat{\nu}_0}^{(3)}(P) &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} (-\zeta^{-1} + O(1))d\zeta, & \text{当 } P \rightarrow \hat{\nu}_0(x, t_r).\end{aligned}\quad (4.22)$$

从 (4.22) 积分可得

$$\begin{aligned}\int_{Q_0}^P \omega_{P_\infty, \hat{\nu}_0}^{(3)}(P) &= \ln \zeta + e^{(3)}(Q_0) + O(\zeta), & \text{当 } P \rightarrow P_\infty, \\ \int_{Q_0}^P \omega_{P_\infty, \hat{\nu}_0}^{(3)}(P) &= -\ln \zeta + e^{(3)}(Q_0) + O(\zeta), & \text{当 } P \rightarrow \hat{\nu}_0(x, t_r),\end{aligned}\quad (4.23)$$

其中 $e^{(3)}(Q_0)$ 为积分常数.

那么 $\phi_3(P, x, t_r)$ 的 Riemann θ 函数表示可以由下面的定理显式给出.

定理 4.2 假定曲线 $\mathcal{K}_{m-1}$ 非奇异, 而 $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_\infty\}$, (x, t_r) 属于某个连通开集 $\Omega_\mu \subseteq \mathbb{C}^2$, 并且, 进一步假设 $\mathcal{D}_{\hat{\mu}(x, t_r)}$ 在 $(x, t_r) \in \Omega_\mu$ 时非特殊 (或者等价地说 $\mathcal{D}_{\hat{\nu}(x, t_r)}$ 非特殊), 则

$$\begin{aligned}\phi_3(P, x, t_r) &= \frac{\theta(M^{(2)} - \mathcal{A}(P) + \rho^{(2)}(x, t_r))\theta(M^{(1)} - \mathcal{A}(P_\infty) + \rho^{(1)}(x, t_r))}{\theta(M^{(2)} - \mathcal{A}(P_\infty) + \rho^{(2)}(x, t_r))\theta(M^{(1)} - \mathcal{A}(P) + \rho^{(1)}(x, t_r))} \\ &\quad \times \exp\left(e^{(3)}(Q_0) - \int_{Q_0}^P \omega_{P_\infty, \hat{\nu}_0(x, t_r)}^{(3)}\right),\end{aligned}\quad (4.24)$$

其中 $M^{(i)}$ 为 Riemann 常向量.

证明 从 (3.38) 立即可知, ϕ_3 以 $\hat{\mu}(x, t_r)$ 和 P_∞ 为单极点, 而 $\hat{\nu}_0(x, t_r)$ 和 $\hat{\nu}(x, t_r)$ 则是它的单零点. 由 (4.23) 可知

$$\begin{aligned}\exp\left(e^{(3)}(Q_0) - \int_{Q_0}^P \omega_{P_\infty, \hat{\nu}_0}^{(3)}\right) &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \zeta^{-1} + O(1), & P \rightarrow P_\infty, \\ \exp\left(e^{(3)}(Q_0) - \int_{Q_0}^P \omega_{P_\infty, \hat{\nu}_0}^{(3)}\right) &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \zeta + O(1), & P \rightarrow \hat{\nu}_0(x, t_r).\end{aligned}\quad (4.25)$$

如果用 Φ 来定义 (4.24) 的右端项, 则由 Riemann 零化定理与 Riemann-Roch 定理^[44], 很容易知道 Φ 与 ϕ_3 具有相同的单极点和单零点. 特别地, 全纯函数 $\frac{\Phi}{\phi_3} = \gamma$, 其中 γ 为常数. 另一方面, 从 (4.25) 和 (4.2) 可知

$$\frac{\Phi}{\phi_3} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \frac{(1 + O(\zeta))(\zeta^{-1} + O(1))}{(\zeta^{-1} + O(\zeta))} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} 1 + O(\zeta), \quad \text{当 } P \rightarrow P_\infty. \quad (4.26)$$

由此可以推断出 $\gamma = 1$, 从而完成了整个证明. $\square$

从 (3.29) 中的第二个积分出发, 我们定义 $\mathcal{K}_{m-1} \times \mathbb{C}^2$ 上的亚纯函数 $I_s(P, x, t_r)$ 为

$$I_s(P, x, t_r) = \tilde{V}_{31}^{(r)}(\lambda, x, t_r)\phi_3(P, x, t_r) + \tilde{V}_{32}^{(r)}(\lambda, x, t_r)(\phi_{3,x}(P, x, t_r) + \phi_3^2(P, x, t_r)) + \tilde{V}_{33}^{(r)}(\lambda, x, t_r), \quad (4.27)$$

其相应的齐次形式 $\bar{I}_s(P, x, t_r)$ 由 $I_s(P, x, t_r)$ 把其中的 $\tilde{V}_{3j}^{(r)}$ 用它们相应的齐次形式 $\tilde{\bar{V}}_{3j}^{(r)}$ 替换而得到, 而

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{V}}_{3j}^{(r)} &= \begin{cases} \tilde{V}_{3j}^{(r)}|_{\tilde{\alpha}_0=1, \tilde{\alpha}_1=\dots=\tilde{\alpha}_r=\tilde{\beta}_0=\tilde{\beta}_1=\dots=\tilde{\beta}_r=0}, & s=3r+2, \quad j=1, 2, 3, \\ \tilde{V}_{3j}^{(r)}|_{\tilde{\beta}_0=1, \tilde{\alpha}_0=\tilde{\alpha}_1=\dots=\tilde{\alpha}_r=\tilde{\beta}_1=\dots=\tilde{\beta}_r=0}, & s=3r+1, \quad j=1, 2, 3, \end{cases} \\ \tilde{\bar{b}}^{(r)} &= \begin{cases} \tilde{b}^{(r)}|_{\tilde{\alpha}_0=1, \tilde{\alpha}_1=\dots=\tilde{\alpha}_r=\tilde{\beta}_0=\tilde{\beta}_1=\dots=\tilde{\beta}_r=0}, & s=3r+2, \\ \tilde{b}^{(r)}|_{\tilde{\beta}_0=1, \tilde{\alpha}_0=\tilde{\alpha}_1=\dots=\tilde{\alpha}_r=\tilde{\beta}_1=\dots=\tilde{\beta}_r=0}, & s=3r+1. \end{cases} \end{aligned}$$

引理 4.3 假设 $(x, t_r) \in \mathbb{C}^2$, 而 P_∞ 附近的局部坐标取为 $\lambda = \zeta^{-3}$, 则

$$\bar{I}_s(P, x, t_r) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} -\zeta^{-s} + O(\zeta), \quad P \rightarrow P_\infty, \quad (4.28)$$

其中 $s = 3r + 2$ 或者 $3r + 1, r \in \mathbb{N}_0$.

