

高维半线性波动方程解的正则性估计

陈 恕 行

(复旦大学数学研究所, 上海)

摘 要

本文讨论高维半线性波动方程解的奇性传播与干扰问题, 给出了关于解的正则性的估计式, 并利用一般结论分析了若干条载有奇性的次特征相交于一点时解的奇性结构, 以及三个前进波汇集于一点时的奇性传播情形.

本文目的在给出高维半线性波动方程解的正则性估计, 其主要结果与方法都容易推广到一般的高阶半线性严格双典型方程(组)的情形. Rauch^[1] 首先讨论了半线性方程解的奇性传播问题. 指出半线性波动方程解的具有一定强度的奇性将沿着次特征传播, 但是, 由于方程中非线性项的出现, 解的奇性会互相干扰, 因而解的全部奇性分布要比线性方程的情形复杂得多. 对于仅含一个空间变量的半线性严格双曲组, Ranch 与 Reed^[2-4] 中对解的奇性作了详细分析. 本文讨论具有多个空间变量的情形, 对所讨论非线性方程解的奇性分布及其强度作了细致的分析与估计. 由于当空间变量个数增加时, 方程特征的几何结构更复杂, 奇性扩散方式也更丰富(如见文献[5]), 因此我们在文中必须引入一些新的概念与方法加以处理. 本文中用以刻划解的奇性是由 Hörmander 引入的正则性函数^[6]:

$$S_u(x, \xi) = \sup\{s, u \in H^s(x, \xi)\},$$

这与文献[2—5]的作法不同. 文中估计解的奇性主要有两个过程, 其一是奇性在次特征线相交时的溶合. 这反映了右端项的非线性效应. 这时每一个载有奇性的次特征线的交点都可视为新的奇性源, 而产生一些额外的奇性; 其二是奇性的传播, 这是由方程的左端所决定的, 奇性只能沿着所考察微分算子的次特征带传播. 综合这两步可得本文的主要结果(定理 3), 它实际上提供了根据初始条件来决定方程解的奇性分布与强度的一个有效方法.

一、简单情形的讨论

考察方程

$$\square u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) u = f(x, u), \quad x \in Q, \quad (1.1)$$

取初值

$$u|_{x_n=0} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} \Big|_{x_n=0} = \varphi_1, \quad x' \in Q_0 \quad (1.2)$$

的解. 此处 $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, Ω_0 为 R^{n-1} 中的一个开区域, Ω 为 Ω_0 在 $x_n > 0$ 中的决定区域. 本文中我们不讨论解的存在性问题, 总假定在所讨论区域中 $H^s \left(s > \frac{n}{2} \right)$ 解是存在的, 而在此基础上讨论解的奇性分布及其强度的估计.

记 v 为齐次波动方程 $\square v = 0$ 满足初始条件 (1.2) 的解, E 为 $\square$ 的前向基本解算子, 即 Eg 表示方程 $\square u = g$, 且满足齐次初始条件

$$u \Big|_{x_n=0} = \frac{\partial u}{\partial x_n} \Big|_{x_n=0} = 0 \quad (1.3)$$

在 $x_n > 0$ 中的解, 则问题 (1.1), (1.2) 的解 u 满足

$$u = v + Ef(x, u). \quad (1.4)$$

设 $\varphi_1 = 0$, $WF(\varphi_0) = \{(0, \omega)\}$, 则 $\square v = 0$ 满足初始条件中 (1.2) 的解 v 可以表示为:

$$v = \frac{1}{2} \int e^{i(\langle x', \xi' \rangle + |\xi'| x_n)} \hat{\varphi}_0(\xi') d\xi' + \frac{1}{2} \int e^{i(\langle x', \xi' \rangle - |\xi'| x_n)} \hat{\varphi}_0(\xi') d\xi',$$

式中 $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $d\xi' = (2\pi)^{1-n} d\xi'$.

$$\begin{aligned} WFv = & \left\{ (x', x_n, \xi', |\xi'|); x_i + \frac{\xi_i}{|\xi'|} x_n = 0 \ (i = 1, \dots, n-1), \xi' \in \text{ess supp } \hat{\varphi}_0(\xi) \right\} \\ & \cup \left\{ (x', x_n, \xi', -|\xi'|); x_i - \frac{\xi_i}{|\xi'|} x_n = 0 \right. \\ & \left. (i = 1, \dots, n-1), \xi' \in \text{ess supp } \hat{\varphi}_0(\xi) \right\} \\ = & (-\omega x_n, x_n, \omega, 1) \cup (\omega x_n, x_n, \omega, -1), \end{aligned} \quad (1.5)$$

式中 ω 为空间 R^{n-1} 的单位向量. 今若 v 在次特征线 $\Gamma_1: \{(-\omega x_n, x_n), x_n \geq 0\}$ 和

$$\Gamma_2: \{(\omega x_n, x_n), x_n \geq 0\}$$

上是 H^s 正则的 ($s_1 \geq s$), 则解 u 的奇性可决定如下:

先将 (1.4) 式写成

$$\begin{aligned} u_0 &= u, \\ u_k &= v + Ef(x, u_{k-1}), \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

则当 u 满足 (1.4) 式时, 每个 u_k 都与 u 相同, 从而可利用 u_k 来估计 u 的奇性. 由于 $u_0 \in H^s$, 而 $s > \frac{n}{2}$ 时, H^s 按通常的乘法构成代数, 所以 $f(x, u_0) \in H^s$, 据线性方程解的奇性传播定理知,

$$Ef(x, u_0) \in H^{s+1},$$

因此有

$$\begin{aligned} s_{u_1}(x, \xi) &\geq \min(s_v(x, \xi), s+1) \\ &= \begin{cases} s+1, & (x, \xi) \notin \Gamma_{1,2}, \\ \min(s_1, s+1), & (x, \xi) \in \Gamma_{1,2}. \end{cases} \end{aligned}$$

利用分布乘积的波前集计算公式 (见文献 [7]), 当 $WFw_1 + WFw_2$ 与余切丛上零截面之交为空集时, 有 $WF(w_1 w_2) \subset (WFw_1 + WFw_2) \cup WFw_1 \cup WFw_2$, 故可相继地求得

$$s_{f_1}(x, \xi) \geq \begin{cases} s+1, & (x, \xi) \notin \Gamma_{1,2}, \\ \min(s_1, s+1), & (x, \xi) \in \Gamma_{1,2}, \end{cases}$$

$$s_{Ef_1}(x, \xi) \geq \begin{cases} s+2, & (x, \xi) \in \Gamma_{1,2}, \\ \min(s_1, s+1) + 1, & (x, \xi) \in \Gamma_{1,2}, \end{cases}$$

式中 $f_1 = f(x, u_1)$, 由此又可得:

$$s_{u_1}(x, \xi) \geq \begin{cases} s+2, & (x, \xi) \in \Gamma_{1,2}, \\ \min(s_1, s+2), & (x, \xi) \in \Gamma_{1,2} \end{cases}$$

等等. 将这样的推导反复多次, 可以得到在 $\Gamma_{1,2}$ 上成立 $s_u(x, \xi) \geq s$, 而在 $\Gamma_{1,2}$ 外 $s_u(x, \xi)$ 为任意大, 所以 u 具有不亚于 v 的正则性. 这一事实表明, 由于载有奇性的次特征线不相交, 而每条次特征上仅载有单向奇性(即 $(\pm\omega, 1)$ 中的一个), 半线性方程解的奇性分布将与相应线性方程解的奇性分布一致, 不会有额外的奇性产生.

下面我们转向一般情形的讨论, 并在本文末再回到几个特例上来.

二、余切丛上的合格函数

定义 1. 设在余切丛 $T^*(Q)$ 上给定一个关于 ξ 为正齐零次的下半连续函数 $r(x, \xi)$ 满足条件

$$i) \quad r(x, \xi) > \frac{n}{2}.$$

$$ii) \quad r(x, \xi) \leq r(x, \xi_1) + r(x, \xi_2) - \frac{n}{2},$$

式中 ξ, ξ_1, ξ_2 为 S^{n-1} 上三点, 且 ξ 位于连结 ξ_1 与 ξ_2 的大圆弧上. 则称 $r(x, \xi)$ 为 $T^*(Q)$ 上的合格函数.

定理 1. 若 $r(x, \xi)$ 为合格函数, 定义在 Q 上的分布 u, v 之正则性函数满足 $s_u(x, \xi) > r(x, \xi), s_v(x, \xi) > r(x, \xi)$, 则不等式 $s_{uv}(x, \xi) > r(x, \xi)$ 成立.

注 1. 由于 $r(x, \xi) > \frac{n}{2}$, 故 u, v 均为 H' 函数, 从而按通常的乘法 uv 也是 H' 函数, 所以定理 1 中的 $s_{uv}(x, \xi)$ 有意义.

