中国科学（A 辑）
第 30 卷 第 9 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 2000 年 9 月

高维复解析映射不动点的重数*

张广远

（清华大学数学科学系，北京 100084）

摘要 用经典的分析方法研究解析映射的各阶迭代在原点 0 的不动点重数，特别是对维数等于 2 时的情形展开了详尽的讨论，得到了几个较为完整的结果.

关键词 解析映射 复动力系统 不动点重数

先引进几个记号和术语. 本文中 $\mathbb{N}$ 表示自然数集，Δ^v 表示 $\mathbb{C}^v$ 中以原点 0 为心的单位球，F: $\overline{\Delta^v}\to\mathbb{C}^v$ 是以 0 为不动点的解析映射，$J_F(0)$ 表示 F 在 0 的 Jacobi 矩阵，而对任意非负整数 k，F^k 则表示 F 的定义在原点的某个邻域上的 k 阶迭代，它是按如下方式定义的：$F^0=I$，$F^1=F,\cdots$，$F^k=F\circ F^{k-1}$，其中 I 是恒等映射. 如果 0 是 F 的孤立不动点，则可以按一维复动力系统的方法定义该不动点的重数：先找一个以 0 为心的开球 B，使得 0 是 F 在 $\bar{B}$ 内的惟一不动点. 再找一个 $F-I$ 的趋于 0 的正则值序列 p_n，然后定义不动点重数

$$\mu_F(0)=\lim_{p_n\to 0}\#\{z\in B;\ F(z)-z=p_n\},$$

其中 # 表示集合的基数. 上述定义是合理的[1, 2]. 与一维的情形一样，这样定义的重数有下述性质[1, 2]：存在 $\delta>0$，使得对任意一个解析映射 $G:\bar{B}\to\mathbb{C}^v$，只要 $\max\limits_{x\in\partial B}\|F(x)-G(x)\|<\delta$，$G$ 便在 B 内恰有 $\mu_F(0)$ 个不动点，其中重不动点按重数记. F 在 0 的不动点重数其实就是 $F-I$ 的零点 0 的重数. 一重不动点也叫简单不动点. 为方便起见，如果 0 是 F 的不动点的聚点，就记 $\mu_F(0)=+\infty$，但这时上面指出的不动点重数的性质不再保持.

本文将对 F 的各阶迭代 $F^i(i=1,2,\cdots)$ 在 0 的不动点重数进行一般性的研究，特别要对 $v=2$ 的情形展开详尽的讨论. 关于这一问题，在维数 $v=1$ 时有熟知的结果：要么 $\mu_{F^i}(0)=\mu_F(0)$ 对任意 $i\in\mathbb{N}$ 成立，要么存在一个自然数 m，使得对任意 $i\in\mathbb{N}$，当 $m\nmid i$（即 $i\neq 0\ (\mathrm{mod}\, m)$）时 $\mu_{F^i}(0)=\mu_F(0)$，而当 $i\mid m$（即 $i=0(\mathrm{mod}\, m)$）时 $\mu_{F^i}(0)=\mu_{F^m}(0)>\mu_F(0)$. 当维数 $v>1$ 时，问题较为复杂，上述在 $v=1$ 时的结论只能在一些特殊情形下成立. 例如 Friedland 和 Milnor[1] 曾经用代数方法，即用形式幂级数的有关理论证明了下述

定理 A 设 F: $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 是解析映射，0 是 F 的孤立不动点且 $\mu_F(0)>1$，又设 F 在 0 的 Jacobi 行列式 $\delta\neq 1$，则对任意满足条件 $\delta^i\neq 1$ 的自然数 i，F^i 在 0 有相同的不动点重数 $\mu_F(0)$，即 $\mu_{F^i}(0)=\mu_F(0)$. 特别地，若 δ 不是单位根，则对任意自然数 i，F^i 在 0 有相同的不动点重数 $\mu_F(0)$.

1999-11-03 收稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号：19971049)

在上述定理的条件下，不动点的重数问题实际上可以被转化成一维问题，这在一般情况下是做不到的. 对于满足上述定理条件的 F，一个有趣的问题是：对任意满足 $\delta^i=1$ 的自然数 i，F^i 都在0有相同的不动点重数吗？Friedland 和 Milnor[1]指出当 $\delta\neq 1$ 但 $\delta^i=1$ 时必定有 $\mu_{F^i}(0)>\mu_F(0)$. 本文将用较为初等的分析方法证明下述

命题 1 设 $F:\overline{\Delta^2}\to\mathbb{C}^2$ 是解析映射，0是 F 的孤立不动点且 $\mu_F(0)>1$，又设 F 在0的Jacobi行列式 $\delta\neq 1$，则对任意满足条件 $\delta^i=1$ 的自然数 i，F^i 在0有相同的不动点重数，且这个不动点重数大于 $\mu_F(0)$.