证明 由 (2.13) 和 (4.27) 可知, $\bar{I}_s(P, x, t_r)$ 可以具体表示为

$$\bar{I}_s(P, x, t_r) = (\bar{b}_x^{(r)} - \bar{c}^{(r)})\phi_3 - \bar{b}^{(r)}(\phi_{3,x} + \phi_3^2) + \bar{c}_x^{(r)} - \frac{2}{3}\bar{b}_{xx}^{(r)} + \frac{2}{3}v_x\bar{b}^{(r)}. \quad (4.29)$$

借助于 (4.2), 容易计算出前两个量分别为: $\bar{I}_1 =_{\zeta \rightarrow 0} -\zeta^{-1} + O(\zeta)$, $\bar{I}_2 =_{\zeta \rightarrow 0} -\zeta^{-2} + O(\zeta)$. 由此可知 (4.28) 当 $s = 1$ 和 $s = 2$ 时成立. 故而, 不妨设 (4.28) 对于某些系数 $\{\delta_j(x, t_r)\}_{j \in \mathbb{N}}$ 可以写成

$$\bar{I}_s(P, x, t_r) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} -\zeta^{-s} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j(x, t_r) \zeta^j, \quad \text{当 } P \rightarrow P_\infty. \quad (4.30)$$

从 (3.16) 和 (4.27), 我们发现

$$\begin{aligned} \partial_x \bar{I}_s(P, x, t_r) &= \partial_x [\tilde{\bar{V}}_{31}^{(r)}(\lambda, x, t_r) \phi_3(P, x, t_r) + \tilde{\bar{V}}_{32}^{(r)}(\lambda, x, t_r) (\phi_{3,x}(P, x, t_r) + \phi_3^2(P, x, t_r)) + \tilde{\bar{V}}_{33}^{(r)}(\lambda, x, t_r)] \\ &= \phi_{3,t_r}(P, x, t_r), \end{aligned}$$

即

$$\partial_x \left(-\zeta^{-s} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j(x, t_r) \zeta^j \right) = \partial_{t_r} \left(\zeta^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j(x, t_r) \zeta^{j-1} \right) = \partial_{t_r} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{j+1}(x, t_r) \zeta^j \right). \quad (4.31)$$

通过比较 (4.31) 中 ζ 的同次幂系数, 并利用 (4.3) 可得

$$\begin{aligned} \delta_{j,x}(x, t_r) &= \kappa_{j+1,t_r}(x, t_r), \quad j=1, 2, 3, \dots, \\ \delta_{1,x}(x, t_r) &= \kappa_{2,t_r}(x, t_r) = \left(\frac{1}{3} v_{t_r}(x, t_r) \right)_x, \\ \delta_{2,x}(x, t_r) &= \kappa_{3,t_r}(x, t_r) = \frac{1}{3} (u_x(x, t_r) - v_{xx}(x, t_r))_{t_r} = \frac{1}{3} (u_{t_r}(x, t_r) - v_{x,t_r}(x, t_r))_x, \\ \delta_{3,x}(x, t_r) &= \kappa_{4,t_r}(x, t_r) = \left(\frac{2}{9} v_{xxx}(x, t_r) - \frac{1}{3} u_{xx}(x, t_r) \right)_{t_r} = \left(\frac{2}{9} v_{xx,t_r}(x, t_r) - \frac{1}{3} u_{x,t_r}(x, t_r) \right)_x. \end{aligned} \quad (4.32)$$

关于 x 积分一次便得到

$$\begin{aligned} \delta_1(x, t_r) &= \epsilon_1(t_r) + \frac{1}{3} v_{t_r}(x, t_r), \\ \delta_2(x, t_r) &= \epsilon_2(t_r) + \frac{1}{3} (u_{t_r}(x, t_r) - v_{x,t_r}(x, t_r)), \\ \delta_3(x, t_r) &= \epsilon_3(t_r) + \frac{2}{9} v_{xx,t_r}(x, t_r) - \frac{1}{3} u_{x,t_r}(x, t_r), \end{aligned} \quad (4.33)$$

其中 $\epsilon_1(t_r), \epsilon_2(t_r), \epsilon_3(t_r)$ 是积分常数. 由 $\phi_3(P, x, t_r)$ 在 P_∞ 附近的局部坐标 ζ 表示下的幂级数的系数及 $u_{t_r}(x, t_r), v_{t_r}(x, t_r)$ 的表达式可知, 它们都是关于 $u(x, t_r), v(x, t_r)$ 及其导数的微分多项式, 不包含任意常数, 再由 $\bar{I}_s$ 的定义, 我们可以判断出 $\epsilon_1(t_r) = \epsilon_2(t_r) = \epsilon_3(t_r) = 0$. 从而有

$$\begin{aligned} \bar{I}_s(P, x, t_r) = & -\zeta^{-s} + \frac{1}{3}v_{t_r}(x, t_r)\zeta + \frac{1}{3}(u_{t_r}(x, t_r) - v_{x, t_r}(x, t_r))\zeta^2 \\ & + \left(\frac{2}{9}v_{xx, t_r}(x, t_r) - \frac{1}{3}u_{x, t_r}(x, t_r)\right)\zeta^3 + O(\zeta^4), \quad \text{当 } P \rightarrow P_\infty. \end{aligned} \quad (4.34)$$

