



论文

环面黑洞的热力学几何及临界行为

兰明建*

重庆工商大学计算机科学与信息工程学院, 重庆 400067

*E-mail: lanmingjian@sohu.com

收稿日期: 2010-12-12; 接受日期: 2011-06-10; 网络出版日期: 2011-08-03

重庆市教委科学技术研究基金资助项目(编号: 090731, 100706)

摘要 将几何方法应用于研究环面黑洞的热力学性质, 计算了该黑洞的温度和热容, 并探讨了黑洞热力学几何度规与黑洞的临界行为及相变特征之间的联系. 结果表明: 环面黑洞热力学温度等于其 Hawking 温度; 由于其标量曲率等于零, 因而环面黑洞的 Weinhold 度规不能给出关于该黑洞热力学临界行为及相变的任何信息; 而环面黑洞的 Ruppeiner 度规和 Legendre 协变度规却能很好地反映出黑洞的相结构信息.

关键词 黑洞, 热力学几何, 相变

PACS: 04.70.Dy, 02.40.Ky

自从 Hawking^[1,2]利用弯曲时空量子场论证明黑洞具有热辐射以来, 人们已经普遍相信 Bekenstein^[3,4]提出的正比于黑洞视界面积的黑洞熵具有真正热力学意义. 伴随着黑洞热力学定律的建立, 人们发现黑洞热力学与普通热力学有着极其相似的对应, 于是 Weinhold^[5]将几何概念引入到普通热力学, 给出了一个新的 Riemann 度规并将其定义为内能的二阶导数, 这也为涨落理论的研究提供了新的理论工具. 然而, 在纯平衡态热力学中利用 Weinhold 度规表达距离时缺乏物理意义. 为了克服这一困难, Ruppeiner^[6]重新引入了 Riemann 度规, 并将其定义为熵的二阶导数. Ruppeiner 度规使得热力学系统可以用弯曲的 Riemann 流形来描述, 同时该度规具有相结构信息, 由此构造的度规曲率张量具有物理意义, 而且 Mrugala^[7]和 Salamon 等人^[8]也证明了它和 Weinhold 度规之间可通过温度密切联系. 可是, 进一步的研究表明, 在 Legendre 变换中, Ruppeiner 度规和 Wein-

hold 度规一样, 都不满足协变性^[9,10]. 最近, Quevedo 等人^[11-13]提出一种新的热力学度规, 它在 Legendre 变换中是不变式, 而且能决定平衡态相空间的几何结构, 并称其为 Legendre 协变度规. 从理论上讲, 黑洞作为一个热力学系统, 自然也有临界行为和相变过程, 可直到今天, 黑洞作为热力学系统的统计力学背景并不清楚. 因此, 寻找这几种度规与黑洞的热力学性质间的联系是非常有意义的工作. 事实上, 自从 Ferrara 等人^[14]将前两种 Riemann 度规应用到黑洞热力学中, 并研究 moduli 空间的临界现象以来, 人们又将上述方法推广到其他形形色色的热力学模型, 例如: 纯理想气体、Van der Waals 液气模型、一维 Ising 模型、理想量子气体模型等, 而且针对黑洞热力学几何的研究也有了许多结果^[15-30], 不过目前还没有人对这些结果做出很好的符合物理意义的解释, 这些模型也并没有彻底解决黑洞热力学几何中的悬疑问题, 黑洞热力学几何仍是当前理论物理学中研究热

引用格式: 兰明建. 环面黑洞的热力学几何及临界行为. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, 41: 1058-1062

Lan M J. Thermodynamic geometry and critical behavior of a toroidal black hole (in Chinese). Sci Sin Phys Mech Astron, 2011, 41: 1058-1062, doi: 10.1360/132010-1220

点之一. 因而, 将现有的热力学度规应用于不同的黑洞, 通过数值计算, 比较各种结果, 探讨黑洞热力学几何标量曲率中所蕴含的系统相结构信息, 探究不同度规的深刻涵义和它们之间的内在联系, 这不仅有助于更进一步深入认识黑洞的温度、熵、热容等热性质, 而且对完善自洽的黑洞热力学几何理论有着极其重要的意义.

