

有限圆柱体的径向牛顿引力场

罗 俊 张学荣 李建国 范淑华

(华中理工大学引力实验中心, 武汉 430074)

张 平 华

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100039)

摘 要

本文给出了有限圆柱体径向牛顿引力场的一个新的解析表达式, 并由此导出对于一定质量和密度的圆柱体, 当其直径与长度之比为 $D_0/L_0 = 1.02928$ 时, 具有最大径向牛顿吸引力。这一比值与 Cook 和陈应天给出的结果完全相同, 但新的表达式在形式上较之更为简洁。

关键词: 圆柱体, 牛顿引力场

自从 Cavendish^[1] 报道了引力常数 G 的第一个实验值以来, 在近百年的时间内许多物理学家为了提高 G 的测量精度, 付出了艰苦的努力, 但至今仍未取得实质性进展。Cavendish 的追随者们为了获得较高测量精度的 G 而在实验中采用了不同的测量方法和不同形状的吸引质量。由于实心圆柱体具有加工容易、测量方便等实用上的许多优点, 所以人们利用它作为一种合适的吸引质量。因此, 有限圆柱体引力场的解析解不仅仅是因为数学上的兴趣, 而且在实际应用方面也是具有相当价值的^[2]。但由于数学上的困难, 以前一直没有关于有限圆柱体引力场的解析解。

1982 年, Cook 和陈应天^[3]以他们极大的细心和数学上的技巧给出了有限圆柱体引力场的第一个精确解, 从而使得在两个圆柱体引力场中的扭称行为的非线性特征(如在 Heyl 实验中^[4])的详细讨论成为可能。最近, 我们重新计算了有限圆柱体在任意点所产生的径向牛顿引力, 得到了一个新的解析表达式。利用这一新的表达式可导出: 对于一定质量和密度的圆柱体当其直径与长度之比为 $D_0/L_0 = 1.02928$ 时, 具有最大径向牛顿吸引。这一比值与 Cook 等人给出的结果完全相同。利用新的表达式也可对 Heyl 实验中的近似计算结果进行验证, 但它比 Cook 等人给出的第一个表达式在形式上更为简洁。

一、有限圆柱体径向引力场公式

现在考虑一个长为 L , 半径为 R 以及密度为 ρ 的圆柱体(如图 1 所示)。由圆柱体产生的

作用在单位质量质点上的径向牛顿万有引力为

$$F_a^{(1)} = \frac{\partial}{\partial a} \left(- \int_{-R}^R dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \int_0^L \frac{G\rho}{\sqrt{y^2+z^2+(x-a)^2}} dz \right), \quad (1)$$

其中 a 是 P 点到原点之间的距离。对变量 a 求偏微分并对变量 z 和 x 积分可得到下列表达式:

$$F_i^{(1)} = 2G\rho(-I_1 + I_2), \quad (2)$$

其中 I_1 和 I_2 分别为

$$I_1 = \int_0^R \ln \left(\frac{L + (L^2 + R^2 + a^2 + 2a\sqrt{R^2-y^2})^{1/2}}{L + (L^2 + R^2 + a^2 - 2a\sqrt{R^2-y^2})^{1/2}} \right) \cdot dy, \quad (3)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^R \ln \left(\frac{R^2 + a^2 + 2a\sqrt{R^2-y^2}}{R^2 + a^2 - 2a\sqrt{R^2-y^2}} \right) dy. \quad (4)$$

第二个积分很容易算出,其结果是

$$I_2 = \begin{cases} \pi R^2/2a & \text{当 } a \geq R \text{ 时,} \\ \pi a/2 & \text{当 } a \leq R \text{ 时.} \end{cases} \quad (5)$$

利用分部积分公式,第一个积分 I_1 可写成如下形式:

$$I_1 = \frac{R}{B} \int_{1+\sqrt{A-B}}^{1+\sqrt{A+B}} \frac{[B^2 - A^2 + 2A(t-1)^2 - (t-1)^4]^{1/2}}{t} dt. \quad (6)$$