如果把定理A中的条件 $\delta\neq 1$ 改为 $\delta=1$，相应结论对每个 $F^i(i\in\mathbb{N})$ 是否还成立呢？关于这一问题，基于 Cronin[3]的一个重要结果，Friedland 和 Milnor 指出，如果 F 能表示为如下形式：

$$F(x,y)=(x,y)+(p(x,y),q(x,y))=(x,y)+\left(\sum_{k=m}^{\infty}p_k(x,y),\ \sum_{k=n}^{\infty}q_k(x,y)\right),$$

其中，$m>1$，$n>1$，p_k 和 q_k 都是关于 x，y 的 k 次齐式，而且0是 $(p_m,\ q_n)$ 的孤立零点，则对任意自然数 i，F^i 在0有相同的不动点重数.

当0是 $(p_m,\ q_n)$ 的孤立零点时，它必然是 (p,q) 的孤立零点，反之显然不成立. 如果只假设 $m>1$，$n>1$ 且0是 (p,q) 的孤立零点，相应的结论是否还能成立？在这样减弱了的条件下，基于 Cronin[3]的方法显然失效. 本文将用扰动方法证明在进一步减弱了的条件下，相应结论依然成立，即便在 $v>2$ 时也是如此.

定理 1 设 $F:\overline{\Delta^v}\to\mathbb{C}^v$ 是以原点0为不动点的解析映射，若 F 在0的 Jacobi 阵的每一个特征根要么等于1，要么不是单位根，则对任意自然数 i，F^i 在0的不动点重数都等于 $\mu_F(0)$.

现在对二维解析映射的各阶迭代的不动点重数做详尽的讨论. 仍设 $F:\overline{\Delta^2}\to\mathbb{C}^2$ 是以原点0为不动点的解析映射，而 λ_1 和 λ_2 表示 F 在0的 Jacobi 阵 $J_F(0)$ 的两个特征根.

若 λ_1 和 λ_2 都不是单位根，则对任意自然数 i，0是 F^i 的简单不动点. 若 λ_1 和 λ_2 中有一个是1，则在上面已有详尽的讨论. 若 λ_1 和 λ_2 中有一个不是单位根，则由前面的讨论要么对任意自然数 i，0是 F^i 的简单不动点，要么存在一个自然数 m，使得对任意自然数 i，当 i 是 m 的倍数时，0是 F^i 的重数为 $\mu_{F^m}(0)>1$ 的不动点，而当 i 不是 m 的倍数时，0是 F^i 的简单不动点.

以下假定 λ_1 和 λ_2 分别是 m 次和 n 次本原根，并假定 m 和 n 都小于它们的最小公倍数 M. 这时必有 m，$n>1$ 且它们互不整除（对于 m 和 n 中一个是另一个的倍数的情形，可以归于前面的讨论）. 在这样的假定下我们将用扰动方法证明下述

定理 2 如果0是 F^M 的孤立不动点，则存在自然数 r_m，r_n 和 r_M，使得对任意自然数 i 有

(a) $\mu_{F^i}(0)=1$ 如果同时有 $m\nmid i$ 和 $n\nmid i$；

(b) $\mu_{F^i}(0)=r_m m+1$ 如果 $m\mid i$ 但 $n\nmid i$；

(c) $\mu_{F^i}(0)=r_n n+1$ 如果 $m\nmid i$ 但 $n\mid i$；

(d) $\mu_{F^i}(0)=r_m m+r_n n+r_M M+1$ 如果同时有 $m\mid i$ 和 $n\mid i$.

对上述定理未涉及的其他情形，讨论比较简单，此不赘述.