另一方面

$$\begin{aligned} \bar{I}_{s+3}(P, x, t_r) = & (\bar{b}_x^{(r+1)} - \bar{c}^{(r+1)})\phi_3 - \bar{b}^{(r+1)}(\phi_{3,x} + \phi_3^2) + \bar{c}_x^{(r+1)} - \frac{2}{3}\bar{b}_{xx}^{(r+1)} + \frac{2}{3}v_x\bar{b}^{(r+1)} \\ \stackrel{\zeta \rightarrow 0}{=} & \zeta^{-3}\bar{I}_s + (\bar{b}_{r,x} - \bar{c}_r)\phi_3 - \bar{b}_r(\phi_{3,x} + \phi_3^2) + \bar{c}_{r,x} - \frac{2}{3}\bar{b}_{r,xx} + \frac{2}{3}v_x\bar{b}_r \\ & - \left(\bar{b}_{r,x} - \frac{1}{3}v_{x, t_r}\right)\phi_3 + \left(\bar{b}_r - \frac{1}{3}v_{t_r}\right)(\phi_{3,x} + \phi_3^2) + \left(\bar{c}_r - \frac{1}{3}u_{t_r}\right)\phi_3 \\ & - \left(\bar{c}_r - \frac{1}{3}u_{t_r}\right)_x - \frac{2}{3}v_x\left(\bar{b}_r - \frac{1}{3}v_{t_r}\right) + \frac{2}{3}\left(\bar{b}_r - \frac{1}{3}v_{t_r}\right)_{xx} \\ \stackrel{\zeta \rightarrow 0}{=} & -\zeta^{-s-3} + O(\zeta), \quad \text{当 } P \rightarrow P_\infty. \end{aligned} \quad (4.35)$$

引理证明完毕. $\square$

由 (3.1) 可知

$$I_s(P, x, t_r) = \sum_{l=0}^r \tilde{\alpha}_{r-l} \bar{I}_{3l+2}(P, x, t_r) + \sum_{l=0}^r \tilde{\beta}_{r-l} \bar{I}_{3l+1}(P, x, t_r), \quad (4.36)$$

其中 $s = 3r + 2$ 或者 $s = 3r + 1$, 则

$$\int_{t_{0,r}}^{t_r} I_s(P, x, t') dt' \stackrel{\zeta \rightarrow 0}{=} -(t_r - t_{0,r}) \sum_{l=0}^r \left(\tilde{\alpha}_{r-l} \frac{1}{\zeta^{3l+2}} + \tilde{\beta}_{r-l} \frac{1}{\zeta^{3l+1}} \right) + O(\zeta), \quad \text{当 } P \rightarrow P_\infty. \quad (4.37)$$

接下来, 我们将考虑当 $P \rightarrow P_{0j}, j = 1, 2, 3$ 时亚纯函数 $\phi_3(P, x, t_r)$ 的渐近行为. 为此, 当 $P \rightarrow P_{0j}$ 时, 我们取局部坐标为 $\lambda (\lambda \rightarrow 0)$. 由 (3.6) 可知 y 不依赖于 x, t_r , 而且它在 $\lambda \rightarrow 0$ 时的渐近表示可以通过求根公式与 Taylor 展式得到. 为了方便起见, 我们把它渐近式表示为

$$y \stackrel{\lambda \rightarrow 0}{=} y_{j0} + y_{j1}\lambda + O(\lambda^2), \quad \text{当 } P \rightarrow P_{0j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.38)$$

其中 y_{j0}, y_{j1} 是由 $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k=1}^n$ 决定的常数.

由 (3.8) 式可知

$$\phi_3(P, x, t_r) \stackrel{\lambda \rightarrow 0}{=} \chi_{j0} + O(\lambda), \quad \text{当 } P \rightarrow P_{0j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.39)$$

其中

$$\chi_{j0} = \frac{(y_{j0}V_{12}^{(n)} + C_m)|_{\lambda=0}}{(y_{j0}V_{32}^{(n)} + A_m)|_{\lambda=0}}$$

$$= \frac{-y_{j0}c_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1,xx} + \frac{2}{3}b_{n-1}\partial(\partial^2 - v_x)b_{n-1} + c_{n-1}c_{n-1,x} - \frac{2}{3}c_{n-1}(\partial^2 - v_x)b_{n-1}}{-y_{j0}b_{n-1} + c_{n-1}^2 - c_{n-1}b_{n-1,x} + \frac{1}{3}b_{n-1}(\partial^2 - v_x)b_{n-1}}.$$

另外, 通过观察 (2.14) 和 (4.27), 知道 ψ_3 还具有三个本性奇点 $P_{0j}, j = 1, 2, 3$. 下面, 我们就来研究 I_s 在这些点处的性质. 由 $y = V_{31}^{(n)}\phi_3 + V_{32}^{(n)}(\phi_{3,x} + \phi_3^2) + V_{33}^{(n)}$ 及 (4.19) 和 (4.38) 可得