这里 $A = 1 + (R^2 + a^2)/L^2$, $B = 2Ra/L^2$, t 为积分变量。

现在考虑如下变量替换:

$$u = \sqrt{\frac{A+B-(t-1)^2}{2B}}.$$

方程(6)变成

$$I_1 = 4BR \int_0^1 \frac{u^2 \sqrt{1-u^2} du}{[1 + \sqrt{A+B-2Bu^2}] \sqrt{A+B-2Bu^2}}. \quad (7)$$

被积函数的分子分母同乘因子 $(1 - \sqrt{A+B-2Bu^2})$, 则方程(7)变成

$$I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14}, \quad (8)$$

其中

$$I_{11} = -\frac{2Rh}{\sqrt{A+B}} \int_0^1 \frac{u^4 du}{(1+hu^2) \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad (9)$$

$$I_{12} = \frac{2Rh}{\sqrt{A+B}} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1+hu^2) \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad (10)$$

$$I_{13} = 2Rh \int_0^1 \frac{u^4 du}{(1+hu^2) \sqrt{1-u^2}}, \quad (11)$$

$$I_{14} = -2Rh \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1+hu^2) \sqrt{1-u^2}}. \quad (12)$$

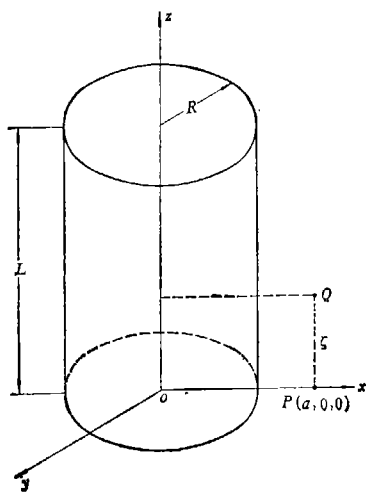


图 1

$$k = \sqrt{\frac{2B}{A+B}}, \quad h = \frac{2B}{1-A-B}.$$

分别计算 I_{11} , I_{12} , I_{13} 和 I_{14} 并将其与 I_2 结合起来, 最后得到

$$\begin{aligned} \frac{F_a^{(1)}}{2G\rho} &\equiv C_{y1}(L, R, a) \\ &= \frac{L^2}{2a \sqrt{1 + \frac{(R+a)^2}{L^2}}} \left\{ \left[1 + 2 \frac{R^2 + a^2}{L^2} \right] K(k) - \left[1 + \frac{(R+a)^2}{L^2} \right] E(k) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(R-a)^2}{L^2} \pi(h, k) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$k = \sqrt{\frac{4aR/L^2}{1 + (R+a)^2/L^2}}, \quad h = -\frac{4aR}{(R+a)^2}, \quad (14)$$

这里 $K(k)$, $E(k)$ 和 $\pi(h, k)$ 分别为第一、第二和第三型椭圆积分.

方程(13)是圆柱体底平面上一点的牛顿引力场公式. 根据万有引力的叠加原理, 任意一点 Q 的牛顿引力场公式应为

$$\frac{F_a}{2G\rho} = C_{y1}(L - \zeta, R, a) + C_{y1}(\zeta, R, a), \quad (15)$$

这里 L 是圆柱体的长, ζ 是 Q 点到圆柱体底平面的距离 (如图 1 所示). 如果检验质量位于圆柱体的中截面上, 则牛顿引力是

$$F_a^{(2)} = 2F_a^{(1)} = 4G\rho C_{y1}(L/2, R, a). \quad (16)$$

二、两种表达式的等价性证明

我们来证明有限圆柱体径向引力场的两种表达式是完全等价的. 考虑方程(13)中 $K(k)$ 的具体表达式

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}. \quad (17)$$

在方程(17)中利用下面的变换:

$$\sin \phi = \frac{(1 + k_1) \sin \theta}{1 + k_1 \sin^2 \theta}. \quad (18)$$

我们得到如下关系式:

$$K(k) = (1 + k_1)K(k_1), \quad (19)$$

其中

$$k_1 = \frac{\sqrt{1 + (R+a)^2/L^2} - \sqrt{1 + (R-a)^2/L^2}}{\sqrt{1 + (R+a)^2/L^2} + \sqrt{1 + (R-a)^2/L^2}}. \quad (20)$$