本文从几何学的角度研究了环面黑洞的热力学性质, 计算了环面黑洞热容, 并对该黑洞热力学温度与其 Hawking 温度进行比较. 作为主要工作, 还将 Weinhold 度规、Ruppeiner 度规及 Legendre 协变度规应用于环面黑洞, 得到各度规的具体形式, 并将各标量曲率和环面热容进行比较, 分析和讨论了环面黑洞的临界行为及相变特征.

1 环面黑洞的温度和热容

环面黑洞的线元为^[31,32]

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2(d\varphi^2 + d\psi^2), \quad (1)$$

式中 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$, 且

$$f(r) = -\frac{1}{3}\Lambda r^2 - \frac{2M}{\pi r} + \frac{4Q^2}{\pi r^2}, \quad (2)$$

Λ 为宇宙常数, M 和 Q 分别为黑洞的质量和电荷. 文献[31]指出: 当 $\Lambda > 0$ 时, 度规(1)不能描述黑洞时空;

当 $\Lambda < 0$ 且 $0 \leq Q^2 \leq \frac{3}{8}(3M^4/2\pi|\Lambda|)^{1/3}$ 时, 度规(1)描述了一个黑洞时空, $f(r) = 0$ 有两个正根, 即

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ r^{1/2} \pm \left[-r + 2 \left(r^2 + \frac{48Q^2}{\pi\Lambda} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \right\}, \quad (3)$$

其中 r_+ 和 r_- 分别是环面黑洞的事件视界和 Cauchy 视界, 且

$$r = \left\{ \frac{(6M)^2}{2\pi^2\Lambda^2} + \left[\left(\frac{(6M)^2}{2\pi^2\Lambda^2} \right)^2 + \left(\frac{16Q^2}{\pi\Lambda} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} + \left\{ \frac{(6M)^2}{2\pi^2\Lambda^2} - \left[\left(\frac{(6M)^2}{2\pi^2\Lambda^2} \right)^2 + \left(\frac{16Q^2}{\pi\Lambda} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}. \quad (4)$$

从而, 环面黑洞的 Hawking 温度为

$$T_H = \frac{\kappa_+}{2\pi} = -\frac{2Q^2}{\pi^2 r_+^3} + \frac{M}{2\pi^2 r_+^2} - \frac{\Lambda r_+}{6\pi}, \quad (5)$$

式中 κ_+ 为黑洞事件视界的表面引力, 且

$$\kappa_+ = \lim_{r \rightarrow r_+} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-g^{rr}}{g_{tt}}} g_{tt,r} \right).$$

环面黑洞的事件视界面积为

$$A = \int \sqrt{g} d\varphi d\psi = 4\pi^2 r_+^2. \quad (6)$$

根据面积定理, 环面黑洞熵为

$$S = \frac{1}{4} A = \pi^2 r_+^2. \quad (7)$$

事件视界处满足 $f(r_+) = 0$, 即

$$-\frac{1}{3}\Lambda r_+^2 - \frac{2M}{\pi r_+} + \frac{4Q^2}{\pi r_+^2} = 0, \quad (8)$$

解出黑洞质量 M , 并将结果表示成黑洞电荷 Q 和熵 S 的函数, 即

$$M(S, Q) = \frac{12\pi^3 Q^2 - \Lambda S^2}{6\pi^2 \sqrt{S}}. \quad (9)$$

黑洞热力学第一定律为

$$dM = TdS + \Phi dQ, \quad (10)$$

式中 T 和 Φ 分别是黑洞温度和表面两极处的静电势. 因此, 环面黑洞的温度为

$$T = \frac{\partial M}{\partial S} = -\frac{4\pi^3 Q^2 + \Lambda S^2}{4\pi^2 \sqrt{S^3}}, \quad (11)$$

这与 Hawking 温度是相等的, 若将 $r_+ = \sqrt{S}/\pi$ 和(9)式一并代入(5)式, 即可验证这一点. 若用环面黑洞的电荷和熵表示热容, 具体形式为

$$C_Q = \frac{\partial M}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{2S(4\pi^3 Q^2 + \Lambda S^2)}{\Lambda S^2 - 12\pi^3 Q^2}, \quad (12)$$