$$\begin{aligned} I_s &= \left[\left(\tilde{b}_{r,x} - \frac{1}{3}v_{t_r,x} \right) \lambda^{-1} + \sum_{j=0}^r \tilde{b}_{j-1,x} \lambda^{r-j} - \left(\tilde{c}_r - \frac{1}{3}u_{t_r} \right) \lambda^{-1} - \sum_{j=0}^r \tilde{c}_{j-1} \lambda^{r-j} \right] \phi_3 \\ &\quad - \left[\left(\tilde{b}_r - \frac{1}{3}v_{t_r} \right) \lambda^{-1} + \sum_{j=0}^r \tilde{b}_{j-1} \lambda^{r-j} \right] (\phi_{3,x} + \phi_3^2) + \left(\tilde{c}_{r,x} - \frac{1}{3}u_{t_r,x} \right) \lambda^{-1} + \sum_{j=0}^r \tilde{c}_{j-1,x} \lambda^{r-j} \\ &\quad + \frac{2}{3}v_x \left[\left(\tilde{b}_r - \frac{1}{3}v_{t_r} \right) \lambda^{-1} + \sum_{j=0}^r \tilde{b}_{j-1} \lambda^{r-j} \right] - \frac{2}{3} \left[\left(\tilde{b}_r - \frac{1}{3}v_{t_r} \right) \lambda^{-1} + \sum_{j=0}^r \tilde{b}_{j-1} \lambda^{r-j} \right]_{xx} \\ &= \lambda^{-1} \left[(b_{n-1,x} - c_{n-1})\phi_3 - b_{n-1}(\phi_{3,x} + \phi_3^2) + c_{n-1,x} + \frac{2}{3}v_x b_{n-1} - \frac{2}{3}b_{n-1,xx} \right] \\ &\quad + \sum_{j=0}^r (\tilde{b}_{j-1,x} - \tilde{c}_{j-1}) \lambda^{r-j} \phi_3 - \sum_{j=0}^r \tilde{b}_{j-1} \lambda^{r-j} (\phi_{3,x} + \phi_3^2) \\ &\quad + \sum_{j=0}^r (\tilde{c}_{j-1,x} + \frac{2}{3}v_x \tilde{b}_{j-1} - \frac{2}{3}\tilde{b}_{j-1,xx}) \lambda^{r-j} \\ &= y_{j0} \lambda^{-1} + \Upsilon_j + O(\lambda), \quad \text{当 } P \rightarrow P_{0j}, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Upsilon_j &= y_{j1} + (\tilde{b}_{r-1,x} - \tilde{c}_{r-1} - b_{n-2,x} + c_{n-2})\chi_{j0} + (b_{n-2} - \tilde{b}_{r-1})(\chi_{j0,x} + \chi_{j0}^2) \\ &\quad + \tilde{c}_{r-1,x} - c_{n-2,x} + \frac{2}{3}v_x(\tilde{b}_{r-1} - b_{n-2}) - \frac{2}{3}(\tilde{b}_{r-1} - b_{n-2})_{xx}. \end{aligned}$$

由此, 易得

$$\int_{t_{0,r}}^{t_r} I_s(P, x, t') dt' = (t_r - t_{0,r}) y_{j0} \lambda^{-1} + \int_{t_{0,r}}^{t_r} \Upsilon_j dt' + O(\lambda), \quad \text{当 } P \rightarrow P_{0j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.40)$$

注 4.4 当 $r = -1$ 时, 经计算便有

$$\begin{aligned} I_s &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} -b_{n-1}\zeta + O(\zeta^2), \quad \text{当 } P \rightarrow P_\infty, \\ I_s &\underset{\lambda \rightarrow 0}{=} y_{j0} \lambda^{-1} + y_{j1} - (b_{n-2,x} - c_{n-2})\chi_{j0} + b_{n-2}(\chi_{j0,x} + \chi_{j0}^2) - c_{n-2,x} - \frac{2}{3}v_x b_{n-2} \\ &\quad + \frac{2}{3}b_{n-2,xx} + O(\lambda), \quad \text{当 } P \rightarrow P_{0j}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

这意味着, 此时 I_s 仅以 $P_{0j}, j = 1, 2, 3$ 为三个极点, 而 P_∞ 则不再是它的极点.

记 $\omega_{P_\infty, j}^{(2)} (j \in \mathbb{N}_0)$ 是 $\mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_\infty\}$ 上的第二类正则化 Abel 微分, 且以 P_∞ 为 j 阶极点,

$$\omega_{P_\infty, j}^{(2)}(P) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} (\zeta^{-j} + O(1)) d\zeta, \quad \text{当 } P \rightarrow P_\infty. \quad (4.41)$$

在此基础上, 我们再引入一个第二类正则化 Abel 微分

$$\tilde{\Omega}^{(2)} = \sum_{l=0}^r \tilde{\alpha}_{r-l}(3l+2)\omega_{P_\infty, 3l+3}^{(2)} + \sum_{l=0}^r \tilde{\beta}_{r-l}(3l+1)\omega_{P_\infty, 3l+2}^{(2)} - y_{10}\omega_{P_{01}, 2}^{(2)} - y_{20}\omega_{P_{02}, 2}^{(2)} - y_{30}\omega_{P_{03}, 2}^{(2)}. \quad (4.42)$$

对 (4.42) 进行积分可得

$$\int_{Q_0}^P \tilde{\Omega}^{(2)} = \begin{cases} -\sum_{l=0}^r \tilde{\alpha}_{r-l} \frac{1}{\zeta^{3l+2}} - \sum_{l=0}^r \tilde{\beta}_{r-l} \frac{1}{\zeta^{3l+1}} + e_{s+1}^{(2)}(Q_0) + O(\zeta), & \text{当 } P \rightarrow P_\infty, \\ y_{j0} \lambda^{-1} + e_{s+1}^{(2)}(Q_0) + O(\lambda), & \text{当 } P \rightarrow P_{0j}, \end{cases} \quad (4.43)$$

其中 $e_{s+1}^{(2)}(Q_0)$ 是一个恰当选取的积分常数. 比较 (4.37), (4.40) 和 (4.43) 可知

$$\int_{t_{0,r}}^{t_r} I_s(P, x, t') dt' = \begin{cases} (t_r - t_{0,r}) \left(\int_{Q_0}^P \tilde{\Omega}^{(2)} - e_{s+1}^{(2)}(Q_0) \right) + O(\zeta), & \text{当 } P \rightarrow P_\infty, \\ (t_r - t_{0,r}) \left(\int_{Q_0}^P \tilde{\Omega}^{(2)} - e_{s+1}^{(2)}(Q_0) \right) + \int_{t_{0,r}}^{t_r} \Upsilon_j dt' + O(\lambda), & \text{当 } P \rightarrow P_{0j}. \end{cases} \quad (4.44)$$

有了上面的准备, 我们下面将给出 $\psi_3(P, x, x_0, t_r, t_{0,r})$ 的 Riemann θ 函数表示.