1 复解析映射零点的重数

我们知道，F 的不动点的重数事实上与 $F-I$ 的零点的重数是一回事，因此复解析映射零点重数的性质在不动点重数的研究中起着关键的作用．为证明本文的主要结果，本节将介绍一些关于零点重数及不动点重数的已有结果．

设 U 是 $\mathbb{C}^v$ 中的有界开集，G 是从 $\overline{U}$ 到 $\mathbb{C}^v$ 的解析映射．如果 $p\in U$ 是方程 $G(x)=0$ 的解，则把 p 叫做 G 的一个零点．如果 p 是 G 的孤立零点，则可以按如下方法定义其重数 $\mathrm{ind}(G,p)$：先找一个以 p 为心的开球 $B\subset U$，使得 p 是 G 在 $\overline{B}$ 内的惟一零点．再找一个 G 的趋于 0 的正则值序列 q_n，然后定义

$$\mathrm{ind}(G,\ p)\ =\ \lim_{q_n\to 0}\#\{z\in B;\ G(z)\ =\ q_n\},$$

这里"q_n 是正则值"的意思是 G 的 Jacobi 行列式在 $G^{-1}(q_n)$上不退化．关于上述定义的合理性，结合非线性泛函分析中的 Brouwer 度理论，文献[2]中有详尽的论述，它与一维映射零点的重数有类似的性质[2, 4]．

任取 $q\in\mathbb{C}^v\setminus G(\partial U)$，则由文献[2]中的引理 2.3，$G^{-1}(q)$ 是一个有限集．我们用 $\mathrm{d}(G,U,q)$表示 $G-q$ 的落在 U 中的零点的总个数，重零点按重数计算．$\mathrm{d}(G,U,q)$实际上是非线性泛函分析中的 Brouwer 度[2, 5]．

由定义，如果 $p\in U$ 是 G 的孤立不动点，则有 $\mu_G(p)=\mathrm{ind}(G-I,p)$．如果 G 在∂U 上无不动点，则有 $\mathrm{d}(G-I,U,0)=\sum\limits_{p\in\{x\in U;\ G(x)=x\}}\mu_G(p)$．

下面的几个结果是已知的[2]：

引理 1　设 $q\in\mathbb{C}^v\setminus G(\partial U)$，则存在一个正数 δ，使得对任意解析映射 $G_1:\ \overline{U}\to\mathbb{C}^v$，只要

$$\sup_{X\in\partial U}\|G_1(X)-G(X)\|<\delta,$$

便有 $\mathrm{d}(G_1,U,q)=\mathrm{d}(G,U,q)$．特别地，当 q_1 充分接近 q 时，$\mathrm{d}(G,U,q_1)=\mathrm{d}(G,U,q)$．

引理 2　如果 0 是 G 的孤立零点且 G 在 0 的 Jacobi 行列式等于零，则 $\mathrm{ind}(G,0)\geqslant 2$．

注记 1　由上述结果可知，如果 0 是 G 的孤立零点，则 $\mathrm{ind}(G,0)\geqslant 1$．因此对任意 $q\in\mathbb{C}^v\setminus G(\partial U)$，总有 $\mathrm{d}(G,U,q)\geqslant\#G^{-1}(q)\cap U$．

下面再介绍文献[2]中的一个定理作为本节的结束．

定理 B　设 $F:U\to\mathbb{C}^2$ 是解析映射．又设 0 是 F 的不动点，$J_F(0)$ 的两个特征根分别是 m 次和 n 次本原单位根，并且 m 和 n 都小于它们的最小公倍数 M．如果 0 是 F^M 的孤立不动点，则有

$$\mu_{F^M}(0)\geqslant\mu_{F^m}(0)+\mu_{F^n}(0).$$

2 解析映射的小扰动

本节仍设 U 是 $\mathbb{C}^v$ 中的有界开集，F 是从 $\overline{U}$ 到 $\mathbb{C}^v$ 的解析映射．对于 $\overline{U}$ 的任意子集 V，用 $\mathrm{Fix}_V(F)$表示 F 的落在 V 中的不动点集合．设 $p\in U$，k 是一个自然数，如果 $F^k(p)=p$ 但对任意自然数 $i<k$，$F^i(p)\neq p$，则把 p 叫做 F 的一个周期为 k 的周期点，简称 k 周期点，而把集合 $\mathrm{Orb}_F(p)=\{p,F^1(p),\cdots,F^{k-1}(p)\}$叫做 F 的一个 k 周期轨道．如果 p 是 F 的 k 周期点

且 $J_{F^k}(p)$的特征根的绝对值都不等于 1,则称 p 是双曲的. 如果 p 是 F 的一个双曲 k 周期点,则它是 F^k 的一个简单不动点，而且对任意一个自然数 i, p 也是 F^i 的双曲周期点. 我们用 $\mathbb{H}(\bar{U})$ 表示从 $\bar{U}$ 到$\mathbb{C}^v$ 的所有解析映射的集合.

