

引力场能量密度的恒正性问题

胡 宁

(北京大学物理系)

摘 要

本文讨论了引力场能量密度恒正性问题,在线性近似下,静止引力场的能量密度是恒负的。我们认为一切物质场都必须具有恒正的能量密度。对非线性理论的席瓦兹场,我们的分析指出可以找到一个新的能量动量赝张量密度,给出恒正的能量密度。对于自由引力波,能量密度恒正条件要求只有横振的引力波存在。在计算中不需要考虑坐标条件。

—

近代电磁理论承认电磁场是物质的一种形式。它传递着带电物体之间的作用,并且可以电磁波的形式脱离带电物质而单独存在。带电物体间的电磁作用和星体之间的引力作用的相似性早就为人们所注意。人们很自然的认为传递引力作用的引力场也和电磁场一样是物质的一种新的形式。引力场满足爱因斯坦的引力场方程,正象电磁场满足麦克斯韦方程一样。但是很多年来在引力场是否具有物质性这个问题上存在着很多不同意见¹⁾。这就牵涉到引力波是否存在的问题。如果人们能够在实验上证明引力波确实是存在的,那将是对引力场的物质性的一个有力的肯定。

本文讨论了引力场能量密度的恒正性问题。如果承认引力场是一种形式的物质,那就必须要求在引力场中的能量密度恒取正值。负能量密度相应于负质量密度,自然界迄今尚未发现质量为负的物质。一般说,如果能量密度可取负值,在一些特别的情况里人们将可以使能量不断下降到更负的值而无限的取得能量,这将构成一个第二种的恒动机。对于电磁场,这个能量密度恒正是满足的。但是下面将看到对于迄今所有给出的引力场能量密度的表达式,这个要求并没有被满足。

在场论中能量动量张量密度在空间中怎样分布的问题,一般不能给出确定的答案。例如,对于电磁场人们总可以在已给出的能量动量张量密度上加上一个散度为零的张量,而得到完全相同的总能量和总动量。对于引力场这种不确定的因素更多。本文的分析指出,可以找到引力场能量动量张量密度的一些新的表达式,使得上述能量密度恒正的要求得到实际上的满足。这将给引力场的物质性提供一个新的论点。

本文 1976 年 1 月 16 日收到。

1) 在本文中“引力场的物质性”指的是引力场是和电磁场一样的物质场而不仅仅是时空的几何属性。

在有引力场存在的时空中, 选取坐标系使得在时空的某一固定点 P 上所有 $g_{\alpha\beta}$ 的一级微商都等于零, 并且 $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. 这个坐标代表在 P 点的区域性劳伦兹坐标. 这样在 P 点的时空曲率张量 $R^{\alpha\beta}$ 中, 所有 $g_{\alpha\beta, \lambda}$ 和 $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ 都等于零. 我们得

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\lambda\sigma} \{g_{\lambda\nu, \mu\sigma} + g_{\mu\sigma, \lambda\nu} - g_{\lambda\sigma, \mu\nu} - g_{\mu\nu, \lambda\sigma}\}, \quad (1)$$

其中 $g_{\lambda\nu, \mu\sigma} \equiv \partial^2 g_{\lambda\nu} / \partial x^\mu \partial x^\sigma$, 等等. (1) 式又可写为:

$$R^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\beta\sigma}{}_{, \mu\sigma} - \frac{1}{2} g^{\beta\nu} g^{\lambda\alpha}{}_{, \lambda\nu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \frac{1}{g} g_{, \mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} g^{\alpha\beta}{}_{, \lambda\sigma}. \quad (2)$$

由此, 又得

$$R \equiv g_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = -g^{\mu\sigma}{}_{, \mu\sigma} + g^{\lambda\sigma} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}{}_{, \lambda\sigma}. \quad (3)$$

利用上面结果, 爱因斯坦张量 $G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R$ 可写为:

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^{\alpha\beta\sigma}{}_{, \sigma}, \quad (4)$$

式中

$$h^{\alpha\beta\sigma} = g^{-1} (g g^{\alpha\beta} g^{\lambda\sigma} - g g^{\alpha\sigma} g^{\lambda\beta}), \quad (5)$$