利用上述变换, 还可导出

$$E(k) = \frac{2}{1 + k_1} \cdot E(k_1) - (1 - k_1)K(k_1), \quad (21)$$

$$\pi(h, k) = (1 + k_1) \left[K(k_1) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \pi(\gamma, k_1) - \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \pi(\beta, k_1) \right]. \quad (22)$$

这里

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\alpha} k_1, \quad \beta = \alpha k_1. \\ \alpha &= \frac{1 - \sqrt{1 + (R + a)^2/L^2}}{1 + \sqrt{1 + (R + a)^2/L^2}}.\end{aligned}\quad (23)$$

将(19),(21)和(22)式以及下列方程(见附录)

$$\pi(k_1, k_1) = \frac{\pi}{4(1 + k_1)} + \frac{1}{2} K(k_1), \quad (24)$$

$$\pi(\gamma, k_1) = \frac{\pi}{2(1 + k_1)} \sqrt{\frac{A + B - 1}{A - B - 1}} - \pi(\beta, k_1) + K(k_1) \quad (25)$$

代入方程(13),最终得到

$$\begin{aligned}C_{yi}(L, R, a) &= \frac{L^2}{a \left[\sqrt{1 + (R + a)^2/L^2} + \sqrt{1 + \frac{(R - a)^2}{L^2}} \right]} \\ &\cdot \left\{ \left[1 + \left(\frac{R + a}{L} \right)^2 + \sqrt{1 + \left(\frac{R + a}{L} \right)^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R - a}{L} \right)^2} + \frac{2aR}{L^2} \right) \right] K(k_1) \right. \\ &- \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{R + a}{L} \right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{R - a}{L} \right)^2} \right]^2 \cdot E(k_1) \\ &- 2 \cdot \frac{R^2 + a^2}{L^2} \sqrt{1 + \left(\frac{R + a}{L} \right)^2} \pi(k_1, k_1) \\ &\left. + 2 \left(\frac{R - a}{L} \right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{R + a}{L} \right)^2} \pi(\beta, k_1) \right\} + I_2, \quad (26)\end{aligned}$$

式中

$$I_2 = \begin{cases} \pi R^2/2a, & a \geq R, \\ \pi a/2, & a \leq R. \end{cases}$$

这正是 Cook 等人给出的第一个表达式¹⁾(见参考文献[3]中的(9)式)。

三、公式的应用

作为新的表达式的一个应用,我们利用它来检验 Heyl 在实验计算中所利用的近似公式。在计算单个圆柱体在其中截面上的引力场时,Heyl 考虑

$$a = R = \frac{1}{2} L = 10\text{cm}.$$

他保留级数近似公式的前 11 项,所得结果为

$$F_a^{(2)}/\pi a G \rho = 1.5355797.$$

根据方程(16)和(13),当 $a = R$ 时,这个值是

$$\frac{F_a^{(2)}}{\pi a G \rho} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} [K(k) - E(k)] = 1.5355783.$$

1) 原表达式有误(作者注)。

由此可见, Heyl 的近似解是相当精确的. 这正是他的实验结果为什么经常被引用的原因之一.

从方程(13)可清楚地看到, 检验质量在圆柱体引力场中的运动是高度非线性的, 尽管其位移量非常小. 有关扭称在圆柱体引力场中的非线性运动情况也可利用方程(13)进行详细讨论.

四、圆柱体的理想形状

选用圆柱体作为引力实验中的吸引质量, 有许多众所周知的优点. 理想的圆柱体形状能在质量和密度一定的情况下给出最大的径向牛顿引力场. 根据前面给出的有限圆柱体径向牛顿引力场的解析解, 可以导出理想圆柱体的直径和长度的比值(几何因子). 由于径向引力场与检验质量到轴心的距离有关, 因而并不存在一个稳定点. 但当我们考虑 a 一定时, 吸引质量在该点所产生的引力场的大小就与其几何因子有关. 为了方便起见(但并不失一般性), 可以考虑 $a = R$ 时的情况, 所得结果对于 $a > R$ 时的情况完全适用.

