

超塑性拉伸似粘性变参数流变方程*

宋玉泉 高柏恩 王习文

(吉林工业大学超塑性与塑性研究所, 长春 130025)

摘要 给出了能精确表达 Zr-Al22%, Al-Zr-Mg 和 Al-Zr-Cu-Cr 比较典型的 3 种超塑性合金的 $\lg \sigma - \lg \dot{\epsilon}$ 关系的多项式. 进而用 $m(\dot{\epsilon})$ 和 $k(\dot{\epsilon})$ 的解析表达式求得 m 和 k 均为变数的似粘性流变方程, 方程中包含了与 $m - \lg \dot{\epsilon}$ 曲线相关的 3 个参数 m_m , m_k 和 η , 并且指出, m_m , η , m_m/m_k 越大, 合金的超塑性越好, 而且 Backofen 方程只是变参数本构方程的一个特例.

关键词 超塑性拉伸 似粘性流变方程

Backofen 等认为材料在超塑性状态下变形, 几乎不发生应变硬化, 但具有强的应变速率硬化效应, 并从经验上建立了真实应力 σ 和真实应变速率 $\dot{\epsilon}$ 关系的似粘性流变方程

$$\sigma = k \dot{\epsilon}^m, \quad (1)$$

他们把(1)式中的 m 定义为应变速率敏感性指数, 把 k 定义为材料参数, 而且认为 m 和 k 均为常数^[1]. 这一方程在超塑性变形力学的研究历史中曾起过奠基作用. 由于除陶瓷材料和金属间化合物外, 绝大部分材料的 m 值和 k 值随 $\dot{\epsilon}$ 的变化幅度都很大, 因此把 m 和 k 视为常数是确切. 本文拟引用文献[2]关于 $m(\dot{\epsilon})$ 和 $k(\dot{\epsilon})$ 的解析表达式建立 m 和 k 均为变数的似粘性拉伸流变方程, 并依据 m 值曲线的几何形状解答材料超塑性的好坏.

1 似粘性流变方程的精确表达

只要作出材料的 $\lg \sigma - \lg \dot{\epsilon}$ 的实验曲线, 便可借助计算机相当精确地求得模拟该曲线的多项式, 令 $x = \lg \dot{\epsilon}$, 即

$$\lg \sigma(\dot{\epsilon}) = \sum_{i=0}^n a_i x^i. \quad (2)$$

对于图 1 中 3 种材料的实验曲线(曲线 1), 上式中的 a_i 分别为:

对 Zr-Al22% 超塑性合金

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 2.148\,940, a_1 = 0.340\,191, a_2 = -0.008\,637, a_3 = -0.059\,097, \\ a_4 = -0.039\,929, a_5 = 0.007\,509, a_6 = 0.011\,797, a_7 = 3.467\,260 \times 10^{-3}, \\ a_8 = 4.221\,910 \times 10^{-4}, a_9 = 1.893\,360 \times 10^{-5}; \end{array} \right. \quad (3)$$

1997-07-31 收稿, 1997-10-08 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 59575049)