上式左边的指标 β, σ 下面的折线表示 $h^{\alpha\beta\sigma}$ 对 β, σ 是反对称的. 利用这个反对称性, 立刻得到:

$$h^{\alpha\beta\sigma}{}_{, \sigma\beta} = -h^{\alpha\beta\sigma}{}_{, \beta\sigma} = 0. \quad (6)$$

命 $T^{\alpha\beta}$ 代表不包括自由引力场在内的所有物质的能量动量张量, 由引力场方程:

$$G^{\alpha\beta} = K T^{\alpha\beta}, \quad K = 8\pi k / c^4, \quad (7)$$

$$k = \text{引力常数} = 6.670 \times 10^{-8} \text{ 厘米}^3 \cdot \text{克}^{-1} \cdot \text{秒}^{-2}.$$

我们得到

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2K} h^{\alpha\beta\sigma}{}_{, \sigma}. \quad (8)$$

代入 (6) 式, 得

$$T^{\alpha\beta}{}_{, \beta} = 0. \quad (9)$$

上式正是没有引力场存在时物质所满足的能量动量守恒定律. 在 (9) 式中所以不出现引力场的能量动量张量, 是因为在 P 点已经选取了区域性劳伦兹坐标. 当通过坐标变换反回到原来的坐标时, 因为 $g_{\alpha\beta, \lambda}$ 不再为零, 等式 (8) 不再成立. 我们可以引入由下式定义的 $t^{\alpha\beta}$:

$$t^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2K} \frac{1}{(-g)^n} [(-g)^n h^{\alpha\beta\sigma}{}_{, \sigma}], \quad (10)$$

n 代表一个任意的数. 当重新变换到上述区域性劳伦兹坐标中时, 由于 $g_{\alpha\beta, \lambda} = 0$, 上式方括号中的 $(-g)^n$ 可以拿出括号外和 $(-g)^{-n}$ 相抵消. 和 (8) 式比较, 立刻看到在区域性劳伦兹坐标中 $t^{\alpha\beta} = 0$. 因此 $t^{\alpha\beta}$ 可以看作是引力场的能量动量张量密度, 因为 $t^{\alpha\beta}$ 不是一个在任意坐标变换下的张量密度. 利用 (6) 式立刻得到

$$[(t^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta})(-g)^n]_{, \beta} = 0, \quad (11)$$

上式表示由下式定义的总能量动量张量密度,

$$\tau^{(n)\alpha\beta} = (t^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta})(-g)^n \quad (12)$$

是守恒的.

$t^{\alpha\beta}$ 不是一个真正的张量密度这一事实, 正反映着引力场的这一特点: 在时空的任一小区内存在的引力可以通过坐标变换完全消除掉。

由 (12), (10) 和 (5) 式得:

$$\tau^{(n)\alpha\beta} = \frac{c^4}{16\pi k} [(-g)^{n-1}(-gg^{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma} + gg^{\alpha\sigma}g^{\beta\lambda}),_{,\lambda}]_{,\sigma}. \quad (13)$$

如果取 $n = 1/2$, 上式变为:

$$\tau^{(\frac{1}{2})\alpha\beta} = \frac{c^4}{16\pi k} \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} (-gg^{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma} + gg^{\alpha\sigma}g^{\beta\lambda}),_{,\lambda} \right]_{,\sigma}. \quad (14)$$

这正是最早由爱因斯坦给出的总能量动量张量密度的表达式。很多人认为上式是合理的形式。因为相应的 (12) 式右边出现的因子 $(-g)^{1/2}$ 是一个张量密度所应有的因子。我们认为在任意坐标变换下, $\tau^{(n)\alpha\beta}$ 根本不是一个张量密度。在劳伦兹变换下 $\tau^{(n)\alpha\beta}$ 的确是一个张量密度, 但这时 $-g$ 是一个常数, 因此并没有实质上的理由选取 $n = 1/2$ 。

如果取 $n = 1$, (13) 式变为朗道-栗弗席兹表达式^[1]:

$$\tau^{(1)\alpha\beta} = \frac{c^4}{16\pi k} [-gg^{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma} + gg^{\alpha\sigma}g^{\beta\lambda}],_{,\sigma\lambda}, \quad (15)$$