在证明定理 1 前, 我们先引述文献[3]中一个引理如下:

引理 1. 设 $K(\xi, \eta): R^n \times R^n \rightarrow C^n$ 是一个局部可积函数, 条件

$$\sup_{\xi} \int |K(\xi, \eta)|^2 d\eta < \infty, \quad (2.1)$$

$$\sup_{\eta} \int |K(\xi, \eta)|^2 d\xi < \infty \quad (2.2)$$

之中至少有一成立, 则映照

$$(g, h) \rightarrow \int K(\xi, \eta) g(\xi - \eta) h(\eta) d\eta$$

可以从 $C_c^\infty(R^n) \times C_c^\infty(R^n) \rightarrow L^2(R^n)$ 扩张为 $L^2(R^n) \times L^2(R^n) \rightarrow L^2(R^n)$ 的双线性映照, 且

$$\left\| \int K(\xi, \eta) g(\xi - \eta) h(\eta) d\eta \right\|_{L^2} \leq C \|g\|_{L^2} \|h\|_{L^2}. \quad (2.3)$$

定理 1 的证明:

我们经常采用记号 χ_I 表示集合 I 的特征函数. 由于正则性函数表示分布的微局部性质, 因此, 我们可局限在固定点 x 的邻域中考察. 将 $s_u(x, \xi), s_v(x, \xi), r(x, \xi)$ 简记为 $s_u(\xi),$

$s_r(\xi), r(\xi)$, 由正则性函数的定义, 对任一 ξ_0 , 可以取 x 的邻域 ω 与 ξ_0 的锥邻域 Γ , 使对充分小的正数 ε , 成立着 $\widehat{\varphi u}(\xi) \langle \xi \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon} \chi_\Gamma(\xi) \in L^2$, 其中 φ 为 C_c^∞ 函数, $\text{supp } \varphi \subset \omega$. 对 v 也成立同样的估计. 注意到当 ξ_0 遍历 R^n 时, ξ_0 在球面 S^{n-1} 上的投影遍历 S^{n-1} , 由于 S^{n-1} 为紧集, 利用有限覆盖定理, 可以将 ω 与 ε 取得充分小, 使对一切 $\xi_0 \in S^{n-1}$. 上面的估计式成立, 从而由齐次性知, 对一切 $\xi_0 \in R^n$ 此式均成立.

为记号简单起见, 以下不妨设 u, v 的支集已包含在 ω 中. 作

$$\widehat{uv}(\xi) = \int \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) d\eta. \quad (2.4)$$

我们只需讨论在 ξ_0 点锥邻域中 $\widehat{uv}$ 的性质. 作 ξ_0 的锥邻域 Γ_1, Γ_2 , 使 $\Gamma_1 + \Gamma_1 \subset \Gamma_2$, 且在 Γ_2 中

$$u, v \in H^{r(\xi_0)+\varepsilon}, \quad (2.5)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 充分小, 且使 $r(\xi) > \frac{n}{2} + \varepsilon$ 对一切 ξ 成立. 于是

$$\begin{aligned} |\langle \xi \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon} \chi_{\Gamma_1}(\xi) \widehat{uv}(\xi)| &\leq \int |\chi_{\Gamma_1}(\xi) \chi_{\Gamma_2}(\eta) \chi_{\Gamma_2}(\xi - \eta) \langle \xi \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon} \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta)| d\eta \\ &+ \int |\chi_{\Gamma_1}(\xi) \chi_{\Gamma_2}(\eta) \chi_{S^{n-1} \setminus \Gamma_2}(\xi - \eta) \langle \xi \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon} \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta)| d\eta \\ &+ \int |\chi_{\Gamma_1}(\xi) \chi_{S^{n-1} \setminus \Gamma_2}(\eta) \chi_{\Gamma_2}(\xi - \eta) \langle \xi \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon} \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta)| d\eta \\ &+ \int |\chi_{\Gamma_1}(\xi) \chi_{S^{n-1} \setminus \Gamma_2}(\eta) \chi_{S^{n-1} \setminus \Gamma_2}(\xi - \eta) \langle \xi \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon} \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta)| d\eta \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

今取

$$\begin{aligned} K_1(\xi, \eta) &= \chi_{\Gamma_1}(\xi) \chi_{\Gamma_2}(\eta) \chi_{\Gamma_2}(\xi - \eta) \langle \xi \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon} \langle \xi - \eta \rangle^{-r(\xi_0)-\varepsilon} \langle \eta \rangle^{-r(\xi_0)-\varepsilon}, \\ K_2(\xi, \eta) &= \chi_{\Gamma_1}(\xi) \chi_{\Gamma_2}(\eta) \chi_{S^{n-1} \setminus \Gamma_2}(\xi - \eta) \langle \xi \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon} \langle \xi - \eta \rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon} \langle \eta \rangle^{-r(\xi_0)-\varepsilon}, \\ K_3(\xi, \eta) &= \chi_{\Gamma_1}(\xi) \chi_{\Gamma_2}(\xi - \eta) \chi_{S^{n-1} \setminus \Gamma_2}(\eta) \langle \xi \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon} \langle \xi - \eta \rangle^{-r(\xi_0)-\varepsilon} \langle \eta \rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}, \end{aligned}$$

则对于 K_1 , 由

$$\langle \xi \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon} \leq \langle \xi - \eta \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon} + \langle \eta \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon}$$