定理 4.5 假定曲线 $\mathcal{K}_{m-1}$ 非奇异, 而 $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_\infty\}$, $(x, t_r), (x_0, t_{0,r})$ 属于某个连通开集 $\Omega_\mu \subseteq \mathbb{C}^2$, 并且, 进一步假设 $\mathcal{D}_{\hat{\mu}(x, t_r)}$ 在 $(x, t_r) \in \Omega_\mu$ 时非特殊 (或者等价地 $\mathcal{D}_{\hat{\mu}(x, t_r)}$ 非特殊), 则

$$\begin{aligned} \psi_3(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}) &= \frac{\theta(M^{(1)} - \mathcal{A}(P) + \rho^{(1)}(x, t_r)) \theta(M^{(1)} - \mathcal{A}(P_\infty) + \rho^{(1)}(x_0, t_{0,r}))}{\theta(M^{(1)} - \mathcal{A}(P_\infty) + \rho^{(1)}(x, t_r)) \theta(M^{(1)} - \mathcal{A}(P) + \rho^{(1)}(x_0, t_{0,r}))} \\ &\quad \times \exp \left((x - x_0) \left(\int_{Q_0}^P \omega_{P_\infty, 2}^{(2)} - e_2^{(2)}(Q_0) \right) \right. \\ &\quad \left. + (t_r - t_{0,r}) \left(\int_{Q_0}^P \tilde{\Omega}^{(2)} - e_{s+1}^{(2)}(Q_0) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

证明 首先, 假设 $\mu_j(x, t_r) \neq \mu_k(x, t_r)$, $j \neq k$ 在 (x, t_r) 属于某个连通开集 $\tilde{\Omega}_\mu \subseteq \Omega_\mu$ 时成立. 因为 ψ_3 可以表示为

$$\psi_3(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}) = \exp \left(\int_{x_0}^x \phi_3(P, x', t_r) dx' + \int_{t_{0,r}}^{t_r} I_s(P, x_0, t') dt' \right), \quad (4.46)$$

观察可知 ψ_3 的零点和极点只可能来自于被积函数的单极点. 故而, 我们对指数部分的积分进行详细讨论. 从 (3.8), (3.14), (3.23), (3.35), (3.39) 和 (3.40), 通过简单计算可知 $(P \rightarrow \hat{\mu}_j(x, t_r))$

$$\begin{aligned} \phi_3(P, x, t_r) &= \frac{y^2 V_{32}^{(n)} - y A_m + B_m}{-\varepsilon(m) E_{m-1}} \\ &= \frac{y^2 V_{32}^{(n)} - y A_m + \frac{2}{3} V_{32}^{(n)} S_m - \frac{1}{3} \varepsilon(m) E_{m-1, x}}{-\varepsilon(m) E_{m-1}} \\ &= \frac{2}{3} V_{32}^{(n)} \frac{3y^2 + S_m}{-\varepsilon(m) E_{m-1}} + \frac{1}{3} \partial_x \ln E_{m-1} + \frac{V_{32}^{(n)} y \left(y + \frac{A_m}{V_{32}^{(n)}} \right)}{\varepsilon(m) E_{m-1}} \\ &= \frac{\mu_{j,x}}{\lambda - \mu_j} + O(1), \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} I_s(P, x, t_r) &= \tilde{V}_{31}^{(r)} \phi_3 + \tilde{V}_{32}^{(r)} (\phi_{3,x} + \phi_3^2) + \tilde{V}_{33}^{(r)} \\ &= \left(\tilde{V}_{31}^{(r)} - \tilde{V}_{32}^{(r)} \frac{V_{31}^{(n)}}{V_{32}^{(n)}} \right) \phi_3 + \tilde{V}_{33}^{(r)} - \tilde{V}_{32}^{(r)} \frac{V_{33}^{(n)}}{V_{32}^{(n)}} + y \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}}{V_{32}^{(n)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\tilde{V}_{31}^{(r)} - \tilde{V}_{32}^{(r)} \frac{V_{31}^{(n)}}{V_{32}^{(n)}} \right) \left(\frac{y^2 V_{32}^{(n)} - y A_m + \frac{2}{3} S_m V_{32}^{(n)} - \frac{1}{3} \varepsilon(m) E_{m-1, x}}{-\varepsilon(m) E_{m-1}} \right) \\
&\quad + \tilde{V}_{33}^{(r)} - \tilde{V}_{32}^{(r)} \frac{V_{33}^{(n)}}{V_{32}^{(n)}} + y \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}}{V_{32}^{(n)}} \\
&= \frac{1}{3} \frac{E_{m-1, t_r}}{E_{m-1}} + \left(\tilde{V}_{31}^{(r)} - \tilde{V}_{32}^{(r)} \frac{V_{31}^{(n)}}{V_{32}^{(n)}} \right) \frac{y^2 V_{32}^{(n)} - y A_m + \frac{2}{3} S_m V_{32}^{(n)}}{-\varepsilon(m) E_{m-1}} + y \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}}{V_{32}^{(n)}} \\
&= \frac{1}{3} \frac{E_{m-1, t_r}}{E_{m-1}} + \left(\tilde{V}_{31}^{(r)} - \tilde{V}_{32}^{(r)} \frac{V_{31}^{(n)}}{V_{32}^{(n)}} \right) \left[\frac{2}{3} \frac{V_{32}^{(n)} (3y^2 + S_m)}{-\varepsilon(m) E_{m-1}} + \frac{y V_{32}^{(n)} (y + \frac{A_m}{V_{32}^{(n)}})}{\varepsilon(m) E_{m-1}} \right] + y \frac{\tilde{V}_{32}^{(r)}}{V_{32}^{(n)}} \\
&\stackrel{\lambda \rightarrow \mu_j(x, t_r)}{=} -\frac{\mu_{j, t_r}}{\lambda - \mu_j} + O(1).
\end{aligned}$$

更确切地, 上式可以表示为

$$\begin{aligned}
\phi_3(P, x', t_r) &= \partial_{x'} \ln(\lambda - \mu_j(x', t_r)) + O(1), \quad \text{当 } P \rightarrow \hat{\mu}_j(x', t_r), \\
I_s(P, x_0, t') &= \partial_{t'} \ln(\lambda - \mu_j(x_0, t')) + O(1), \quad \text{当 } P \rightarrow \hat{\mu}_j(x_0, t').
\end{aligned} \tag{4.47}$$