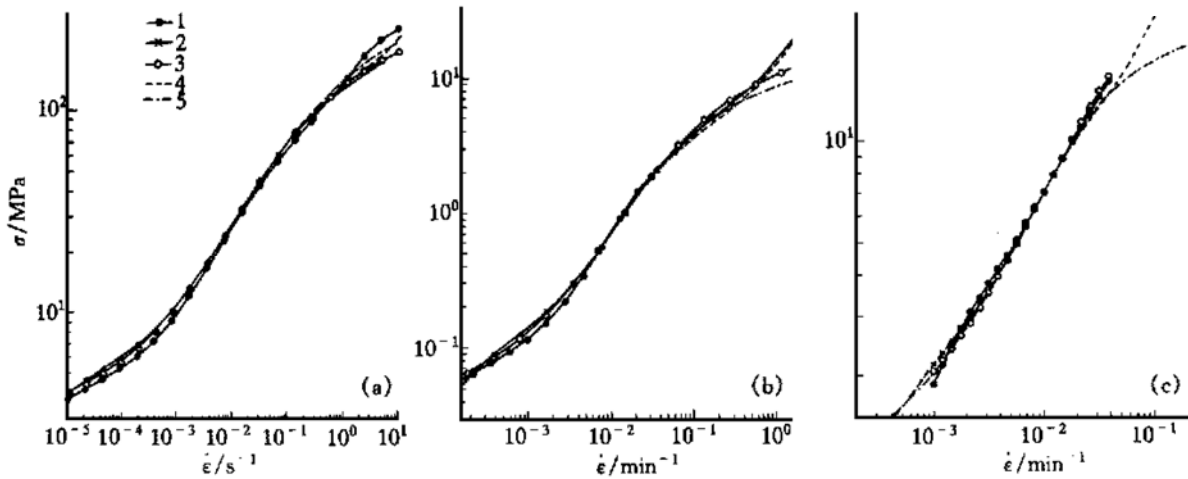


图 1 $\lg \sigma - \lg \dot{\epsilon}$ 的实验曲线及其函数模拟曲线

(a) Zr-Al 22% 超塑性合金, 实验温度 250 °C^[3]; (b) Al-Zr-Mg 超塑性合金, 实验温度 550 °C^[4]; (c) Al-Zr-Mg-Cu-Cr 超塑性合金, 实验温度 520 °C^[5]. 1 为实验曲线; 2 为余弦函数对称模拟曲线; 3 为负幂函数对称模拟曲线; 4 为余弦函数分段模拟曲线; 5 为负幂函数分段模拟曲线

对 Al-Zr-Mg 超塑性合金

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.624\,526, a_1 = -2.364\,580, a_2 = -6.283\,880, a_3 = -6.586\,200, \\ a_4 &= -3.390\,580, a_5 = -0.640\,606, a_6 = 0.115\,561, a_7 = 7.329\,930 \times 10^{-2}, \\ a_8 &= 1.189\,960 \times 10^{-2}, a_9 = 6.582\,760 \times 10^{-4}; \end{aligned} \quad (4)$$

对 Al-Zr-Mg-Cu-Cr 超塑性合金

$$\begin{aligned} a_0 &= 69.691\,841, a_1 = 383.463\,387, a_2 = 930.656\,207, a_3 = 1\,286.555\,192, \\ a_4 &= 1\,123.039\,777, a_5 = 647.704\,110, a_6 = 250.157\,339, a_7 = 63.908\,002, \\ a_8 &= 10.333\,920, a_9 = 0.954\,312, a_{10} = 3.815\,326 \times 10^{-2}. \end{aligned} \quad (5)$$

由于(2)式(并考虑(3)~(4)或(5)式), 能精确地描述所对应的 3 种合金的 σ 与 $\dot{\epsilon}$ 的关系, 故能有效地用于解决定量力学问题. 但是(2)式中没有包含材料的本构参数 k 和 m , 这对揭示超塑性拉伸的力学实质是无能为力的.

2 变参数流变方程

2.1 $m - \lg \dot{\epsilon}$ 曲线为对称的情况

文献[2]用余弦函数模拟 $m - \lg \dot{\epsilon}$ 曲线给出的 $m(\dot{\epsilon})$ 和 $k(\dot{\epsilon})$ 的解析表达式为

$$m(\dot{\epsilon}) = \frac{m_m + m_k}{2} + \frac{m_m - m_k}{2} \cos \left| \frac{\lg \dot{\epsilon}_m - \lg \dot{\epsilon}}{\eta} \pi \right|, \quad (6)$$

$$k(\dot{\epsilon}) = k_m \dot{\epsilon}_m^{\left| \frac{m_m - m_k}{2} \right|} 10^{\left| \frac{\eta}{\pi} \left| \frac{m_m - m_k}{2} \right| \sin \left| \frac{\lg \dot{\epsilon}_m - \lg \dot{\epsilon}}{\eta} \pi \right| \right| \dot{\epsilon}^{\left| \frac{m_m - m_k}{2} \right| \cos \left| \frac{\lg \dot{\epsilon}_m - \lg \dot{\epsilon}}{\eta} \pi \right|}. \quad (7)$$

用负幂函数模拟 $m - \lg \dot{\epsilon}$ 曲线给出的 $m(\dot{\epsilon})$ 和 $k(\dot{\epsilon})$ 的解析表达式为

$$m(\dot{\epsilon}) = \frac{m_m}{1 + \left| \frac{m_m}{m_k} - 1 \right| \left| \frac{\lg \dot{\epsilon} - \lg \dot{\epsilon}_m}{\eta} \right|^2}, \quad (8)$$

$$k(\dot{\epsilon}) = k_m \dot{\epsilon}_m^{m_m} 10^{\frac{\eta_m}{\sqrt{\frac{m_m}{m_k}-1}} \left| \lg \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_m} \right| - 1} \left| \frac{\lg \dot{\epsilon} - \lg \dot{\epsilon}_A}{\eta} \sqrt{\frac{m_m}{m_k}-1} \right| \left| \frac{m_m}{m_k}-1 \right| \left| \frac{\lg \dot{\epsilon} - \lg \dot{\epsilon}_m}{\eta} \right|^2. \quad (9)$$