以及 $r(\xi_0) > \frac{n}{2}$ 知, K_1 满足引理 1 的条件. 又对于 K_2 , 由于在其支集中

$$|\eta| = |(\xi - \eta) - \xi| \geq c(|\xi - \eta| + |\xi|) \geq c|\xi|.$$

所以

$$|K_2(\xi, \eta)| \leq C \langle \xi \rangle^{r(\xi_0)+\varepsilon} \langle \xi - \eta \rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon} \langle \xi \rangle^{-r(\xi_0)-\varepsilon} = C \langle \xi - \eta \rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon},$$

故 K_2 也满足引理 1 中的条件. 对于 K_3 , 可以由不等式 $|\xi - \eta| \geq c(|\xi| + |\eta|)$ 作同样讨论, 于是由引理 1 知 I_1, I_2, I_3 均平方可积.

为考察 I_4 , 记 $\zeta = \xi - \eta$, 视 ζ, η 为在球面上变动的点, 则对任意 η_0, ζ_0 , 可以找到它们的锥邻域 C_{η_0}, C_{ζ_0} , 使在相应的锥邻域中 $\langle \eta \rangle^{r(\eta_0)+\varepsilon} \hat{v}(\eta), \langle \zeta \rangle^{r(\zeta_0)+\varepsilon} \hat{u}(\zeta)$ 平方可积, 由于开锥族 $\{(C_{\eta_0} \times C_{\zeta_0})\}$ 在 $S^{n-1} \times S^{n-1}$ 上的投影覆盖 $U = (S^{n-1} \setminus \Gamma_2) \times (S^{n-1} \setminus \Gamma_2)$, 所以可以从中选取有限个覆盖 U , 将它们记为 $C^i = C_{\eta_i} \times C_{\zeta_i}$, 又对于集合 C^i 记 $\varepsilon_i = \min(\varepsilon_v(\eta_i), \varepsilon_u(\zeta_i))$, 并设 (2.5) 式中 ε 已取得小于 $\min_i \varepsilon_i$, 则我们可分别对每个 i 考察

$$K_4^{(i)}(\xi, \eta) = \chi_{\Gamma_1}(\xi) \cdot \chi_{S^{n-1} \setminus \Gamma_2}(\eta) \cdot \chi_{S^{n-1} \setminus \Gamma_2}(\xi - \eta) \cdot \chi_{C_{\eta_i}}(\eta) \cdot \chi_{C_{\xi_i}}(\xi - \eta) \\ \cdot \langle \xi \rangle^{r(\xi_0) + \varepsilon} \langle \xi - \eta \rangle^{-r(\eta_i) - \varepsilon_i} \langle \eta \rangle^{-r(\xi_i) - \varepsilon_i}.$$

由于 $r(\xi)$ 是下半连续函数, 我们不妨设前面 Γ_2 已取得充分小, 使当 $\xi \in \Gamma_2$ 时, 有

$$r(\xi) > r(\xi_0) - \varepsilon,$$

又不妨设 C' 也取得如此之小, 使当过 η_i, ξ_i 的平面与 Γ_2 不相交时, 过 C_{η_i}, C_{ξ_i} 中任意向量 η, ξ 所作出的平面就与 Γ_1 不相交. 于是, 注意到在 $K_4^{(i)}$ 的支集上,

$$|\xi - \eta| \geq c(|\xi| + |\eta|) \geq c|\xi|,$$

$$|\eta| \geq c(|\xi - \eta| + |\xi|) \geq c|\xi|.$$

并利用 r 是合格函数的性质可知, 在 $K_4^{(i)}$ 的支集上

$$r(\eta_i) + \varepsilon_i + r(\xi_i) + \varepsilon_i > \min_{\Gamma_1} r(\xi) + \frac{n}{2} + 2\varepsilon_i \geq r(\xi_0) + \frac{n}{2} + \varepsilon,$$

所以 $K_4^{(i)}(\xi, \eta)$ 满足引理 1 的条件, 从而

$$I_4^{(i)} = \int |K_4^{(i)}(\xi, \eta) \langle \xi - \eta \rangle^{r(\eta_i) + \varepsilon_i} \hat{u}(\xi - \eta) \langle \eta \rangle^{r(\xi_i) + \varepsilon_i} \hat{\theta}(\eta)| d\eta$$

平方可积, 于是 I_4 亦平方可积. 综合以上结果, 可得

$$s_{uv}(\xi_0) \geq r(\xi_0) + \varepsilon > r(\xi_0).$$

由于 ξ_0 为 R_ξ^n 中任意点, 故得所需结果. 定理 1 证毕.