上式具有对 α, β 对称的特点, 这个特点导致引力场的角动量守恒定律, 因此有些人认为 (15) 式是优越的形式。应该指出, 广义相对论是以区域性的场量为基础的。角动量密度 $p_i x_j - p_j x_i$ 并不是一个区域性的场量, 因它与坐标 x_i 有关; 因此在弯曲空间内没有严格的意义。在对引力场方程作线性近似以后, 仍能给出角动量守恒定律。这说明角动量只是线性理论, 即平直时空中的概念。在平直时空中, 在坐标平移和旋转下的不变性分别导致动量和角动量守恒条件。在广义相对论中, 四个广义坐标变换只导致 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, 根本没有角动量的地位。象角动量这样基本概念, 如果只靠指标的偶然的对称性引入, 是没有说服力的。在广义相对论里, 不能很好的引入角动量概念, 若不是理论本身的重大缺陷, 便是这个平直时空中的概念, 无法推广到弯曲时空中来。我们认为能量恒正的条件比角动量守恒条件要重要得多。在下面两节我们将分别考虑恒定引力场和平面引力波的能量密度的恒正问题。

二

现在利用上节结果, 计算一个孤立静止的星体的 Schwarzschild 引力场的能量密度。在“直角坐标” x_i 中, 这个引力场的度规由下式给出:

$$-ds^2 = -\frac{(1-\varphi)^2}{(1+\varphi)^2} dx_0^2 + (1+\varphi)^4(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2),$$

$$\varphi = \frac{kM}{2c^2 r}. \quad (16)$$

由 (16) 式得:

$$\begin{aligned} g^{lm} &= \delta_{lm}(1+\varphi)^{-4}, \\ g^{00} &= (g_{00})^{-1} = -(1-\varphi)^{-2}(1+\varphi)^2, \\ g^{0l} &= g_{0l} = 0, \\ g &= g_{00}g_{11}g_{22}g_{33} = -(1-\varphi)^2(1+\varphi)^{10} \\ &\quad (n, l = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (16a)$$

由 (13) 式得:

$$\tau^{(n)00} = \frac{c^4}{16\pi k} [(-g)^{n-1}(-gg^{00}g^{lm})_{,m}]_{,l}. \quad (17)$$

对整个空间进行积分得总能量 P^0 为:

$$P^0 = \frac{c^4}{16\pi k} \int [(-g)^{n-1}(-gg^{00}g^{lm})_{,m}]_{,l} d^3x. \quad (18)$$

利用高斯定理立刻给出:

$$P^0 = \frac{c^4}{16\pi k} \int (-g)^{n-1}(-gg^{00}g^{lm})_{,m} dS_l,$$

式中积分是在包含着整个空间的无穷大球面上的积分。在求积分值时只需要 r 很大时被积函数的值,由 (16a) 式得:

$$(-g)^{n-1} \sim 1, (-gg^{00}g^{lm})_{,m} \sim -\frac{\partial}{\partial x^l} \frac{4kM}{c^2 r},$$

于是

$$P^0 = -\frac{c^4}{16\pi k} \int \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{4kM}{c^2 r} \right) dS_l = M c^2. \quad (19)$$

我们注意到上面结果与 n 无关。这是很满意的。它表明不同的 n 只可能代表能量 $M c^2$ 在整个空间中不同的分布方式。

将 (16a) 式代入 (13) 和 (14) 式分别得出:

$$\tau^{(\frac{1}{2})00} = \frac{c^4}{2\pi k} \{-2 - (1+\varphi)(1-\varphi)^{-1}\}(1+\varphi)(1-\varphi)^{-1}\varphi_{,m}\varphi_{,m}, \quad (20)$$

$$\tau^{(1)00} = -\frac{7c^4}{2\pi k} (1+\varphi)^6 \varphi_{,m}\varphi_{,m}. \quad (21)$$

(20) 和 (21) 式都说明在自由空间中(更确切的说在 Schwarzschild 半径外边;但实际上对于很多星体来说,这个半径都比星体的半径小),引力场的能量密度都是负的。如果认为星体间超距的引力作用是通过它们之间的一种物质场传递的,那么按照 (20) 和 (21) 式,这种物质场必须具有负的能量或质量密度。对于相应的静电场这种负的能量密度并不出现。除现在所考虑的情况外,在所有物理现象中都没有容许引入负能量或负质量的概念。

