

有界空间的非线性声学——横波入射与临界角响应*

钱祖文

(中国科学院声学研究所, 声场声信息国家重点实验室, 北京 100080)

摘要 在以前的基础上, 进一步讨论了横波入射角超过临界角时的情形, 结果表明, 在临界角附近, 自由面上二阶谐波位移响应的模出现大的极值, 相位有突变. 根据这一结果, 人们可以利用非线性方法产生较强的二阶谐表面波.

关键词 非线性声学 临界角 二阶谐波

在文献[1,2]中, 研究了P波^[1]和SV及SH波^[2]入射到两种固体界面所产生的二阶谐波场. 但在文献[2]中, 实际上只研究了横波入射角不超过临界角的情形(文献[2]中全部图的横坐标所表示的入射角实为SV或SH波入射时相应P波的角度). 在本文将推广到超过临界角的情况.

1 SV波入射

应用文献[2]中的符号, 当一阶SV波入射时, 由于边界的存在, 入射的一阶SV波将在边界上产生反射的一阶SV波和P波, 其表达式分别为

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{I}}^{(1)} &= B_0 e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} = B_0^-, \\ \Psi_{2\text{I}} &= A_2 e^{j(\omega t - k_x x + K_z z)} + B_2 e^{j(\omega t - k_x x + K_z' z)} = A_2^+ + B_2^-, \\ \varphi_{\text{II}}^{(1)} &= D_0 e^{j(\omega t - k_x x + K_z' z)} = D_0^+, \\ \Psi_{2\text{II}} &= D_2 e^{j(\omega t - k_x x + K_z' z)} = D_2^+, \end{aligned} \quad (1)$$

式中带撇号的量属于第2介质. 根据Snell定律, 当横波入射角 θ_i 超过临界角 $\theta_i^{(c)}$ 时, 纵波产生全内反射, 这时, 有如下的表示,

$$\begin{aligned}\theta_i \leq \theta_i^{(c)}, \quad k_z &= k \sqrt{1 - \frac{C_1^2}{C_t^2} \sin^2 \theta_i}, \\ \theta_i > \theta_i^{(c)}, \quad k_z &= -jk \sqrt{1 - \frac{C_1^2}{C_t^2} \sin^2 \theta_i}. \end{aligned} \quad (2)$$

将(1)、(2)式代入到文献[1~4]的有关式子同样能算出有关量, 它们已表示在文献[2]的

(1)~(12)式中(除了文献[2]中的(10)式和(11)式都差一个符号以外,其余皆相同),这里不再重复. 显然当 $i=2$ 时,二阶纵波沿平行于界面方向传播,在文献[3]称它为固体中的 Q 波. 显然,在临界角的情况下, $k_z=0$, $k=k_x$. 当入射角等于临界角时,文献[2]中 $i=3$ 的积累解(12)式也不成立,因为这时的波正由体波转化为非均匀波(面波). 因此,这两种情况下,二阶体波沿平行于界面的方向有积累解(见第 4 节). 根据文献[5,6]的方法,对应于文献[2]的(6)式中所描述的二阶体波的解成为

$$\varphi_{b1} = - \sum_{i=0}^5 \beta_{si} f_i(z) E(\bar{K}_i) A_2^2,$$

式中 $E(\bar{K}_i)$ 见文献[1]中的(14)式,而

$$f_i(x, z) = \left(-\frac{1}{4jk_z} z + \frac{1}{16k_z^2} \right), \quad \theta_i \neq \theta_i^{(c)}, \quad i = 3,$$

$$f_i(x, z) = \frac{1}{4(k^2 - K_i^2)}, \quad \theta_i \neq \theta_i^{(c)}, \quad i \neq 3.$$

当边界是自由面时,它上面的切向位移和法向位移分别为

$$u^{(2)} = \frac{j}{2} A_2^2 \left\{ k_x \left[\frac{\beta_{s0} + \beta_{s1}}{k^2 - K^2} + \frac{1}{k_z^2} (\beta_{s2} + \beta_{s3}) + \frac{\beta_{s4}}{k^2 - K_4^2} + \frac{\beta_{s5}}{k^2 - K_5^2} \right] - \frac{\bar{K}_4 \bar{\beta}_{s4}}{K^2 - K_4^2} - \frac{\bar{K}_5 \bar{\beta}_{s5}}{K^2 - K_5^2} - 4k_x H_{01} + 4K_z H_{11} \right\} e^{2j(\omega t - k_x x)},$$

$$w^{(2)} = \frac{j}{2} A_2^2 \left\{ -K_z \frac{\beta_{s0} - \beta_{s1}}{k^2 - K^2} - \frac{\beta_{s3}}{4k_z} + \frac{\beta_{s4} \bar{K}_4}{k^2 - K_4^2} + \frac{\beta_{s5} \bar{K}_5}{k^2 - K_5^2} \times \right.$$

$$\left. \frac{k_x \bar{\beta}_{s4}}{K^2 - K_4^2} + \frac{k_x \bar{\beta}_{s5}}{K^2 - K_5^2} - 4k_z H_{01} - 4k_x H_{11} \right\} e^{2j(\omega t - k_x x)},$$