定义 2. 若 $g(x, \xi)$ 为在 $T^*(Q)$ 上给定的齐零次下半连续函数, 满足 $g(x, \xi) > \frac{n}{2}$, 称所有不超过 $g(x, \xi)$ 的合格函数之上确界为 g 的溶合函数, 记作 $A[g]$, 即

$$A[g] = \sup_{r \leq g, r \text{ 合格}} r(x, \xi). \quad (2.6)$$

注 2. 当 x 限制在一紧集上变动时, 由 $g(x, \xi)$ 的下半连续性知, 对充分小的 ε , $r(x, \xi)$ 可以取成 $\frac{n}{2} + \varepsilon$. 且由此又可知, 即使当 x 变化区域非紧时, 也容易构造出不超过 $g(x, \xi)$ 的合格函数, 因此 (2.6) 式右端是有意义的.

定理 2. 若 $g(x, \xi)$ 为在 $T^*(Q)$ 上给定的齐零次下半连续函数, 满足 $g(x, \xi) > \frac{n}{2}$, 又若分布 u, v 满足

$$s_u(x, \xi) > g, \quad s_v(x, \xi) > g, \quad (2.7)$$

则

$$s_{uv}(x, \xi) > A[g]. \quad (2.8)$$

证. 我们先证明 $A[g]$ 是合格函数. 显见, 我们有 $A[g] > \frac{n}{2}$. 又若 ξ, ξ_1, ξ_2 为 S^{n-1} 上三点, $\xi \in \widehat{\xi_1 \xi_2}$, 则由 $A[g]$ 的定义知, 对任一 x , 以及 $\delta > 0$, 有合格函数 r^* , 使

$$A[g](x, \xi) < r^*(x, \xi) + \delta,$$

所以,

$$A[g](x, \xi) < r^*(x, \xi_1) + r^*(x, \xi_2) + \delta - \frac{n}{2} \\ \leq A[g](x, \xi_1) + A[g](x, \xi_2) + \delta - \frac{n}{2}.$$

由 δ 的任意性, 可得

$$A[g](x, \xi) \leq A[g](x, \xi_1) + A[g](x, \xi_2) - \frac{n}{2}.$$

又由于下半连续函数的上确界也是下半连续的, 故 $A[g]$ 下半连续, 从而知 $A[g]$ 为合格函数. 又(2.7)式即表明 $s_u(x, \xi) > A[g](x, \xi)$ 及 $s_v(x, \xi) > A[g](x, \xi)$ 成立, 故由定理1知定理2成立.

注3. 若在 $T^*(Q)$ 上给定 $g(x, \xi)$ 满足定理2的条件, 分布 u 满足 $s_u(x, \xi) > g(x, \xi)$, 又若 $f(x, u)$ 为 u 的具 C^∞ 系数的多项式, 则成立

$$s_f(x, \xi) > A[g](x, \xi). \quad (2.9)$$

三、半线性波动方程解的奇性分析

现在讨论半线性波动方程具有一般初始条件的解的奇性估计, 为此再引入如下定义.

定义3. 记 v 为线性波动方程取初始条件(1.2)的解, 取 $r^{(k)}(x, \xi)$ ($k \geq 0$) 满足

$$r^{(0)}(x, \xi) < s_v(x, \xi), \quad (3.1)$$

$$r^{(k)}(x, \xi) = \min(r^{(0)}(x, \xi), \inf_{(y, \eta) \in \Gamma^-(x, \xi)} A[r^{(k-1)}](y, \eta) + 1) \quad (k > 0), \quad (3.2)$$

式中 $\Gamma^-(x, \xi)$ 表示由 (x, ξ) 出发通往 x_n 减少方向的次特征带, 我们称

$$r(x, \xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} r^{(k)}(x, \xi) \quad (3.3)$$

为问题(1.1), (1.2)的正则性界函数.

注4. 由(3.1), (3.2)式容易用递推法证明

$$r^{(k)}(x, \xi) = \min(r^{(k-1)}(x, \xi), \inf_{(y, \eta) \in \Gamma^-(x, \xi)} A[r^{(k-1)}](y, \eta) + 1), \quad (3.4)$$

故 $r^{(k)}(x, \xi)$ 是一个关于 k 的单调下降函数, 故其极限存在, 从而定义3是合理的.

引理2. 设 $g(x, \xi)$ 满足定理2中的条件, $k > \frac{n}{2}$, 则

$$A[\min(g, k)] = \min(A[g], k). \quad (3.5)$$

证. 1) 由于 $\min(g, k) \leq g$, 故 $A[\min(g, k)] \leq A[g]$, 同理 $A[\min(g, k)] \leq k$, 因此 $A[\min(g, k)] \leq \min(A[g], k)$.