从而就有

$$\begin{aligned}
\psi_3(P, x, x_0, t_r, t_{0,r}) &= \exp \left(\int_{x_0}^x [\partial_{x'} \ln(\lambda - \mu_j(x', t_r)) + O(1)] dx' \right) \\
&\quad \times \exp \left(\int_{t_{0,r}}^{t_r} [\partial_{t'} \ln(\lambda - \mu_j(x_0, t')) + O(1)] dt' \right) \\
&= \frac{\lambda - \mu_j(x, t_r)}{\lambda - \mu_j(x_0, t_r)} \cdot \frac{\lambda - \mu_j(x_0, t_r)}{\lambda - \mu_j(x_0, t_{0,r})} O(1) \\
&= \frac{\lambda - \mu_j(x, t_r)}{\lambda - \mu_j(x_0, t_{0,r})} O(1) \\
&= \begin{cases} (\lambda - \mu_j(x, t_r)) O(1), & \text{当 } P \text{ 在 } \hat{\mu}_j(x, t_r) \neq \hat{\mu}_j(x_0, t_{0,r}) \text{ 附近,} \\ O(1), & \text{当 } P \text{ 在 } \hat{\mu}_j(x, t_r) = \hat{\mu}_j(x_0, t_{0,r}) \text{ 附近,} \\ (\lambda - \mu_j(x_0, t_{0,r}))^{-1} O(1), & \text{当 } P \text{ 在 } \hat{\mu}_j(x_0, t_{0,r}) \neq \hat{\mu}_j(x, t_r) \text{ 附近,} \end{cases} \tag{4.48}
\end{aligned}$$

其中 $O(1) \neq 0$. 记 (4.45) 的右端为 $\Psi(P, x, x_0, t_r, t_{0,r})$, 则易知 ψ_3 和 Ψ 在 $\mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_\infty, P_{01}, P_{02}, P_{03}\}$ 上的所有零点和极点都是单重的且相一致. 下面来说明它们在本性奇点 P_∞ 和 $\{P_{0j}\}_{j=1}^3$ 处的奇性相同. 从 (4.2) 和 (4.17) 可得

$$\int_{x_0}^x \phi_3(P, x', t_r) dx' \stackrel{\zeta \rightarrow 0}{=} (x - x_0) \left(\int_{Q_0}^P \omega_{P_\infty, 2}^{(2)}(P) - e_2^{(2)}(Q_0) \right) + O(\zeta),$$

再结合 (4.44), 便知 ψ_3 和 Ψ 在 P_∞ 和 $\{P_{0j}\}_{j=1}^3$ 处的本性奇性是一致的. 从而, 由 ψ_3 和 Ψ 具有相同的奇点和零点, 以及 Baker-Akhiezer 函数的唯一性可知 $\Psi = \psi_3$. 借助于 $\rho^{(1)}$ 的连续性与 $\mathcal{D}_{\hat{\mu}(x, t_r)}$ 在 $(x, t_r) \in \Omega_\mu$ 时非特殊的假设, 可以把上述结论从 $(x, t_r) \in \tilde{\Omega}_\mu$ 推广至 $(x, t_r) \in \Omega_\mu$.

注 4.6 当 $r = -1$ 时, (4.45) 中的 $\tilde{\Omega}^{(2)}$ 应该是下面的形式,

$$\tilde{\Omega}^{(2)} = -y_{10} \omega_{P_{01}, 2}^{(2)} - y_{20} \omega_{P_{02}, 2}^{(2)} - y_{30} \omega_{P_{03}, 2}^{(2)}.$$

有了上面的准备与结论, 我们不难得到如下形式的混合 Boussinesq 方程的解的 Riemann θ 函数表示.

定理 4.7 假定曲线 $\mathcal{K}_{m-1}$ 非奇异, 而 (x, t_r) 属于某个连通开集 $\Omega_\mu \subseteq \mathbb{C}^2$, 并且, 进一步假设 $\mathcal{D}_{\hat{\mu}(x, t_r)}$ 在 $(x, t_r) \in \Omega_\mu$ 时非特殊 (或者等价地 $\mathcal{D}_{\hat{\nu}(x, t_r)}$ 非特殊), 则混合 Boussinesq 方程具有如下形式的有限亏格解,

$$\begin{aligned} u(x, t_r) &= -\frac{3}{2} \partial_x^2 \ln(\theta(M^{(1)} - \mathcal{A}(P_\infty) + \rho^{(1)}(x, t_r))) \\ &\quad - 3 \partial_{U_3^{(2)}} \ln(\theta(M^{(1)} - \mathcal{A}(P_\infty) + \rho^{(1)}(x, t_r))) + 3q_2 x + c'_1, \\ v(x, t_r) &= -3 \partial_x \ln(\theta(M^{(1)} - \mathcal{A}(P_\infty) + \rho^{(1)}(x, t_r))) + 3q_1 x + c'_2, \end{aligned} \quad (4.49)$$

其中 q_1, q_2 为 (4.18) 中定义的常数, 而 c'_1, c'_2 为任意常数, 同时 $\partial_{U_3^{(2)}}$ 表示方向导数, 具体定义为 $\partial_{U_3^{(2)}} = \sum_{j=1}^{m-1} U_{3,j}^{(2)} \frac{\partial}{\partial w_j}$, 这里的 w_j 代表 θ 函数的第 j 个分量.

证明 由定理 4.5 可知, 我们可以把 ψ_3 在 P_∞ 附近关于局部坐标 ζ 展成下面的形式:

$$\begin{aligned} \psi_3(P, x, t_r, x_0, t_{0,r}) &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} (1 + \sigma_1(x, t_r)\zeta + \sigma_2(x, t_r)\zeta^2 + O(\zeta^3)) \\ &\quad \times \exp \left((x - x_0)[\zeta^{-1} + q_1\zeta + q_2\zeta^2 + O(\zeta^3)] \right. \\ &\quad \left. - (t_r - t_{0,r}) \left(\sum_{l=0}^r \tilde{\alpha}_{r-l} \frac{1}{\zeta^{3l+2}} + \sum_{l=0}^r \tilde{\beta}_{r-l} \frac{1}{\zeta^{3l+1}} + O(\zeta) \right) \right), \quad P \rightarrow P_\infty, \end{aligned} \quad (4.50)$$