定理3 设 V 是 U 中的开集, $\bar{V}\subset U$, M 是一个自然数. 如果对任意自然数 $i\leqslant M$, F^i 在 $\bar{V}$ 上有定义且在 ∂V 上没有不动点,则对任意 $\delta>0$,存在 $F_\delta\in\mathbb{H}(\bar{U})$, 使得 $\|F_\delta-F\|_{\bar{V}}=\sup\limits_{x\in\bar{V}}\|F_\delta(x)-F(x)\|<\delta$, 而且对任意自然数 $i\leqslant M$, F^i 在 $\bar{V}$ 中的不动点都是双曲的.

这一结果并不能由关于映射的 Kupka-Smale 定理[6]或其推广了的形式得到. Kupka-Smale 定理及其推广形式涉及的都是微分自同胚，而这里的映射并不是同胚. 下面的引理可以从定义直接得到:

引理3 如果 p 是 F 的双曲 k 周期点,则存在 p 在 U 中的开邻域 V 及正数 δ, 使得对任意 $F_1\in\mathbb{H}(\bar{U})$, 只要 $\|F_1-F\|_{\bar{V}}<\delta$, F_1^k 便在 $\bar{V}$ 中有惟一不动点,且这个不动点是双曲的.

引理4 设 p 是 F 的一个 k 周期点，则对任意 $\delta>0$, 存在 $F_\delta\in\mathbb{H}(\bar{U})$,使得 $\|F_\delta-F\|_{\bar{U}}<\delta$, 并且 p 是 F_δ 的双曲 k 周期点.

证 设 $\mathrm{Orb}_F(p)=\{A_1, A_2,\cdots, A_k\}$是 F 的包含 p 的周期轨道,其中 $A_i=F^{i-1}(p)$,又设 $A_i=(a_{i1}, a_{i2},\cdots,a_{iv})$ $(i=1, 2, \cdots, k)$. 由于 $A_i(i=1, 2,\cdots, k)$两两不同，因此总可以假定对每一个自然数 $j\leqslant v$, $a_{i_1j}\neq a_{i_2j}$(如果 $1\leqslant i_1<i_2\leqslant k$)，否则只需进行适当的坐标变换. 对 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_v)\in\mathbb{C}^v$ 和 $s\in(0, 1)$, 令

$$h_j(s, x_j)=x_j+c_js(x_j-a_{1j})\prod_{i=2}^{k}(x_j-a_{ij})^2,\quad j=1,2,\cdots, v,$$

其中 c_j 是适当选取的正数,使得 $c_j\prod\limits_{i=2}^{k}(a_{ij}-a_{1j})^2=1$ 对任意自然数 $j\leqslant v$ 都成立. 再令

$$H_s(X)=(h_1(s,x_1),h_2(s,x_2),\cdots,h_v(s,x_v)),$$

则 $H_s(A_i)=A_i(i=1,2,\cdots,k)$, 且对 $i=2,\cdots, k$, H_s在 A_i 的 Jacobi 阵是单位阵 I, 而在 $A_1=p$ 是 $(1+s)I$.

令 $F_s(X)=F\circ H_s(X)$. 注意到 $A_i=F_s^{i-1}(A_1)$ $(i=1,2,\cdots, k)$, 知 F_s^k 在 p 的 Jacobi 阵等于

$$\begin{aligned}
&J_{F_s}(A_k)\cdot J_{F_s}(A_{k-1})\cdot\cdots\cdot J_{F_s}(A_1)\\
&=J_F(A_k)\cdot J_{H_s}(A_k)\cdot J_F(A_{k-1})\cdot J_{H_s}(A_{k-1})\cdot\cdots\cdot J_F(A_1)\cdot J_{H_s}(A_1)\\
&=J_F(A_k)\cdot J_F(A_{k-1})\cdot\cdots\cdot J_F(A_1)\cdot J_{H_s}(A_1)\\
&=(1+s)J_{F^k}(p).
\end{aligned}$$

显然, $F_s^k(p)=p$. 对足够小的 $s>0$, $(1+s)J_{F^k}(p)$ 没有绝对值等于 1 的特征根,而且当 $s\to0$ 时, F_s 在 $\bar{U}$ 上一致收敛于 F. 证毕.

定理3的证 由引理1,可设 δ 已足够小,使得对任意 $G\in\mathbb{H}(\bar{U})$, 只要 $\|F-G\|_{\bar{V}}<\delta$, G^i 便对 $i=1,2,\cdots$, M 在 $\bar{V}$ 上有意义,在∂V 上没有不动点，而且

$$\mathrm{d}(G^i-I,V,0)=\mathrm{d}(F^i-I,V,0),\quad i=1,2,\cdots, M. \tag{1}$$

以下记 $\mu_i=\mathrm{d}(G^i-I,V,0)$.