当 $S^2 = -4\pi^3 Q^2/\Lambda$ 时, 热容和 Hawking 温度均等于零, 对应极端黑洞的情况, 这表明黑洞热力学系统的一阶相变点不会出现. 另一方面, 黑洞热力学系统的二阶相变点出现在热容发散情况下, 然而在环面黑洞时空中, $\Lambda < 0$, 因而(12)式中 $\Lambda S^2 - 12\pi^3 Q^2$ 恒小于零, 这表明该黑洞的二阶相变也不能发生.

2 环面黑洞的 Weinhold 度规

尽管 Weinhold 度规缺乏有意义的度规结构, 但

研究表明, 它不仅能为 **Ruppeiner** 度规的计算提供方便, 而且通过对二者进行比较, 有利于揭示度规之间隐藏着的某种深刻的必然联系, 这对完善热力学几何理论体系是非常必要的. 这里, 我们将 **Weinhold** 的工作推广到环面黑洞. **Weinhold** 度规被定义为内能 (这里即质量 M) 的二阶导数^[5], 即

$$g_{ij}^W = \partial_i \partial_j M(S, N^a), \quad (13)$$

式中 W 代表 **Weinhold** 度规, 而 S 和 N^a 分别是黑洞熵和系统的其它广延量. 环面黑洞的 **Weinhold** 度规线元为

$$ds_W^2 = \frac{\partial^2 M}{\partial S^2} dS^2 + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial S \partial Q} dS dQ + \frac{\partial^2 M}{\partial Q^2} dQ^2. \quad (14)$$

将(9)式代入(13)式, 可得环面黑洞 **Weinhold** 度规各分量, 即

$$g_{SS}^W = \frac{12\pi^3 Q^2 - \Lambda S^2}{8\pi^2 \sqrt{S^5}}, \quad (15)$$

$$g_{SQ}^W = g_{QS}^W = -\frac{2\pi Q}{\sqrt{S^3}}, \quad (16)$$

$$g_{QQ}^W = \frac{4\pi}{\sqrt{S}}. \quad (17)$$

由(15)~(17)式, 可以进一步得到以下结果, 即

$$\Gamma_{SS}^S = \frac{-36\pi^3 Q^2 + \Lambda S^2}{16\pi^3 S Q^2 - 4\Lambda S^3}, \quad (18)$$

$$\Gamma_{SS}^Q = -\frac{12\pi^3 Q^3 + \Lambda S^2 Q}{16\pi^3 S^2 Q^2 - 4\Lambda S^4}, \quad (19)$$

$$\Gamma_{SQ}^S = \Gamma_{QS}^S = \frac{8\pi^3 Q}{4\pi^3 Q^2 - \Lambda S^2}, \quad (20)$$

$$\Gamma_{SQ}^Q = \Gamma_{QS}^Q = \frac{12\pi^3 Q^2 + \Lambda S^2}{16\pi^3 S Q^2 - 4\Lambda S^3}, \quad (21)$$

$$\Gamma_{QQ}^S = -\frac{8\pi^3 Q}{4\pi^3 Q^2 - \Lambda S^2}, \quad (22)$$

$$\Gamma_{QQ}^Q = -\frac{4\pi^3 Q}{4\pi^3 Q^2 - \Lambda S^2}, \quad (23)$$

式中 $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ 是 Christoffel 符号, 它与度规张量的关系为

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}). \quad (24)$$

而 **Riemann** 曲率张量 $\mathfrak{R}_{\mu\nu\sigma}^\rho$, **Ricci** 张量 $\mathfrak{R}_{\mu\sigma}$ 以及标量曲率 $\mathfrak{R}$ 分别为

$$\mathfrak{R}_{\mu\nu\sigma}^\rho = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\sigma,\mu}^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \cdot \Gamma_{\lambda\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \cdot \Gamma_{\lambda\mu}^\rho, \quad (25)$$

$$\mathfrak{R}_{\mu\sigma} = \mathfrak{R}_{\mu\nu\sigma}^\nu, \quad (26)$$

$$\mathfrak{R} = g^{\mu\sigma} \mathfrak{R}_{\mu\sigma}. \quad (27)$$

计算表明, 环面黑洞 **Weinhold** 度规的曲率张量各分量均为零, 因此其标量曲率

$$\mathfrak{R}_W = 0. \quad (28)$$

显然, 环面黑洞的 **Weinhold** 度规是处处平直的, 不能给出环面黑洞临界行为和相变过程的任何信息.