2) 我们先指出, 若 $\sigma(x, \xi)$ 为合格函数, 则 $\min(\sigma, k)$ 也是合格的. 事实上,

$$\min(\sigma, k) > \frac{n}{2}$$

是显然的, 又设 $\xi \in \widehat{\xi_1 \xi_2}$, 则当 $\sigma(x, \xi_1) > k$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \min(\sigma(x, \xi), k) &\leq k = \min(\sigma(x, \xi_1), k) \\ &< \min(\sigma(x, \xi_1), k) + \min(\sigma(x, \xi_2), k) - \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

当 $\sigma(x, \xi_2) > k$ 时, 可作同样处理, 而当 $\sigma(x, \xi_1) \leq k$, $\sigma(x, \xi_2) \leq k$ 时,

$$\begin{aligned} \min(\sigma(x, \xi), k) &\leq \sigma(x, \xi) \leq \sigma(x, \xi_1) + \sigma(x, \xi_2) - \frac{n}{2} \\ &\leq \min(\sigma(x, \xi_1), k) + \min(\sigma(x, \xi_2), k) - \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

又 $\min(\sigma(x, \xi), k)$ 为下半连续, 所以它为合格函数.

今任取一个不超过 ε 的合格函数 σ , 则有

$$\begin{aligned}\sigma(x, \xi) &\leq A[g](x, \xi) \leq g(x, \xi), \\ \min(\sigma(x, \xi), k) &\leq \min(g(x, \xi), k).\end{aligned}$$

由于 $\min(\sigma, k)$ 为合格函数, 所以 $\min(\sigma, k) \leq A[\min(g, k)]$. 又注意到 $A[g]$ 是所有 σ 的上确界, 从而得

$$\min(A[g], k) \leq A[\min(g, k)].$$

引理 2 证毕.

现在给出本文的主要结果.

定理 3. 设在问题(1.1), (1.2)中, $f(x, u)$ 为 u 的具 C^∞ 系数的多项式. 初始条件 $\varphi_0 \in H^s$, $\varphi_1 \in H^{s-1}$ ($s > \frac{n}{2}$), 又设在 Q 中, 问题(1.1), (1.2)的 L^∞ 解 u 存在, 则解 u 的正则性函数满足

$$s_u(x, \xi) \geq r(x, \xi), \quad (3.6)$$

式中 $r(x, \xi)$ 为按(3.3)式定义的正则性界函数.

证. 我们仍采用

$$\begin{aligned}u_0 &= u, \\ u_k &= v + Ef(x, u_{k-1}), \quad k > 0\end{aligned}$$

的格式进行证明. 为记号简单起见, 记 $f_k = f(x, u_k)$. 由(3.1)式, $s_v(x, \xi) > r^{(0)}(x, \xi)$. 又由定理条件可知, $u \in H^s$, 所以 $s_{u_0}(x, \xi) \geq s > \frac{n}{2}$. 从而 $s_{f_0} > \frac{n}{2}$, 且有 $s_{Ef_0} > \frac{n}{2} + 1$. 又由于 $u_1 = v + Ef_0$, 故

$$s_{u_1}(x, \xi) \geq \min(s_v(x, \xi), s_{Ef_0}(x, \xi)) > \min\left(r^{(0)}(x, \xi), \frac{n}{2} + 1\right),$$

一般地, 若设

$$s_{u_k}(x, \xi) > \min\left(r^{(k-1)}(x, \xi), \frac{n}{2} + k\right) \quad (3.7)$$

成立, 则由(2.9)式及引理 2 可知,

$$\begin{aligned}s_{f_k}(x, \xi) &> A\left[\min\left(r^{(k-1)}(x, \xi), \frac{n}{2} + k\right)\right] \\ &= \min\left(A[r^{(k-1)}](x, \xi), \frac{n}{2} + k\right), \\ s_{Ef_k}(x, \xi) &> \min\left(\inf_{(y, \eta) \in F^-(x, \xi)} A[r^{(k-1)}](y, \eta) + 1, \frac{n}{2} + k + 1\right).\end{aligned}$$

由 $u_{k+1} = v + Ef_k$, 又可知

$$\begin{aligned}s_{u_{k+1}}(x, \xi) &\geq \min(s_v(x, \xi), s_{Ef_k}(x, \xi)) \\ &> \min\left(r^{(0)}(x, \xi), \inf_{(y, \eta) \in F^-(x, \xi)} A[r^{(k-1)}](y, \eta) + 1, \frac{n}{2} + k + 1\right) \\ &= \min\left(r^{(k)}(x, \xi), \frac{n}{2} + k + 1\right),\end{aligned}$$

故知(3.7)式对一切 k 成立.

由于 k 充分大时, $\frac{n}{2} + k$ 可以大于任何数. 所以当 $r(x, \xi)$ 为有限值时, 取 k 充分大, 即有

$$s_u(x, \xi) = s_{u_{k+1}}(x, \xi) > r^{(k)}(x, \xi) \geq r(x, \xi). \quad (3.8)$$

又当 $r(x, \xi)$ 取 $+\infty$ 时, $r^{(k)}(x, \xi)$ 也是 $+\infty$, 而

$$s_u(x, \xi) = s_{u_{k+1}}(x, \xi) > \frac{n}{2} + k + 1 \quad (3.9)$$

可以大于任何实数, 所以 $s_u(x, \xi)$ 也是 $+\infty$, 故得 (3.6) 式成立. 定理 3 证毕.