其中 $\sigma_1(x, t_r)$ 和 $\sigma_2(x, t_r)$ 为 (4.45) 中 θ 函数的比值在 P_∞ 附近的 Taylor 展式的系数. 由于

$$\begin{aligned} &\frac{\theta(M^{(1)} - \mathcal{A}(P) + \rho^{(1)}(x, t_r))}{\theta(M^{(1)} - \mathcal{A}(P_\infty) + \rho^{(1)}(x, t_r))} \\ &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} 1 - \partial_x \ln \theta_0 \zeta + \left[\frac{1}{2} \partial_x^2 \ln \theta_0 + \frac{1}{2} (\partial_x \ln \theta_0)^2 - \partial_{U_3^{(2)}} \ln \theta_0 \right] \zeta^2 + O(\zeta^3), \end{aligned} \quad (4.51)$$

其中 $\theta_0 = \theta(M^{(1)} - \mathcal{A}(P_\infty) + \rho^{(1)}(x, t_r))$, 则

$$\sigma_{1,x}(x, t_r) = -\partial_x^2 \ln \theta_0, \quad \sigma_1(x, t_r) \sigma_{1,x}(x, t_r) - \sigma_{2,x}(x, t_r) - \frac{1}{2} \sigma_{1,xx}(x, t_r) = \partial_x \partial_{U_3^{(2)}} \ln \theta_0. \quad (4.52)$$

如果令

$$\psi_3 \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} (1 + \sigma_1(x, t_r)\zeta + \sigma_2(x, t_r)\zeta^2 + O(\zeta^3)) \exp(\Delta), \quad P \rightarrow P_\infty,$$

其中

$$\Delta = (x - x_0)[\zeta^{-1} + q_1\zeta + q_2\zeta^2 + O(\zeta^3)] - (t_r - t_{0,r}) \sum_{l=0}^r \left(\tilde{\alpha}_{r-l} \frac{1}{\zeta^{3l+2}} + \tilde{\beta}_{r-l} \frac{1}{\zeta^{3l+1}} \right) + O(\zeta),$$

则

$$\begin{aligned} \psi_{3,x} &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} [\zeta^{-1} + \sigma_1 + (\sigma_{1,x} + q_1 + \sigma_2)\zeta + O(\zeta^2)] \exp(\Delta), \\ \psi_{3,xx} &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} [\zeta^{-2} + \sigma_1\zeta^{-1} + (2\sigma_{1,x} + 2q_1 + \sigma_2) + (\sigma_{1,xx} + 2\sigma_{2,x} + 2\sigma_1q_1 + 2q_2 + \sigma_3)\zeta \\ &\quad + O(\zeta^2)] \exp(\Delta), \\ \psi_{3,xxx} &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} [\zeta^{-3} + \sigma_1\zeta^{-2} + (3\sigma_{1,x} + 3q_1 + \sigma_2)\zeta^{-1} + (3\sigma_{1,xx} + 3\sigma_{2,x} + 3q_2 + 3q_1\sigma_1 \\ &\quad + \sigma_3) + O(\zeta)] \exp(\Delta), \quad P \rightarrow P_\infty. \end{aligned} \quad (4.53)$$

在谱问题 (2.1) 中消去 ψ_1 和 ψ_2 便有

$$\psi_{3,xxx} = v_x(x, t_r)\psi_{3,x} + \zeta^{-3}\psi_3 + u_x(x, t_r)\psi_3. \quad (4.54)$$

把 (4.53) 代入 (4.54), 然后, 比较 ζ^{-1} 项的系数可得

$$u_x(x, t_r) = 3(\sigma_{1,xx} + \sigma_{2,x} - \sigma_1\sigma_{1,x} + q_2), \quad v_x(x, t_r) = 3(\sigma_{1,x} + q_1), \quad (4.55)$$

再把 (4.52) 代入 (4.55), 就可以得到 (4.49). $\square$

致谢 作者对审稿人的宝贵建议深表感谢.

参考文献

- 1 Boussinesq J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J Math Pure Appl*, 1872, 17: 55–108
- 2 Airault H. Solutions of the Boussinesq equation. *Physica D*, 1986, 21: 171–176
- 3 Airault H, McKean H P, Moser J. Rational and elliptic solutions of the Korteweg-de Vries equation and a related many-body problem. *Comm Pure Appl Math*, 1977, 30: 95–148
- 4 McKean H P. Boussinesq's equation on the circle. *Comm Pure Appl Math*, 1981, 34: 599–691
- 5 Deift P, Tomei C, Trubowitz E. Inverse scattering and the Boussinesq equation. *Comm Pure Appl Math*, 1982, 35: 567–628
- 6 Beals R, Deift P, Tomei C. *Direct and Inverse Scattering on the Line*. Providence RI: Amer Math Soc, 1988
- 7 Dubrovin B A. Theta functions and nonlinear equations. *Russ Math Surv*, 1981, 36: 11–92
- 8 Matveev V B, Smirnov A O. On the Riemann theta function of a trigonal curve and solutions of the Boussinesq and KP equations. *Lett Math Phys*, 1987, 14: 25–31
- 9 Matveev V B, Smirnov A O. Simplest trigonal solutions of the Boussinesq and Kadomtsev-Petviashvili equations. *Sov Phys Dokl*, 1987, 32: 202–204
- 10 Matveev V B, Smirnov A O. Symmetric reductions of the Riemann theta function and some of their applications to the Schrödinger and Boussinesq equations. *Amer Math Soc Transl*, 1993, 157: 227–237
- 11 Previato E. The Calogero-Moser-Krichever system and elliptic Boussinesq solitons. In: Harnad J, Marsden J E, eds. *Hamiltonian Systems, Transformation Groups and Spectral Transform Methods*. Montreal: CRM, 1990, 57–67
- 12 Previato E. Monodromy of Boussinesq elliptic operators. *Acta Appl Math*, 1994, 36: 49–55
- 13 Previato E, Verdier J L. Boussinesq elliptic solitons: the cyclic case. In: Ramanan S, Beauville A, eds. *Proc Indo-French Conf on Geometry*. Delhi: Hindustan Book Agency, 1993, 173–185
- 14 Smirnov A O. A matrix analogue of Appell's theorem and reductions of multidimensional Riemann theta-functions. *Math USSR Sbornik*, 1988, 61: 379–388
- 15 Smirnov A O. On a class of elliptic solutions of the Boussinesq equations. *Theor Math Phys*, 1996, 109: 1515–1522
- 16 Dickson R, Gesztesy F, Unterkofler K. Algebro-geometric solutions of the Boussinesq hierarchy. *Rev Math Phys*, 1999, 11: 823–879
- 17 Geng X G, Wu L H, He G L. Algebro-geometric constructions of the modified Boussinesq flows and quasi-periodic solutions. *Physica D*, 2011, 240: 1262–1288
- 18 Krichever I M. Algebro-geometric construction of the Zaharov-Shabat equations and their periodic solutions. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1976, 227: 291–294
- 19 Krichever I M. Integration of nonlinear equations by the methods of algebraic geometry. *Funct Anal Appl*, 1977, 11: 12–26
- 20 Belokolos E D, Bobenko A I, Enolskii V Z, et al. *Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*. Berlin: Springer, 1994
- 21 Date E, Tanaka S. Periodic multi-soliton solutions of Korteweg-de Vries equation and Toda lattice. *Prog Theor Phys Suppl*, 1976, 59: 107–125
- 22 Ma Y C, Ablowitz M J. The periodic cubic Schrödinger equation. *Stud Appl Math*, 1981, 65: 113–158
- 23 Smirnov A O. Real finite-gap regular solutions of the Kaup-Boussinesq equation. *Theor Math Phys*, 1986, 66: 19–31