由(1)式及引理 3 和 4，经过至多 μ_1 步的小扰动，可以得到一个映射 $G_1 \in \mathbb{H}(\bar{U})$，使得 $\| G_1 - F \|_{\bar{V}} < \delta/2$且 G_1 在 V 中的不动点全是双曲的. 同理，经过至多 μ_2 步的小扰动，可以得到一个映射 $G_2 \in \mathbb{H}(\bar{U})$，使得 $\| G_2 - G_1 \|_V < \delta/2^2$ 且 G_2 在 V 中的周期不超过 2 的周期点都是双曲的. 依次类推，最终可以得到从 $\bar{U}$ 到 $\mathbb{C}^v$ 的解析映射 $G_1, G_2, \cdots, G_M$，使得

$$\| G_n - G_{n-1} \|_V < \delta/2^n, \quad n = 1,2,\cdots, M$$

$(G_0 = F)$，且对每个自然数 $n \leqslant M$，G_n 在 V 中的周期不超过 n 的周期点都是双曲的. 显然 $F_\delta = G_M$ 满足定理的要求.

推论 1　如果 p 是 F 的重数为 μ 的不动点，则对任意自然数 i，F^i 在 p 的不动点重数至少是 μ.

证　不妨设 0 是 F 的孤立不动点. 由不动点重数的定义及定理 3，存在在 $\bar{U}$ 上一致收敛于 F 的序列 $\{F_n\} \subset \mathbb{H}(\bar{U})$，使得每个 F_n 在 p 附近至少有 μ 个不动点 $x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{n\mu}$ 且 $x_{nj} \to p$ $(n \to \infty,\ j = 1,2,\cdots,\ \mu)$. 显然对任意自然数 i，这些不动点都是 F_n^i 的不动点，且 $\{F_n^i\}$ 在 p 的某个邻域上一致收敛于 F^i. 由引理 1 及注记 1，对任意自然数 i，F^i 在 p 的不动点重数至少是 μ. 证毕.

再介绍一个后面将要用到的关于实可微映射的结果[2].

定理 C　设 δ 是一个正数，$M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ 而 $F_m (m = 0,1,2,\cdots)$是从 $\mathbb{R}^v$ 中的球 $B(0,\delta) = \{X \in \mathbb{R}^v; \| X \| < \delta\}$到 $\mathbb{R}^v$ 的 C^1 映射的序列. 如果

a) $\sup_{\| Y \| \leqslant \delta} \| F_m(Y) - F_0(Y) \|_{C^1} \to 0 (m \to \infty)$;

b) $F_0(0) = 0$，对任意 $m \in \mathbb{N}$，F_m 有一个 M 周期点 Y_n，而且 $Y_n \to 0$ $(n \to \infty)$，

则 $J_{F_0}(0)$有一组满足如下条件的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$:

i) $\lambda_i^M = 1$ $(i = 1,2,\cdots,\ s)$;

ii) 对任意自然数 $j < M$，存在一个 λ_i，使得 $\lambda_i^j \neq 1$.

这里 $\| F_m(Y) - F_0(Y) \|_{C^1} = \| F_m(Y) - F_0(Y) \| + \| J_{F_m}(Y) - J_{F_0}(Y) \|$，而 $\| \cdot \|$ 是 Euclid 范数，另外 $J_{F_m}(Y)$在这里被看成是 $\mathbb{R}^{v \times v}$中的向量.

推论 2　设 F: $B(0,\delta) \to \mathbb{R}^v$ 是 C^1 映射，0 是 F 的不动点. 如果 0 是 F 的 M 周期点的聚点，则 $J_F(0)$有一组满足如下条件的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$:

i) $\lambda_i^M = 1$ $(i = 1,2,\cdots,\ s)$;

ii) 对任意自然数 $j < M$，存在一个 λ_i，使得 $\lambda_i^j \neq 1$.