上述静电场和静引力场的差别是可以理解的。一个电荷的静电场能量可以理解为把分散在无穷远的电荷元素集中在一起所作的功。由于相同电荷之间的力是排斥力,所作的功是正的。这说明为什么一个电荷的静电场能量密度是正的。在静引力场的情况里,由于质量元素间的力永远是吸引力,把分散在无穷远的质量元素集中在一起所作的功是负的,因此可以设想引力场的能量密度应该是负的。对于线性的引力理论,上述负能困难看来是不能避免的。但是在广义相对论里,作为引力场源的 T^{00} 和惯性质量有着密切的联系,这使得现在的理论仍能避免负能困难。

P^0 作为 $\tau^{(n)00}$ 的空间积分代表整个系统(星体 + 引力场)的惯性质量,而 (19) 式右边的 $M c^2$ 代表在 φ 中出现的引力质量(即引力荷)。所以 (19) 式表明惯性质量等于引力质量。但二者在空间有不同的分布,由 T^{00} 所代表的引力质量密度只在星体内部不为零,而由 $\tau^{(n)00}$ 所代表的整个系统的惯性质量,则分布于整个空间。当人们承认引力场也是物质的一种形式以后,这是必然的解释:即在星体外的引力场也必须具有惯性质量。按照引力场方程,只有星体才是

引力场的源,因此只在星体内部引力质量才不为零.

Schwarzschild 引力场的 $\tau^{(n)00}$ 由下式给出:

$$\tau^{(n)00} = \frac{c^4}{2\pi k} [(-8n+1) + (12n-5)\varphi](1-\varphi)^{2n-3}(1+\varphi)^{10n-4}\varphi_{,m}\varphi_{,m}. \quad (22)$$

当 r 很大时,上式可近似地写为:

$$\tau^{(n)00} = \frac{c^4}{2\pi k} (-8n+1)\varphi_{,m}\varphi_{,m}. \quad (23)$$

当 $n < 1/8$ 时, $\tau^{(n)00} > 0$. 从 (22) 式看到, 当 $n = 0$ 时, 在 r 满足 $(1-5\varphi) = 0$ 的球面以外区域中 $\tau^{(n)00}$ 恒取正值. 当 $n = -10$ 时, 上述区域的内界即缩小到 $(1-1.54\varphi) = 0$. 当 $n \rightarrow -\infty$ 时, 上述内界趋于 $(1 - \frac{3}{2}\varphi) = 0$. 所以对于所有的 n 值这个内界都在 Schwarzschild 半径的外边. 对于通常的星体, 这个内界都处于星体的内部, 在这些星体外面 $\tau^{(n)00}$ 将是恒正的. 在星体内部, (22) 式右边必须加上含 T^{00} 的项. 这项将恒为正, 而且代表惯性质量最主要的部分, 加上这一项后, 在星体内部 $\tau^{(n)00}$ 仍是恒正的.

广义相对论曾预言当星体半径小于 Schwarzschild 半径时, 将会出现“黑洞”. 在这个情况下, 上述恒正条件在黑洞外边附近将不被满足. 但按照预言, 在黑洞附近已经出现很多反常的现象, 上述能量不恒正的困难, 已经不那么突出了, 一个合理的见解是广义相对论在这个区域内可能要作重要的修正.

以上的结果指出, 在引力场中能量的分布有很大的不确定性. 有些分布, 其中包括人们通常所接受的分布, 导致负的能量密度. 当 n 取充分大的负值时, (22) 式实际上可以满足能量密度恒正条件. 我们注意到如果把 (17) 式中的 $(-g)^{n-1}$ 换成 g 的任意函数 $f(g)$, 结果仍能给出一个满足守恒条件的能量分布.