如果 $a = R$, 方程(13)简化为

$$F_a^{(1)} = \frac{L}{k} [K(k) - E(k)] \cdot 2G\rho. \quad (27)$$

为了求得比值 R/L , 须求方程(27)在下列条件下的最大值:

$$R^2 L = \text{常数}. \quad (28)$$

利用 Lagrange 乘子法求条件极值, 可以得到在条件(28)下方程(27)的平稳点方程

$$K(k) - E(k) - \frac{[E(k) - (1 - k^2)K(k)]}{k(1 - k^2)} \cdot \frac{3x}{[1 + 4x^2]^{3/2}} = 0, \quad (29)$$

式中

$$k = \sqrt{\frac{4x^2}{1 + 4x^2}}, \quad x = R/L.$$

利用计算机求解上述平稳点方程得到如下结果:

$$x = 1.02928,$$

亦即

$$R/L = 1.02928.$$

不难证明, 这一解给出了方程(13)的最大值. 类似地根据引力叠加原理, 当检验质量被放在圆柱体的中截面上时, 其结果是

$$D_0/L_0 = 1.02928.$$

这里 D_0 , L_0 分别表示圆柱体的直径和长度.

上述结果表明, 在实验中采用圆柱体作为吸引质量时, 将其加工成正圆柱体(直径与长度之比等于1)能得到更好的引力吸引效应, 这一结论与 Cook 等人^[3]给出的结论完全吻合.

附 录

首先考虑积分函数

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - \sqrt{A + B - 2B \sin^2 \varphi}}, \quad (\text{A-1})$$

式中 A 和 B 与前面的定义相同, 利用不同的步骤进行积分, 可得到一些关于 I 的不同表达形式.

在表达式 (A-1) 中作变量代换

$$\sin \varphi = \frac{(1+k_1)\sin \theta}{1+k_1\sin^2 \theta}, \quad (\text{A-2})$$

可导出

$$I = \frac{2(1+k_1)}{1-(A+B)} \pi(\gamma, k_1) - \frac{1+k_1}{1+\sqrt{A+B}} K(k_1). \quad (\text{A-3})$$

如果将 (A-1) 式的被积函数的分子分母同乘因子 $\sqrt{A+B-2B\sin^2 \varphi}$ 可得

$$I = \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{A+B-2B\sin^2 \varphi}}{1-\sqrt{A+B-2B\sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

在上式中作 (A-2) 式中的变量代换可得到 I 的另一个表达式:

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{(1+k_1)\sqrt{A+B}}{1+\sqrt{A+B}} K(k_1) - 2(1+k_1)\pi(k_1, k_1) + \frac{2(1+k_1)}{1-(A+B)} \pi(\gamma, k_1). \quad (\text{A-4})$$

如果在 (A-1) 式中将被积函数分母有理化, 然后作如前的变量代换可得到又一个关于 I 的表达式

$$\begin{aligned} I = \pi \sqrt{\frac{A+B-1}{A+B-1}} \frac{1}{1-(A+B)} - \frac{2(1+k_1)}{1-(A+B)} \pi(\beta, k_1) \\ + \frac{1+k_1}{1-\sqrt{A+B}} K(k_1). \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

利用 (A-3), (A-4) 和 (A-5) 的等价性可得到如下两个表达式:

$$\pi(k_1, k_1) = \frac{\pi}{4(1+k_1)} + \frac{1}{2} K(k_1), \quad (\text{A-6})$$

$$\pi(\gamma, k_1) = \frac{\pi}{2(1+k_1)} \sqrt{\frac{A+B-1}{A+B-1}} - \pi(\beta, k_1) + K(k_1). \quad (\text{A-7})$$

参 考 文 献

- [1] Cavendish, H. H., *Phil. Trans. R. Soc.*, **88**(1798), 467.
- [2] Cook, A. H., *Proc. Int. Conf. on Precision Measurement and Fundamental Constants*, 1970, **475**.
- [3] Cook, A. H. & Chen, Y. T., *J. Phys.*, **15**(1982), 1591.
- [4] Heyl, P. R., *J. Res. Nat. Bur. Stds.*, 1930, 1243.