3　主要结果的证明

命题 1 的证　显然 $J_F(0)$有一个特征根等于 1，故 δ 是 $J_F(0)$的另一特征根. 对于满足 $\delta^i = 1$ 的自然数 i，Friedland 和 Milnor 已在文献[1]中指出 $\mu_{F^i}(0) > \mu_F(0)$，但没有给出证明. 下面先对这一论断给出一个简单的证明. 如果 δ 不是单位根，则由定理 A，命题已经得证. 故不妨设 δ 是 m 次本原单位根，$m > 1$ 且 0 是 F^m 的孤立不动点. 先证明

$$\mu_{F^m}(0) > \mu_F(0). \tag{2}$$

选取适当的坐标变换，总可假定

$$F(x,y) = (x + r_1(x,y),\ \delta y + r_2(x,y)),$$

其中 r_1 和 r_2 是高阶项. 由隐函数定理,方程

$$\delta y + r_2(x,y) = y,\ y(0) = 0$$

在原点附近有惟一的解析解 $y = h(x)$, 而且不难看出 $x=0$ 是 $r_1(x, h(x))$ 的重数为 $\mu_F(0)$ 的零点. 从而对充分小的 $s>0$, $r_1(x, h(x)) + sx$ 在 $x=0$ 附近恰有 $\mu_F(0)$ 个互不相同的零点. 这说明,对充分小的 $s>0$, $F_s(x,y) = (x + sx + r_1(x,y),\ \delta y + r_2(x,y))$ 在原点 $0=(0,0)$ 附近恰好有 $\mu_F(0)$ 个互不相同的不动点. 将这些不动点记为 $X_j(s)$ ($j=1,2,\cdots,\mu_F(0)$), 其中 $X_1(s)\equiv 0$. 显然这些不动点都是 F_s^m 的不动点,且当 $s\to 0$ 时它们都趋于原点. F_s^m 在 $X_1=0$ 的 Jacobi 阵有一个特征根是 $\delta^m=1$, 从而由引理 2, X_1 是 F_s^m 的重数至少是 2 的不动点. 这样 F_s^m 便在 0 附近有至少 $\mu_F(0)+1$ 个不动点,重不动点按重数记,且这些不动点都随 s 趋于 0 而趋于原点. 另一方面,当 $s\to 0$ 时, F_s^m 在原点的某邻域上是一致收敛的. 由不动点重数的性质,我们得到(2)式. 剩下需要证明的是对任意自然数 k, F^{mk} 与 F^m 在原点有相同的不动点重数, 而这可以由定理 1 得到, 因为 F^m 的两个特征根都是 1. 证毕.

定理 1 的证 设 F 在原点 0 的 Jacobi 阵 $J_F(0)$的每一个特征根要么是 1, 要么不是单位根. 我们来证明

$$\mu_{F^i}(0) = \mu_F(0),\ i = 1,2,\cdots. \tag{3}$$

反设(3)式对某个 $i=M$ 不成立, 则由推论 1, 有

$$\mu_{F^M}(0) > \mu_F(0). \tag{4}$$

不妨设 M 是使(4)式成立的最小自然数. 如果 $\mu_{F^M}(0) = +\infty$, 则由 M 的最小性, 在原点的任意邻域内都存在 F 的 M 周期点, 从而由推论 2, $J_F(0)$有一个不等于 1 的单位根. 这与假设矛盾. 因此只能有 $\mu_{F^M}(0) < +\infty$.

由假设, 存在原点的邻域 V, 使得 $X=0$ 是 F^i ($i=1,2,\cdots,M$) 在 $\bar V$ 中的惟一不动点. 由定理 3, 存在在 $\bar V$ 上一致收敛于 F 的解析映射序列 $F_n:\bar U\to\mathbb{C}^v$, 使得对任意自然数 $i\leqslant M$, F_n^i 在∂V 上没有不动点, 而在 V 中的不动点都是双曲的.

由引理 1, 对充分大的 n 有

$$\mathrm{d}(F_n^i - I, V, 0) = \mathrm{ind}\,(F^i - I, 0),\ 1 \leqslant i \leqslant M. \tag{5}$$

所以由(4)式, 对充分大的 n 有

$$\#\,\mathrm{Fix}_V(F_n^M) = \mathrm{ind}(F^M - I, 0) > \mathrm{ind}(F - I, 0) = \#\,\mathrm{Fix}_V(F_n),$$

进而有 $\mathrm{Fix}_V(F_n^M)\setminus \mathrm{Fix}_V(F_n)\neq\varnothing$; 另一方面, 由 M 的取法和(5)式有

$$\mathrm{Fix}_V(F_n) = \mathrm{Fix}_V(F_n^2) = \cdots = \mathrm{Fix}_V(F_n^{M-1}).$$

所以对充分大的 n, F_n有一个 M 周期点 $X_n\in V$. 但 $X=0$ 是 F^M 在 $\bar V$ 上的惟一不动点,故 $X_n\to 0$ ($n\to 0$). 由定理 C, $J_F(0)$ 必有一个特征根是不等于 1 的单位根. 这与定理假设矛盾. 故(3)式成立, 定理得证.