3 环面黑洞的 **Ruppeiner** 度规

虽然 **Weinhold** 度规未能给出关于环面黑洞热力学相结构信息, 但可以由它得到 **Ruppeiner** 度规线元. 事实上 **Ruppeiner** 度规和 **Weinhold** 度规满足以下关系^[7,8]:

$$ds_R^2 = \frac{1}{T} ds_W^2. \quad (29)$$

该关系式是求 **Ruppeiner** 度规常用的方法, 式中 R 代表 **Ruppeiner** 度规, 由(11)及(15)~(17)式, 可得环面黑洞的 **Ruppeiner** 度规各分量, 即

$$g_{SS}^R = \frac{\Lambda S^2 - 12\pi^3 Q^2}{8\pi^3 Q^2 S + 2\Lambda S^3}, \quad (30)$$

$$g_{SQ}^R = g_{QS}^R = \frac{8\pi^3 Q}{4\pi^3 Q^2 + \Lambda S^2}, \quad (31)$$

$$g_{QQ}^R = -\frac{16\pi^3 S}{4\pi^3 Q^2 + \Lambda S^2}, \quad (32)$$

将它们代入(24)~(27)式, 可得到环面黑洞的 **Ruppeiner** 度规的标量曲率, 即

$$\mathfrak{R}_R = \frac{\Lambda S (\Lambda S^2 - 12\pi^3 Q^2)}{(4\pi^3 Q^2 + \Lambda S^2)(4\pi^3 Q^2 - \Lambda S^2)}. \quad (33)$$

当 $S^2 = -4\pi^3 Q^2 / \Lambda$ 时, 该曲率标量发散, 这和黑洞极端情况才出现的一阶相变点相对应. 而上式分子中出现因子 $\Lambda S^2 - 12\pi^3 Q^2$, 也和热容的发散情况是对应的. 因此, **Ruppeiner** 度规能给出环面黑洞热力学系统相结构信息.

4 环面黑洞的 **Legendre** 协变度规

作为一种新的热力学几何模型, **Legendre** 协变度规能较好的描述 **Reissner-Nordström** 黑洞、**Kerr-Newman** 黑洞、平面对称黑洞等的热力学性质^[11~13,26]. 现在, 我们将其推广到环面黑洞以确定它是否仍然

有效. 环面黑洞的 Legendre 协变度规可以表示为

$$g^L = \left(S \frac{\partial M}{\partial S} + Q \frac{\partial M}{\partial Q} \right) \left(-\frac{\partial^2 M}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial Q^2} dQ^2 \right), \quad (34)$$

式中 L 代表 Legendre 协变度规, 将(9)式代入(34), 可得环面黑洞 Legendre 协变度规各分量, 即

$$g_{SS}^L = -\frac{(12\pi^3 Q^2 - \Lambda S^2)^2}{32\pi^4 S^3}, \quad (35)$$

$$g_{QQ}^L = \frac{12\pi^3 Q^2 - \Lambda S^2}{\pi S}. \quad (36)$$

将它们代入(24)~(27)式, 可得环面黑洞 Legendre 协变度规的标量曲率

$$\mathfrak{R}_L = \frac{16\pi^4 \Lambda S^3 (84\pi^3 Q^2 + 5\Lambda S^2)}{(\Lambda S^2 - 12\pi^3 Q^2)^4}. \quad (37)$$

显然, 当 $S^2 = -84\pi^3 Q^2 / 5\Lambda$, 此时环面黑洞 Legendre 协变度规的标量曲率为零, 但与黑洞极端情况才出现的一阶相变点(即 $S^2 = -4\pi^3 Q^2 / \Lambda$)没有对应关系. 此外, (12)和(37)式分母中均出现相同因子 $\Lambda S^2 - 12\pi^3 Q^2$, 环面黑洞热容和其 Legendre 标量曲率具有相同的临界值, 这表明环面黑洞 Legendre 协变度规和热容之间有良好的对应关系.