三

在这一节里我们将考虑自由引力波的能量密度恒正问题. 为简单起见, 以下只考虑振幅很小的平面波. 取 x^3 为平面波前进的方向, $g_{\mu\nu}$ 将只是 x^3 和 $x^0 = ct$ 的函数. 无源的引力场方程可写为:

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma}\{g_{\lambda\nu,\mu\sigma} + g_{\mu\sigma,\lambda\nu} - g_{\lambda\sigma,\mu\nu} - g_{\mu\nu,\lambda\sigma}\} + g^{\lambda\sigma}g^{\alpha\beta}\{\Gamma_{\sigma\nu\lambda}\Gamma_{\mu\nu\beta} - \Gamma_{\sigma\lambda\alpha}\Gamma_{\mu\nu\beta}\} = 0. \quad (24)$$

由于四恒等式的存在, 上式中的 $g_{\mu\nu}$ 不都是独立的. 引入

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (25)$$

$\eta_{\mu\nu}$ 代表劳伦兹度规, 我们可以得出四组独立的解:

- (i) 只有 h_{00} , h_{33} 和 h_{03} 不为零,
- (ii) 只有 h_{01} 和 h_{31} 不为零,
- (iii) 只有 h_{02} 和 h_{32} 不为零,
- (iv) 只有 h_{11} , h_{12} 和 h_{22} 不为零.

在上面每一组解中都有一个 $h_{\mu\nu}$ 可以用组中其余的 $h_{\mu\nu}$ 表出, 因此独立的 $h_{\mu\nu}$ 共有六个, 这是 (24) 式满足四个恒等式的后果.

在通常处理里, 人们还引入以下的坐标条件:

$$h^{\mu\nu}_{, \nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h_{, \nu} = 0, \quad h = h_{\lambda}^{\lambda} \quad (26)$$

(式中 $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda} h_{\lambda}{}^{\nu} = \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} h_{\lambda\sigma}$). 通常的理解是 (26) 式代表对坐标的选择, 但它的物理意义很不清楚. 在强调引力场的物质性时, 对坐标的改变应极为慎重, 因为 τ^{00} 可以通过广义坐标变换变为零, 也可以变为任意的正值或负值, 所以在下面计算里将不引用 (26) 式. 把由 (i), (ii), (iii), (iv) 给出的 $h_{\mu\nu}$ 代入 (24) 式, 分别给出如下的关系:

$$(i) \quad h^{30}{}_{,03} + \frac{1}{2} (h^{00}{}_{,33} + h^{33}{}_{,00}) = 0, \quad (27)$$

$$(ii) \quad h_{31,0} - h_{01,3} = 0, \quad (28)$$

$$(iii) \quad h_{21,0} - h_{02,3} = 0, \quad (29)$$

$$(iv) \quad h^{11}{}_{,33} + h^{22}{}_{,33} - h^{11}h^{11}{}_{,33} - h^{22}h^{22}{}_{,33} - 2h^{12}h^{12}{}_{,33} \\ + \frac{1}{2} (h^{11}{}_{,3})^2 + \frac{1}{2} (h^{22}{}_{,3})^2 + (h^{12}{}_{,3})^2 = 0, \quad (30)$$

$$h_{ij,33} - h_{ij,00} = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (31)$$

(28)–(30) 式都准确到 $h_{\mu\nu}$ 的二次方. (27)–(30) 式代表 $h_{\mu\nu}$ 间存在的四个关系. 它是四恒等式的后果. 只有情况 (iv) 给出运动方程 (31), 其它三组的 $h_{\mu\nu}$ 不满足任何运动方程, 也就是说只有满足 (31) 式的横波 h_{11} , h_{12} , h_{22} 代表以光速前进的平面波, 其余的 $h_{\mu\nu}$ 不满足任何运动方程, 因此代表可以用任意的方式前进的波. 问题是这些可以任意行动的波是否具有能量和动量, 是否有物理意义.

为着回答上面问题首先考虑 (i) 的情况. 我们有

$$-g = 1 - h_{00} + h_{33} + h_{03}^2 - h_{00}h_{33}, \\ g^{00} = g^{-1}(1 + h_{33}), \\ g^{33} = -g^{-1}(1 - h_{00}), \quad (32)$$

导出上式, 并未作任何近似. 代入前节的 (13) 式并利用下面关系

$$g^{00}g^{33} - g^{03}g^{03} = -1/g,$$

我们得

$$\tau_{(i)}^{(n)00} = \frac{1}{16\pi k} [(-g)^{n-1}(1)_{,3}]_{,3} = 0, \quad (33)$$

即能量密度恒等于零.