例 1. 设 v 为线性齐次波动方程, 且满足初始条件 (1.2) 的解, 它的正则性函数满足

$$s_v(x, \xi) \geq \begin{cases} s_0 > \frac{n}{2}, & (x, \xi) \in \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i, \\ +\infty, & \text{其它,} \end{cases} \quad (3.10)$$

式中 $\Gamma_i = \{(\omega_i(1 - x_n), x_n, \omega_i, 1)\}$, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 为球面 S^{n-2} 上互异的单位向量. 此时, 载有 v 的奇性的次特征带为 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, 它们在底空间上的投影相交于点 $(0, 1)$ (这里 $(0, 1)$ 是 $(0, \dots, 0, 1)$ 的缩写). 为确定非线性问题 (1.1), (1.2) 的解 u 的奇性分布, 我们构造正则性界函数. 记在球面 S^{n-1} 上坐标为 $(\frac{\sqrt{2}}{2} \omega_i, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 的点为 P_i , 取正数 $\varepsilon < s_0 - \frac{n}{2}$, 则可取

$$r^{(0)}(x, \xi) = s_0 - \varepsilon > \frac{n}{2}, \text{ 从而}$$

$$A[r^{(0)}](x, \xi) = \begin{cases} s_0 - \varepsilon, & (x, \xi) \in \bigcup \Gamma_i, \\ 2(s_0 - \varepsilon) - \frac{n}{2}, & x = (0, 1), \xi \in \bigcup \widehat{P_i P_j}, \\ 3(s_0 - \varepsilon) - n, & x = (0, 1), \xi \in \Delta P_1 P_2 P_3, \end{cases}$$

式中 $\bigcup \widehat{P_i P_j}$ 即 $\widehat{P_1 P_2} \cup \widehat{P_1 P_3} \cup \widehat{P_2 P_3}$, $\Delta P_1 P_2 P_3$ 表示由这三段大圆弧构成的球面三角形. 对于 ξ 不落在 S^{n-1} 上的点, 可以利用齐次性得知 $A[r^{(0)}]$ 之值. 由于当 ξ 落在 $\widehat{P_i P_j}$ 内或在 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 内时, (x, ξ) 不属于方程的特征集, 故在这些点的奇性不可能传播出去, 从而有

$$r^{(1)}(x, \xi) = \min(A[r^{(0)}](x, \xi) + 1, r^{(0)}(x, \xi)),$$

$$A[r^{(1)}](x, \xi) = A[r^{(0)}](x, \xi),$$

.....

$$r(x, \xi) = \min(A[r^{(0)}](x, \xi) + 1, r^{(0)}(x, \xi)).$$

又由于 ε 可以取得任意小, 故我们得到 u 的正则性函数的估计:

$$s_u(x, \xi) \geq \begin{cases} s_0, & (x, \xi) \in \bigcup \Gamma_i, \\ 2s_0 - \frac{n}{2} + 1, & x = (0, 1), \xi \in \bigcup \widehat{P_i P_j}, \\ 3s_0 - n + 1, & x = (0, 1), \xi \in \Delta P_1 P_2 P_3, \\ +\infty, & \text{其它.} \end{cases}$$

上述计算表明, 当半线性波动方程的载有解的单向奇性的三条次特征线相交于一点时, 若所载奇性如 (3.10) 式所示, 则不会有额外的奇性往外传播. 类似地可知, 当只有两条载有解的单向奇性的次特征线相交时, 也不会引起额外奇性的传播.

但是,如果(3.10)式中 Γ_3 改为 $\{(\omega_3(1-x_n), x_n, -\omega_3, -1)\}$, Γ_1, Γ_2 保持不变,则情形就不同了. 事实上,若仍取 $r^{(0)}(x, \xi) = s_0 - \varepsilon$, 则 $A[r^{(0)}](x, \xi)$ 的形式不变,但此时在 $x_0 = (0, 1)$ 点的余切空间之单位球上, $\Delta P_1 P_2 P_3$ 内可能含有这样的 ξ , 使 (x_0, ξ) 落在 $\square$ 的特征集上. 用大圆弧连结 P_3 与 $\widehat{P_1 P_2}$ 中的任意点,该大圆弧就必与特征点集

$$\left\{ \left(0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} \omega, \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \omega \in S^{n-1} \right\}$$