把(6)和(7)式代入(1)式, 得用余弦函数模拟的超塑性似粘性流变方程

$$\sigma(\dot{\epsilon}) = k_m \dot{\epsilon}_m^{\left| \frac{m_m - m_k}{2} \right|} \dot{\epsilon}^{\left| \frac{m_m + m_k}{2} \right|} 10^{\left| \frac{\eta}{\pi} \left| \frac{m_m - m_k}{2} \right| \sin \left| \frac{\lg \dot{\epsilon} - \lg \dot{\epsilon}_m}{\eta} \pi \right| \right|. \quad (10)$$

把(8)和(9)式代入(1)式, 得用负幂函数模拟的流变方程

$$\sigma(\dot{\epsilon}) = k_m \dot{\epsilon}_m^{m_m} 10^{\frac{\eta_m}{\sqrt{\frac{m_m}{m_k}-1}} \left| \lg \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_m} \right| - 1} \left| \frac{\lg \dot{\epsilon} - \lg \dot{\epsilon}_m}{\eta} \sqrt{\frac{m_m}{m_k}-1} \right|. \quad (11)$$

2.2 $m-\lg \dot{\epsilon}$ 曲线为非对称的情况

由于 $m-\lg \dot{\epsilon}$ 曲线是非对称的, 所以必须采用分段模拟的方式. 下面分别给出了用余弦函数和负幂函数分段模拟的流变方程:

(i) 用余弦函数分段模拟的流变方程为

$$\left| \begin{aligned} \sigma(\dot{\epsilon}) &= k_m \dot{\epsilon}_m^{\left| \frac{m_m - m_A}{2} \right|} \dot{\epsilon}^{\left| \frac{m_m + m_A}{2} \right|} 10^{\left| \frac{\eta_A}{\pi} \left| \frac{m_m - m_A}{2} \right| \sin \left| \frac{\lg \dot{\epsilon} - \lg \dot{\epsilon}_A}{\eta_A} \pi \right| \right|} & (\dot{\epsilon}_A \leq \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_m), \\ \sigma(\dot{\epsilon}) &= k_m \dot{\epsilon}_m^{\left| \frac{m_m - m_B}{2} \right|} \dot{\epsilon}^{\left| \frac{m_m + m_B}{2} \right|} 10^{\left| \frac{\eta_B}{\pi} \left| \frac{m_m - m_B}{2} \right| \sin \left| \frac{\lg \dot{\epsilon} - \lg \dot{\epsilon}_m}{\eta_B} \pi \right| \right|} & (\dot{\epsilon}_m \leq \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_B), \end{aligned} \right. \quad (12)$$

(ii) 用负幂函数分段模拟的流变方程为

$$\left| \begin{aligned} \sigma(\dot{\epsilon}) &= k_m \dot{\epsilon}_m^{m_m} 10^{\frac{\eta_A m_m}{\sqrt{\frac{m_m}{m_A}-1}} \left| \lg \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_m} \right| - 1} \left| \frac{\lg \dot{\epsilon} - \lg \dot{\epsilon}_A}{\eta_A} \sqrt{\frac{m_m}{m_A}-1} \right| & (\dot{\epsilon}_A \leq \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_m), \\ \sigma(\dot{\epsilon}) &= k_m \dot{\epsilon}_m^{m_m} 10^{\frac{\eta_B m_m}{\sqrt{\frac{m_m}{m_B}-1}} \left| \lg \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_m} \right| - 1} \left| \frac{\lg \dot{\epsilon} - \lg \dot{\epsilon}_m}{\eta_B} \sqrt{\frac{m_m}{m_B}-1} \right| & (\dot{\epsilon}_m \leq \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_B). \end{aligned} \right. \quad (13)$$

(6)~(9)式中参量的含义, 见图2.