对于情况 (ii), 我们有

$$-g = 1 - h_{13}^2 + h_{10}^2, \\ -g^{00} = g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1. \quad (34)$$

代入 (13) 式得:

$$\tau_{(ii)}^{(n)00} = \frac{1}{16\pi k} [(-g)^{n-1}g_{,3}]_{,3} = \frac{1}{16\pi k} [(1 - h_{13}^2 + h_{10}^2)(h_{13}^2 - h_{10}^2)_{,33} \\ + (n-1)(2h_{10}h_{10,3} - 2h_{13}h_{13,3})^2](1 - h_{13}^2 + h_{10}^2)^{n-2}. \quad (35)$$

在一般情况下, 上式并不是恒正的. 作为一个例假定 h_{13} 和 h_{10} 都以速度 v 前进 (我们可以任意选取 h_{13} , 因它并不满足任何运动方程, 有了 h_{13} 后, 可由 (28) 式算出 h_{10}), 即

$$h_{13} = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x^3 - vx^0), \quad h_{10} = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x^3 - vx^0).$$

代入 (35) 式并略去 $h_{\mu\nu}$ 的三次方, 得:

$$\tau_{(ii)}^{(n)00} = \frac{8\pi^2}{\lambda^2} \frac{A^2}{16\pi k} (1 - v^2) \cos \frac{4\pi}{\lambda} (x^3 - vx^0), \quad (36)$$

上式给出的能量密度沿着 x^3 方向交替的取正值和负值. 这种能量不恒正的情况, 只有当 $v = 1$, 即波速等于光速, 亦即 (36) 式恒等于零时才不出现. 在一般情况下, 当波速等于光速时, $h_{31,0} = \pm h_{31,3}$. 于是 (28) 式变为:

$$(h_{31} \pm h_{01})_{,3} = 0,$$

上式唯一的解是 $h_{31} = \mp h_{01}$. 代入 (35) 式也立刻给出:

$$\tau_{(ii)}^{(n)00} = 0. \quad (37)$$

情况 (iii) 和情况 (ii) 完全相同, 唯一需要的改变是把指标 1 换成 2.

最后考虑情况 (iv), 我们有

$$-g = 1 + h_{11} + h_{22} + h_{11}h_{22} - h_{12}^2, \quad -g^{00} = g^{33} = 1. \quad (38)$$

代入 (13) 式并利用 (30) 式和由 (29) 式给出对平面波的近似关系 $h^{11} = -h^{22}$, 我们得到:

$$\tau_{(iv)}^{(n)00} = \frac{1}{16\pi k} [h^{11}{}_{,3}h^{11}{}_{,3} + h^{12}{}_{,3}h^{12}{}_{,3}]. \quad (39)$$

这是大家所熟知的横波能量密度的式子.

在上面推导里, 我们未曾考虑坐标条件 (26) 式. 现在可以回过头来讨论 (26) 和 (27) — (30) 式之间的关系. 对于情况 (i), (26) 式可写为:

$$\begin{aligned} h^{03}{}_{,3} + \frac{1}{2} (h^{33} + h^{00})_{,0} &= 0, \\ h^{30}{}_{,0} + \frac{1}{2} (h^{33} + h^{00})_{,3} &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

在线性近似下, 只需要考虑如下形式的单色波,

$$h^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x^3 - vx^0). \quad (41)$$

当 $v = 1$ 时, 有

$$h^{\mu\nu}{}_{,0} = -h^{\mu\nu}{}_{,3} = \frac{2\pi}{\lambda} h^{\mu\nu}. \quad (42)$$

这时 (40) 和 (27) 式就完全等同.

对于情况 (ii), (26) 式可写为:

$$h^{13}{}_{,3} + h^{10}{}_{,0} = 0. \quad (43)$$

利用 (42) 式立刻看到 (43) 和 (28) 式是等同的. 同样考虑也可证明 (26) 式所给出的关系:

$$h^{23}{}_{,3} + h^{20}{}_{,0} = 0, \quad (44)$$

和 (29) 是等同的.

对于情况 (iv), (26) 式可写为:

$$(h^{11} + h^{22})_{,3} = 0. \quad (45)$$

在上面几个情况里, 我们曾经假定 $v = 1$, 在现在的情况里, 无需再引入这个假定, 因为 $v = 1$ 已由运动方程 (31) 确定. 这样, 利用 (42) 式立刻看到在略去 $h_{\mu\nu}$ 的二次方后, (31) 式是和 (45) 式等同的.