定理 2 的证 (a)是显然的, 我们只证(b) ~ (d). 由假设, 存在原点 0 的开邻域 V, $\bar V\subset\Delta^2$, 使得

$$\mathrm{Fix}_{\bar V}(F^M) = \mathrm{Fix}_{\bar V}(F^m) = \mathrm{Fix}_{\bar V}(F^n) = \mathrm{Fix}_{\bar V}(F) = \{0\}. \tag{6}$$

由定理3, 存在在 $\bar V$ 上一致收敛到 F 的解析映射序列 $F_q:\bar\Delta^2\to\mathbb{C}^2$ ($q=1,2,\cdots$), 使得对任意自

然数 j $(1\leqslant j\leqslant M)$，$F_q^j$ 在 ∂V 上没有不动点，而在 V 中的不动点都是双曲的．由引理 1 及注记 1，对充分大的 q，

$$\#\operatorname{Fix}_{\overline{V}}(F_q^j) = \mathrm{d}(F_q^j - I, V, 0) = \operatorname{ind}(F^j - I, 0), \quad 1 \leqslant j \leqslant M. \tag{7}$$

故由假设有

$$\mathrm{d}(F_q^j - I, V, 0) = \operatorname{ind}(F^j - I, 0) = 1, \quad 1 \leqslant j < M, m \nmid j, n \nmid j.$$

这说明对充分大的 q，存在惟一的 $Z_q \in V$，使得

$$\operatorname{Fix}_V(F_q^j) = \operatorname{Fix}_V(F_q) = \{Z_q\}, \quad 1 \leqslant j < M, m \nmid j, n \nmid j. \tag{8}$$

由于 $\lambda_1^m = 1$，由引理 2 与(6)和(7)式，对充分大的 q 有

$$\mathrm{d}(F_q^m - I, V, 0) = \operatorname{ind}(F^m - I, 0) > 1,$$

故由(7)和(8)式，$\operatorname{Fix}_V(F_q^m) \setminus \operatorname{Fix}_V(F_q) \neq \varnothing$，且当 $m < n$ 时，$\operatorname{Fix}_V(F_q^m) \setminus \operatorname{Fix}_V(F_q)$中的每一点 X_q 都是 F 的 m 周期点．当 $m > n$ 时 X_q 也是 F_q 的 m 周期点，不然则由(8)式，存在自然数 r，使得 X_q 为 F_q 的 $r\,n$ 周期点且还有$(r\,n) \mid m$，这与定理条件矛盾．所以 $\operatorname{Fix}_V(F_q^m) \setminus \operatorname{Fix}_V(F_q)$ 中的点都是 F_q 的 m 周期点．

由(6)式，对充分大的 q 及任意一点 $X_q \in \operatorname{Fix}_V(F_q^m) \setminus \operatorname{Fix}_V(F_q)$，$X_q$ 对应的周期轨道 $\operatorname{Orb}_{F_q}(X_q) = \{F_q^i(X_q); i \in \mathbb{N}\}$包含于 $\operatorname{Fix}_V(F_q^m) \setminus \operatorname{Fix}_V(F_q)$．由于每个这样的轨道中恰有 m 个点，因此 m 是 $\#\{\operatorname{Fix}_V(F_q^m) \setminus \operatorname{Fix}_V(F_q)\}$ 的一个因子．考虑到 $\{Z_q\} = \operatorname{Fix}_V(F_q) \subset \operatorname{Fix}_V(F_q^m)$，由(7)式，存在自然数 r_m，使得

$$\mu_{F^m}(0) = \operatorname{ind}(F^m - I, 0) = \mathrm{d}(F_q^m - I, V, 0) = \#\operatorname{Fix}_V(F_q^m) = r_m m + 1,$$

对任意自然数 i，当 $m \mid i$ 时，F^i 在 0 的 Jacobi 行列式等于 λ_2^i．由定理 A，当 $m \mid i$ 但$n \nmid i$ 时有

$$\mu_{F^i}(0) = m r_m + 1.$$

同理存在自然数 r_n，使得对任意自然数 i，当 $n \mid i$ 但$m \nmid i$ 时，有

$$\mu_{F^i}(0) = n r_n + 1.$$

这已证明了 (b) 和(c)．下面来证 (d)．

由于 $m \neq n$，由上面的讨论可知，对充分大的 q，

$$\operatorname{Fix}_V(F_q^m) \cap \operatorname{Fix}_V(F_q^n) = \{Z_q\}.$$

由此及(7)式得到

$$\#\{\operatorname{Fix}_V(F_q^m) \cup \operatorname{Fix}_V(F_q^n)\} = \mu_{F^m}(0) + \mu_{F^n}(0) - 1. \tag{9}$$