5 结论

本文从几何学角度研究了环面黑洞的热力学性

质, 计算了黑洞的温度和热容, 结果表明其热力学温度等于其 Hawking 温度. 作为主要工作, 还将三种 Riemann 度规引入到环面黑洞并得到了一些有意义的结果. 研究发现, 黑洞的 Weinhold 度规的标量曲率等于零, 因而不能给出该黑洞相变的信息. 此外, 黑洞的 Ruppeiner 度规曲率标量在 $S^2 = -4\pi^3 Q^2 / \Lambda$ 处是发散的, 这和黑洞极端情况才出现的一阶相变点相对应. 并且, 在(12)式分母以及(33)式分子中, 均出现因子 $\Lambda S^2 - 12\pi^3 Q^2$, 表明 Ruppeiner 度规对环面黑洞的临界行为和相变是有所反映的, 但这和另一些研究结果是不同的, 例如文献[24]发现 Reissner-Nordström 黑洞的 Ruppeiner 度规曲率标量和热容发散点是相同的. 研究还发现, 当 $S^2 = -84\pi^3 Q^2 / 5\Lambda$ 时, 黑洞的 Legendre 协变度规标量曲率为零, 但与黑洞的一阶相变点(即 $S^2 = -4\pi^3 Q^2 / \Lambda$)不一致, 该点所表现出的物理内涵还有待于进一步研究. 而且, (12)和(37)式分母中均出现相同因子 $\Lambda S^2 - 12\pi^3 Q^2$, 也就是说环面黑洞热容和其 Legendre 协变度规标量曲率具有相同的临界值, 这说明 Legendre 协变度规能对环面黑洞热性质进行较好的描述. 最后, 要指出的是, 热力学几何是在寻找黑洞热力学统计力学背景过程中所做的尝试之一, 虽然由此能够解释和描述黑洞的一些热性质, 但存在诸多问题在目前还不能给出合理的物理解释, 这值得进一步研究和探讨.

致谢 在撰写论文过程曾与韩亦文教授、陈刚博士进行了有益的讨论, 在此表示感谢.

参考文献

- 1 Hawking S W. Black hole explosions? Nature, 1974, 248: 30–31
- 2 Hawking S W. Particle creation by black holes. Commun Math Phys, 1975, 43: 199–200
- 3 Bekenstein J D. Black holes and the second law. Lett Nuovo Cimento, 1972, 4: 737–740
- 4 Bekenstein J D. Black hole and entropy. Phys Rev D, 1973, 7: 2333–2346
- 5 Weinhold F. Metric geometry of equilibrium thermodynamics. J Chem Phys, 1975, 63: 2479–2483
- 6 Ruppeiner G. Thermodynamics: A Riemannian geometric model. Phys Rev A, 1979, 20: 1608–1613
- 7 Mrugala R. On equivalence of two metrics in classical thermodynamics. Physica A, 1984, 125: 631–639
- 8 Salamon P, Nulton J D, Ihrig E. On the relation between entropy and energy versions of thermodynamic length. J Chem Phys, 1984, 80: 436–437
- 9 Salamon P, Ihrig E, Berry R S. A group of coordinate transformations which preserve the metric of Weinhold. J Math Phys, 1983, 24: 2515–2520
- 10 Mrugala R, Nulton J D, Schon J C, et al. Statistical approach to the geometric structure of thermodynamics. Phys Rev A, 1990, 41:

3156–3160

- 11 Quevedo H, Sanchez A. Geometrothermodynamics of asymptotically Anti-de Sitter black holes. *J High Energy Phys*, 2008, 0809: 034
- 12 Alvarez J L, Quevedo H, Sanchez A. Unified geometric description of black hole thermodynamics. *Phys Rev D*, 2008, 77: 084004
- 13 Quevedo H, Sanchez A. Geometrothermodynamics of black holes in two dimensions. *Phys Rev D*, 2009, 79: 087504
- 14 Ferrara S, Gibbons G W, Kallosh R. Black holes and critical points in moduli space. *Nucl Phys B*, 1997, 500: 75–93
- 15 Ruppeiner G. Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory. *Rev Mod Phys*, 1995, 67: 605–659
- 16 Ruppeiner G. Thermodynamic curvature and phase transitions in Kerr-Newman black holes. *Phys Rev D*, 2008, 78: 024016
- 17 Cai R G, Cho J H. Thermodynamic curvature of the BTZ black hole. *Phys Rev D*, 1999, 60: 067502
- 18 Aman J E, Bengtsson I, Pidokrajt N. Geometry of black hole thermodynamics. *Gen Rel Grav*, 2003, 35: 1733–1743
- 19 Aman J E, Bengtsson I, Pidokrajt N. Flat information geometries in black hole thermodynamics. *Gen Rel Grav*, 2006, 38: 1305–1315
- 20 Aman J E, Pidokrajt N, Ward J. On geometro-thermodynamics of dilaton black holes. *EAS Publ Ser*, 2008, 30: 279–283
- 21 Myung Y S, Kim Y W, Park Y J. Ruppeiner geometry and 2D dilaton gravity in the thermodynamics of black holes. *Phys Lett B*, 2008, 663: 342–350
- 22 Mirza B, Zamaninasab M. Ruppeiner geometry of RN black holes: flat or curved? *J High Energy Phys*, 2007, 0706: 059
- 23 Mirza B, Mohammadzadeh H. Ruppeiner geometry of anyon gas. *Phys Rev E*, 2008, 78: 021127
- 24 Shen J Y, Cai R G, Wang B, et al. Thermodynamic geometry and critical behavior of black holes. *Int J Mod Phys A*, 2007, 22: 11–27
- 25 Cai R G, Cao L M, Ohta N. Thermodynamics of black holes in Horava-Lifshitz gravity. *Phys Lett B*, 2009, 679: 504–509
- 26 Wei S W, Liu Y X, Fu C E, et al. Geometric curvatures of plane symmetry black hole. *Arxiv:hep-th/0911.0270v1*
- 27 Han Y W, Zhang J Y. Hawking temperature and thermodynamics geometry of the 3D charged-dilaton black holes. *Phys Lett B*, 2010, 692: 74–77
- 28 Lan M J, Chen G, Han Y W. Thermodynamic geometry of the Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton black hole. *Chin Phys B*, 2010, 19: 090401
- 29 Banerjee R, Ghosh S, Roychowdhury D. New type of phase transition in Reissner-Nordström-AdS black hole and its thermodynamic geometry. *arXiv: gr-qc /1008.2644v1*
- 30 Sahay A, Sarkar T, Sengupta G. On the phase structure and thermodynamic geometry of R-Charged black holes. *arXiv: hep-th/1009.2236v3*
- 31 Huang C G, Liang C B. A torus-like black hole. *Phys Lett A*, 1995, 201: 27–32
- 32 Wang B B. Entropy of quantum field in toroidal black hole without brick wall. *Chin Phys B*, 2008, 17: 0467–0472

Thermodynamic geometry and critical behavior of a toroidal black hole

LAN MingJian*

College of Computer Science, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

In this paper, we study the thermodynamic properties of a toroidal black hole from a geometric viewpoint. After the temperature and heat capacity of the black hole have been calculated, we investigate the relationship between its thermodynamic geometry metric and critical behavior, as well as phase transition characteristics. The results show that the temperature of the toroidal black hole is equal to its Hawking temperature. Moreover, because its curvature scalar is zero, the Weinhold geometry fails to provide some information about the critical behavior and phase transition characteristics of the toroidal black hole. But the Ruppeiner geometry and the Legendre invariant metric can provide a good description of its phase structure.

black hole, thermodynamic geometry, phase transition

PACS: 04.70.Dy, 02.40.Ky

doi: 10.1360/132010-1220