如果 $m-\lg \dot{\epsilon}$ 为对称曲线, 则有:

$$m_A = m_B = m_k = \frac{m_m - m_0}{3} + m_0 = \frac{m_m + 2m_0}{3},$$

$$\eta = \lg \dot{\epsilon}_m - \lg \dot{\epsilon}_A = \lg \dot{\epsilon}_B - \lg \dot{\epsilon}_m.$$

如果 $m-\lg \dot{\epsilon}$ 是非对称曲线, 则有:

$$m_A \neq m_B, \quad \eta_A \neq \eta_B,$$

$$m_A = \frac{m_m + 2m_{0A}}{3}, \quad m_B = \frac{m_m + 2m_{0B}}{3},$$

$$\eta_A = \lg \dot{\epsilon}_m - \lg \dot{\epsilon}_A, \quad \eta_B = \lg \dot{\epsilon}_B - \lg \dot{\epsilon}_m.$$

对于以上3种材料, 如果把 $m-\lg \dot{\epsilon}$ 曲线近似地视为

完全对称的, 将文献[2]中(13)式的 m_m , m_k , $\lg \dot{\epsilon}_m$,

$\lg \dot{\epsilon}_k$, η 数据代入(10)式和(11)式, 便能用计算机画出对应的模拟曲线(如图1的曲线2和3所

示). 如果把 $m-\lg \dot{\epsilon}$ 曲线按非对称的真实情况处理, 将文献[2]中(13)和(24)式的 m_m , m_A ,

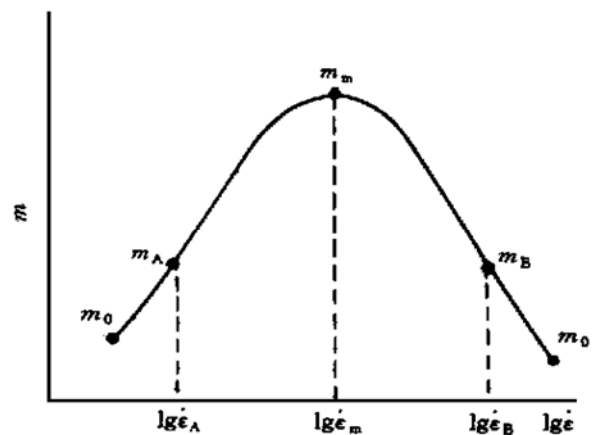


图2 $m-\lg \dot{\epsilon}$ 曲线的示意图

$m_B, \lg \dot{\epsilon}_m, \lg \dot{\epsilon}_A, \lg \dot{\epsilon}_B, \eta_A, \eta_B$ 数据代入(12)和(13)式, 同理能画出对应的模拟曲线(如图 1 的曲线 4 和 5 所示). 由图 1 的(a)、(b)、(c)可见, 在超塑性变形的应变速率((a) $\dot{\epsilon} = 10^{-4.4} \sim 10^{-0.3}$, (b) $\dot{\epsilon} = 10^{-3.18} \sim 10^{-0.8}$, (c) $\dot{\epsilon} = 10^{-3.01} \sim 10^{-1.39}$)的范围内, 理论曲线 2~5 与实验曲线 1 都拟合得很好. 但是由于上述 3 种材料的 m - $\lg \dot{\epsilon}$ 曲线都不完全对称, 所以非对称模拟的理论曲线 4 和 5 与实验曲线 1 更吻合.

3 讨论

(i) 由上可见, 对已知是典型的超塑性材料, 只要从实验上测得

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_m, \lg \dot{\epsilon}_m), (m_{kA}, \lg \dot{\epsilon}_A), (m_{kB}, \lg \dot{\epsilon}_B), \\ \eta_A = \lg \dot{\epsilon}_m - \lg \dot{\epsilon}_A, \eta_B = \lg \dot{\epsilon}_B - \lg \dot{\epsilon}_m, \\ k_m = \sigma_m \dot{\epsilon}_m^{m_m}. \end{array} \right. \quad (14)$$

对于 m 值曲线为对称型的材料: 即 $\eta_A = \eta_B = \eta, m_{kA} = m_{kB} = m_k$, 把(14)式代入(10)或(11)式, 便得对称型的变参数似粘性本构方程. 对于 m 值曲线为非对称型的材料: 即 $\eta_A \neq \eta_B, m_{kA} \neq m_{kB}$, 把(14)式代入(10)式或(11)式, 便得非对称型的变参数似粘性本构方程.

至于新开发的超塑性材料, 则应先由实验测得 m - $\lg \dot{\epsilon}$ 曲线, 只要曲线是拱形的, 与上同理, 可建立对应的变参数的本构方程. 如果曲线是非拱形的, 亦可另选已知函数模拟 m 值曲线, 建立本构方程.