另一方面，由定理 3，

$$\mathrm{d}(F^M - I, V, 0) \geqslant \operatorname{ind}(F^m - I, 0) + \operatorname{ind}(F^n - I, 0) = \mu_{F^m}(0) + \mu_{Fdf^n}(0),$$

再结合(7)式，对充分大的 q 有

$$\mathrm{d}(F_q^M - I, V, 0) \geqslant \mathrm{d}(F_q^m - I, V, 0) + \mathrm{d}(F_q^n - I, V, 0) = \mu_{F^m}(0) + \mu_{F^n}(0),$$

进而由(7)式，有 $\#\{\operatorname{Fix}_V(F_q^M)\} \geqslant \mu_{F^m}(0) + \mu_{F^n}(0)$．结合(9)式最终得到

$$\operatorname{Fix}_V(F_q^M) \setminus \{\operatorname{Fix}_V(F_q^m) \cup \operatorname{Fix}_V(F_q^n)\} \neq \varnothing.$$

任取 $Y_q \in \operatorname{Fix}_V(F_q^M) \setminus \{\operatorname{Fix}_V(F_q^m) \cup \operatorname{Fix}_V(F_q^n)\}$，由(6)式有

$$Y_q \to 0 \ (q \to \infty). \tag{10}$$

显然 Y_q是 F_q的周期点．设 L_q 是其周期，则 $L_q \leqslant M$ 且 $L_q \notin \{1, m, n\}$．下面证明当 q 充分大

时 $L_q=M$. 如不然，则存在自然数 $L<M$ 和自然数构成的数列 $\{q_\theta\}_{\theta=1}^{\infty}$，使得 $L\notin\{1,m,n\}$，Y_{q_θ}都是 F_{q_θ}的 L 周期点. 由定理 5，或者 $L=m$，或者 $L=n$，或者 L 是 m 和 n 的最小公倍数，这都导致矛盾. 故当 q 充分大时 $L_q=M$. 由 F_q 的收敛性及(6)和(10)式知道，对任意 $Y_q\in \mathrm{Fix}_V(F_q^M)\setminus\{\mathrm{Fix}_V(F_q^m)\cup\mathrm{Fix}_V(F_q^n)\}$，都有 $\mathrm{Orb}_{F_q}(Y_q)\subset V$. 因而存在自然数 r_M，使得

$$\#\{\mathrm{Fix}_V(F_q^M)\setminus\{\mathrm{Fix}_V(F_q^m)\cup\mathrm{Fix}_V(F_q^n)\}\}=r_MM.$$

显然，$\mathrm{Fix}_V(F_q^m)\cup\mathrm{Fix}_V(F_q^n)\subset\mathrm{Fix}_V(F_q^M)$. 故由(9)式及已经证明的 (b) 和(c)有 $\#\{\mathrm{Fix}_V(F_q^M)\}=r_mm+r_nn+r_MM+1$. 进一步由(7)式得到

$$\mu_{F^M}(0)=\mathrm{d}(F_q^M-I,V,0)=\#\{\mathrm{Fix}_V(F_q^M)\}=r_mm+r_nn+r_MM+1.$$

由于 $J_{F^M}(0)$ 的两个特征根都是 1，由定理 1，对每个自然数 j 有

$$\mu_{F^{Mj}}(0)=r_mm+r_nn+r_MM+1.$$

至此(d) 得证.

参 考 文 献

1 Friedland S, Milnor J. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. Ergod Th & Dynam Sys, 1989, 9: 67 ~ 99

2 Zhang G Y. Bifurcations of periodic points of holomorphic maps from $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}^2$. Proc London Math Soc, 1999, 79(3): 353 ~ 380

3 Cronin J. Analytic functional mappings. Ann Math, 1953, 58: 175 ~ 181

4 Milnor J. Singular Point of Complex Hypersurfaces. Ann Math Stud 61. Princeton: Princeton University Press, 1968

5 Deimling K. Nonlinear Functional Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1985

6 Palis J, Melo W. Geometric Theory of Dynamical Systems, An Introduction. New York: Springer-Verlag, 1982