- 24 Gesztesy F, Ratneseelan R. An alternative approach to algebro-geometric solutions of the AKNS hierarchy. *Rev Math Phys*, 1998, 10: 345–391
- 25 Gesztesy F, Holden H. A combined sine-Gordon and modified Korteweg-de Vries hierarchy and its algebro-geometric solutions. In: *Differential Equations and Mathematical Physics*. Birmingham: AL, 1999, 133–173
- 26 Gesztesy F, Holden H. *Soliton Equations and Their Algebro-Geometric Solutions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003
- 27 Cao C W, Wu Y T, Geng X G. Relation between the Kadomtsev-Petviashvili equation and the Confocal involutive system. *J Math Phys*, 1999, 40: 3948–3970
- 28 Geng X G, Cao C W. Decomposition of the (2+1)-dimensional Gardner equation and its quasi-periodic solutions. *Nonlinearity*, 2001, 14: 1433–1452
- 29 Geng X G, Dai H H, Zhu J Y. Decomposition of the discrete Ablowitz-Ladik hierarchy. *Stud Appl Math*, 2007, 118: 281–312
- 30 陈登远, 张大军, 毕金铎, 等. AKNS 方程的新双 Wronski 解. *中国科学 A 辑*, 2007, 37: 1335–1348
- 31 罗琳, 范恩贵. 离散可积耦合系统零曲率方程的代数结构及其对耦合 Volterra 系统的应用. *中国科学 A 辑*, 2008, 38: 859–870
- 32 刘少伟, 程艺, 贺劲松. 离散 KP 系列的规范变换的行列式表示. *中国科学: 数学*, 2010, 40: 319–330
- 33 丁建, 徐君祥, 张福保. 非周期 Dirac 方程的稳态解. *中国科学: 数学*, 2011, 41: 517–534
- 34 Brezhnev Y V. Finite-band potentials with trigonal curves. *Theor Math Phys*, 2002, 133: 1657–1662
- 35 Eilbeck J C, Enolskii V Z, Matsutani S, et al. Abelian functions for purely trigonal curves of genus three. *Int Math Res Not*, 2008: rnm140
- 36 Ōnishi Y. Abelian functions for trigonal curves of degree four and determinantal formulae in purely trigonal case. *Int J Math*, 2009, 20: 427–441
- 37 Karasu-Kalkanlı A, Karasu A, Sakovich A, et al. A new integrable generalization of the Korteweg-de Vries equation. *J Math Phys*, 2008, 49: 073516
- 38 Kupershmidt B A. KdV6: An integrable system. *Phys Lett A*, 2008, 372: 2634–2639
- 39 Zhou R G. Mixed hierarchy of soliton equations. *J Math Phys*, 2009, 50: 123502
- 40 Xia B Q, Zhou R G. Conservation laws and symmetries for a nonholonomic deformed Volterra equation. *J Phys A Math Theor*, 2011, 44: 315203
- 41 Geng X G, Xue B. Quasi-periodic solutions of mixed AKNS equations. *Nonlinear Anal*, 2010, 73: 3662–3674
- 42 Geng X G, Xue B. Soliton solutions and quasiperiodic solutions of modified Korteweg-de Vries type equations. *J Math Phys*, 2010, 51: 063516
- 43 Kersten P, Krasilshchik I, Verbovetsky A, et al. Integrability of Kupershmidt deformations. *Acta Appl Math*, 2010, 109: 75–86
- 44 Griffiths P, Harris J. *Principles of Algebraic Geometry*. New York: Wiley, 1994
- 45 Mumford D. *Tata Lectures on Theta II*. Boston: Birkhäuser, 1984

Finite genus solutions to the mixed Boussinesq equation

HE GuoLiang, WU LiHua & GENG XianGuo

Abstract The mixed Boussinesq hierarchy associated with a 3×3 matrix spectral problem is proposed in view of Lenard recursion equations and the stationary zero-curvature equation. A trigonal curve $\mathcal{K}_{m-1}$ is introduced with the help of the characteristic polynomial of the Lax matrix, from which we construct closely related Baker-Akhiezer function, the meromorphic function and Dubrovin-type equations. Moreover, the flows are straighten out under the Abel map. Based on the basic knowledge of the trigonal curves and three kinds of Abelian differential forms, the Riemann θ function representations of the Baker-Akhiezer function, the meromorphic function, and in particular, that of finite genus solutions for the mixed Boussinesq equation are obtained.

Keywords mixed Boussinesq hierarchy, trigonal curve, finite genus solutions

MSC(2010) 35Q51, 35C99, 37K10

doi: 10.1360/012011-848