(ii) 在特殊情况下, 假定 m 值为常数即 $m_k = m_m = m$, 将其代入(10)式得

$$\sigma = k_m \dot{\epsilon}^m, \quad (15)$$

把 $m_k = m_m = m$ 代入(11)式, 由于

$$\lim_{m_k \rightarrow m_m} \frac{1}{\sqrt{\frac{m_m}{m_k} - 1}} \operatorname{tg}^{-1} \left| \frac{\lg \dot{\epsilon} - \lg \dot{\epsilon}_m}{\eta} \sqrt{\frac{m_m}{m_k} - 1} \right| = \frac{(\lg \dot{\epsilon} - \lg \dot{\epsilon}_m)}{\eta},$$

故得 $\sigma = k_m \dot{\epsilon}^m$.

由上可知, Backofen 的似粘性流变方程, 只是变参数似粘性流变方程的极特殊的情形, 而且 Backofen 方程中的 k 实质上是 k_m , Backofen 方程中的 m 相当于余弦模拟法中 m 的平均值 $\bar{m}$, 负幂模拟法中 m 的最大值 m_m . 在一般情况下, 它只反映了材料的流变应力 σ 对应变速率 $\dot{\epsilon}$ 的敏感性, 或是任一点的 σ 与 $\dot{\epsilon}$ 的关系. 只有对 m 和 k 均为常数的材料, 如绝大部分超塑性陶瓷材料和大部分超塑性金属间化合物, Backofen 方程才能适用.

(iii) 在超塑性的研究领域, 已经公认, m 值是判定材料超塑性的力学指标. 对于完全似粘性的同一种超塑材料, 所处状态的 $\bar{m}$ 或 m_m 值越大, 其超塑性越好, 这已为大量事实证明. 但是对不同的超塑性材料, 往往出现 $\bar{m}$ 或 m_m 值大的材料, 其超塑性反而差, 而 $\bar{m}$ 或 m_m 值小的材料, 其超塑性反而好的现象. 这一异常情况在超塑性研究的进展历史中, 令人长期困惑难解. 虽然文献[6]结合 m - $\lg \dot{\epsilon}$ 曲线的几何形状对这一问题有过进一步的解答, 然而还不能令人完全满意. 为了叙述的简便起见, 以 m - $\lg \dot{\epsilon}$ 曲线为对称型的理想情况为例, 结合流变方程(10)和(11)式讨论, 并不失理论的普遍性. 但是必须指出, 材料在超塑性变形过程中, 其流变抗力 $\sigma(\dot{\epsilon})$ 越小, 超塑性越好. 呈现超塑性的应变速率很小, 均在 $10^{-5} \sim 10^{-1} \text{ s}^{-1}$ 范围, 即 $\dot{\epsilon}$ 始

终小于 1. 同时考虑这两个条件, 由流变方程(10)和(11)便可直接看出, m_m , m_m/m_k 和 n 越大, 材料的超塑性越好. 由此可见, 判定材料超塑性的好坏, 不能只用单一 m 的平均值或 m 的最大值, 而是要用 $m \cdot \lg \dot{\epsilon}$ 曲线, 即与曲线几何形状相关的 3 个参数 m_m , m_k , n 才行. 这便解答了为什么以往只用一个 m 值的大小去比较不同材料的超塑性, 会出现令人费解的异常情况.

参 考 文 献

- 1 Backofen W A, Turner I R, Avery D H. Superplasticity in an Al-Zn alloy. Trans ASM Quart, 1964, 57: 980~ 990
- 2 宋玉泉, 程永春, 王习文. 超塑性拉伸本构参数的定量解析. 中国科学, E 辑, 1997, 27(5): 385~ 391
- 3 鹰合敏也, 加藤一器, 中山荣浩. Zr-22% Al 合金板の超塑性变形挙動の解析. 轻金属, 1991, 41: 152~ 157
- 4 松木贤司, 山田正夫. Al-Zr-Mg の超塑性挙動. 日本金属学会誌, 1972, 37: 448~ 454
- 5 小島陽, 古川智行, 小林勝, 等. Zr-Al-Mg-Cu-Cr 合金の結晶微細化と超塑性. 轻金属, 1986, 36(7): 421~ 428
- 6 Song Yuquan, Zhao Jun. A mechanical analysis of the superplastic free bulging of metal sheet. Mater Sci Eng, 1986, 84: 122~ 124