相交,记此交点集为 $\tilde{r}$, 易知在 $\tilde{r}$ 上 $A[r^{(0)}]$ 至少按微局部意义是 $H^{3(t_0-\varepsilon)-n}$ 正则的. 于是记

$$\{\tilde{r}\} = \left\{ \left((1-x_n)\omega, x_n, \frac{\sqrt{2}}{2} \omega, \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \left(1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \omega, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \in \tilde{r}, x_n > 1 \right\},$$

$$r^{(1)}(x, \xi) = \begin{cases} s_0 - \varepsilon, & (x, \xi) \in \cup \Gamma_i, \\ 2(s_0 - \varepsilon) - \frac{n}{2} + 1, & x = (0, 1), \xi \in \cup \widehat{P_i P_j}, \\ 3(s_0 - \varepsilon) - n + 1, & x = (0, 1), \xi \in \Delta P_1 P_2 P_3 \text{ 或 } (x, \xi) \in \{\tilde{r}\}, \\ +\infty, & \text{其它,} \end{cases}$$

$$r^{(2)}(x, \xi) = r^{(1)}(x, \xi), \dots, \dots,$$

$$r(x, \xi) = r^{(1)}(x, \xi).$$

再利用 ε 的任意性,可得

$$s_\mu(x, \xi) \geq \begin{cases} s_0, & (x, \xi) \in \cup \Gamma_i, \\ 2s_0 - \frac{n}{2} + 1, & x = (0, 1), \xi \in \cup \widehat{P_i P_j}, \\ 3s_0 - n + 1, & x = (0, 1), \xi \in \Delta P_1 P_2 P_3 \text{ 或 } (x, \xi) \in \{\tilde{r}\}, \\ +\infty & \text{其它.} \end{cases}$$

此式表示在次特征带集 $\{\tilde{r}\}$ 上,可能载有解 u 的奇性. 这正是由于非线性效应所产生的额外奇性传播的现象,但其奇性强度要比解在 Γ_i 上的奇性强度弱. 与文献[3]中的结果相比较可知,当空间维数增高时,由载有奇性的次特征线相交时产生的额外奇性之强度可能会更弱些. 又在文献[5]中,一个确实载有这种额外奇性的解已被构造得到.

例 2. 三个前进波的干扰

考察含两个空间变量的波动方程(1.1),记 $x_3 = t$ 表示时间. 设 u 为方程(1.1)的解,在 $t < t_0$ 时 u 由三个相互靠拢的前进波组成. 在波阵面上按微局部的正则性而言, u 为 s 阶正则的. 当 $t = t_0$ 时三个波汇集于一点 P , 则当 $t > t_0$ 时,三个波相互分离后,可能会有额外的奇性沿着从 P 点发出的特征锥面往外传播(见图1).

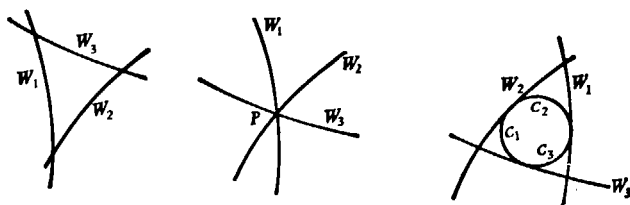


图 1

由定理 3 知, 从 P 点产生的额外奇性传播情况取决于三个前进波相遇时 u 的奇性溶合情况. 若在 P 点三个前进波的法向为 $\{(-\omega_i, 1)\}$, $i = 1, 2, 3$. 解 u 带入至 P 点的奇性为

$\bigcup_{i=1}^3 \left(x_P, t_0, \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_i, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, 则不会有额外奇性往外传播. 与例 1 相仿, 如果在时刻 t_0 , 解 u 带入到 P 点的奇性为

$$\left(x_P, t_0, \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cup \left(x_P, t_0, \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_2, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cup \left(x_P, t_0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \omega_3, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

则在与波阵面 W_i 相对的一部分锥面 C_i 上, u 可能具有低于 $3s - n + 1$ 阶的奇性, 该奇性按特征锥决定的波速往外传, 而在锥面的 C_1, C_2 部分无额外奇性的传播.

又如果解 u 在波阵面 W_i 上载有的奇性具不同的强度, 也容易按定理 3 计算出三个波相遇后额外奇性的生成与传播情况.

参 考 文 献

- [1] Rauch, J., *J. Math. Pures et Appl.*, **58**(1979), 299—308.
- [2] Rauch, J. & Reed, M., *Annals of Math.*, **111**(1980), 531—552.
- [3] ———, *Duke Math. J.*, **49**(1982), 397—475.
- [4] ———, *Comm. Math. Phys.*, **81**(1981), 203—227.
- [5] Beals, M., *Duke Math. J.*, **49**(1982), 275—286.
- [6] Hörmander, L., *Annals of Math. Studies*, **91**(1979), 3—49.
- [7] Hörmander, L., *Acta Math.*, **127**(1971), 79—183.
- [8] Rauch, J. & Reed, M., *Comm. P. D. E.*, **7**(1982), 1117—1133.