从上面结果我们看到, 在线性近似下, 对于自由引力波来说, 引力场方程加上条件 $v = 1$

给出坐标条件(26)式. 因而坐标条件所包含的新因素只有 $\nu = 1$. 另一方面, 前面已经指出如果要消除情况(ii)和(iii)中的负能量密度, 也必须有 $\nu = 1$. 如果认为 τ^{00} 恒正是必须满足的物理条件, 那么 $\nu = 1$ 就是它的后果, 这样, 坐标条件(26)式也将不再含有任何新的因素了.

在 $\nu = 1$ 条件下, 情况(i), (ii), (iii)中的 τ^{00} 都等于零. 一个自然提出的物理要求是这些 $h_{\mu\nu}$ 必须也都等于零, 因为不可能想象一个没有能量的波会在客观世界里存在. 但是在通常的考虑里, 为着消除这些不具有能量的纵波和纵-横波, 必须引入如下的坐标变换

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \partial^\mu \xi, \quad \partial_\mu \partial^\mu \xi = 0. \quad (46)$$

我们认为这里并不存在两个地位相同的坐标需要我们加以选择. $h_{\mu\nu} = 0$ 的坐标就是有物理意义的地位最优先的坐标系. 在这里我们并不是一般的反对广义坐标变换. 当 $g^{\mu\nu}$ 被理解为时空的度规时, $h_{\mu\nu}$ 的任何变动都可理解为坐标变换, 但是 τ^{00} 为零, 而 $h_{\mu\nu}$ 不为零的坐标系应该被看作是一种虚饰的没有物理意义的坐标系. 它不能和 τ^{00} , $h_{\mu\nu}$ 都为零的坐标系相提并论. 因此从一开始, 我们就应该通过令 $h_{\mu\nu} = 0$ 得出这个坐标系, 而不需要再通过变换(46)式. 我们认为在强调引力波的物质性时, 不轻易的引入广义坐标变换是正确的做法.

在一定的意义上引力场的广义坐标变换可以和电磁场的规范变换相比拟. 电磁场的能量动量密度是劳伦兹变换下的协变量, 而规范变换下的协变性则进一步确定了电磁场和所有带电物质的相互作用的形式. 同样, 引力场的物质性要求能量动量密度是劳伦兹变换下的协变量, 而广义坐标变换下的协变性则进一步确定了引力场和所有其他物质的相互作用的形式. 现在我们还看到引力场和电磁场只存在横波的条件, 又都是和能量密度的恒正条件紧密相联的. 如果在一个坐标中只有横引力波存在, 那么引入劳伦兹变换后, 在新坐标中将出现非横场. 这种非横场就可通过变换(46)式进一步的消除掉, 使得在新坐标中最后也只有横场存在. 与此相应, 在电磁场的库仑规范中, 只有横矢量势存在, 引入劳伦兹变换后将出现标量势和纵矢量势. 这种非横的四度矢量势也可通过规范变换进一步的消除掉, 使得在新坐标中最后只有横矢量势存在. 这里我们再一次看到引力波中的广义坐标变换起着电磁场中规范变换的作用.

本节的计算结果在 $\nu = 1$ 即能量密度恒正条件下, 是与(17)式中参数 n 的选取无关的.

前面已经指出, 情况(i), (ii), (iii)中没有运动方程, 因为未知函数的数目比方程的数目多, 方程只起了把所有函数用一个未知函数表出的作用. 但是如果引进坐标条件, 情形就不同了. 加上坐标条件未知函数和方程的数目恰好相等. 因此引入了坐标条件实际上引入了运动方程. 坐标条件(26)式使得纵波也满足和(31)式一样的波动方程. 也就是说, 坐标条件使得本来就不代表任何物质运动的纵波也满足某种人为引入的运动规律. 根据本文的结论, 对于弱引力波, 能量恒正条件要求只有横引力波存在, 根本不需要引入坐标条件.

参 考 资 料

- [1] 朗道, 栗弗席兹, 场论, 袁炳南译, 人民教育出版社 § 11-9.