式中 β'_{ij} , β'_{ij} 参见文献[2]的附录 1 及其(8)式,但其附录 1 中的 β'_{14} 和 β'_{15} 更正为

$$\beta'_{14} = \beta'_{15} = \left(-\frac{\lambda + 3\mu + 2m}{\mu} K_z^2 + \frac{m + \mu}{\mu} K^2 \right) k^2, \quad (4)$$

其他符号见文献[2],而

$$H_{01} = \frac{(k_x^2 - K_z^2) \bar{H}_0 - 2k_x K_z \bar{H}_1}{4[(k_x^2 - K_z^2)(\lambda k^2 + 2\mu k_z^2) - 4\mu k_x^2 k_z K_z]},$$

$$H_{11} = \frac{(\lambda k^2 + 2\mu k_z^2) \bar{H}_1 - 2\mu k_x k_z \bar{H}_0}{16\mu[(k_x^2 - K_z^2)(\lambda k^2 + 2\mu k_z^2) - 4\mu k_x^2 k_z K_z]},$$

文献[1](2.9)式中的 H_{01} , H_{11} 应更正为现在的式子,而

$$\bar{H}_0 = \lambda \left\{ \frac{K^2(\beta_{s0} + \beta_{s1})}{k^2 - K^2} + \beta_{s3} \frac{k_x^2}{k_z^2} - \frac{1}{4} \left(3 - \frac{k_x^2}{k_z^2} \right) + \frac{K_4^2 \beta_{s4}}{k^2 - K_4^2} + \frac{K_5^2 \beta_{s5}}{k^2 - K_5^2} \right\} +$$

$$2\mu \left\{ \frac{K_z^2(\beta_{s0} + \beta_{s1})}{k^2 - K^2} - \frac{3}{4} \beta_{s3} + \frac{\bar{K}_4^2 \beta_{s4}}{k^2 - K_4^2} + \frac{\bar{K}_5^2 \beta_{s5}}{k^2 - K_5^2} + \frac{k_x \bar{K}_4 \bar{\beta}_{s4}}{K^2 - K_4^2} + \frac{k_x \bar{K}_5 \bar{\beta}_{s5}}{K^2 - K_5^2} \right\} +$$

$$\{ T_{33}^{(2)} \}_z^0 = 0, \quad (6)$$

$$\bar{H}_1 = -\mu \left\{ \frac{2k_x K_z(\beta_{s0} - \beta_{s1})}{k^2 - K^2} - \frac{k_x \beta_{s3}}{2k_z} - \frac{2\bar{K}_4 k_x \beta_{s4}}{k^2 - K_4^2} - \frac{2\bar{K}_5 k_x \beta_{s5}}{k^2 - K_5^2} + \right.$$

$$\left. \frac{\overline{K}_4^2 - k_x^2}{K^2 - \overline{K}_4^2} \beta_{s4} + \frac{\overline{K}_5^2 - k_x^2}{K^2 - \overline{K}_5^2} \beta_{s5} \right\} + \{ T_{13}^{(2)} \}_{z=0}^0,$$

式中

$$\{ T_{33}^{(2)} \}_{z=0}^0 = (\lambda + 2\mu) \{ \overline{T}_{33}^{(2)} \}_{z=0}^0, \quad \{ T_{13}^{(2)} \}_{z=0}^0 = \mu \{ \overline{T}_{13}^{(2)} \}_{z=0}^0, \quad (7)$$

$\{ T_{ij}^{(2)} \}_{z=0}^0$ 表示在其表达式中令 $z=0$ 并去掉因子 $e^{2j(\omega t - k_x x)}$, 而 $\overline{T}_{13}^{(2)}$, $\overline{T}_{33}^{(2)}$ 的表达式分别见文献[2]的(2)式和(4)式。由(3)~(7)式可以看出, 这里的结果除了将入射角推广到大于临界角的情形以外, 还改正了文献[1, 2]中的一些笔误。

2 SH 波入射

当入射波为 SH 波时, 一阶场可表为

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(1)} &= B_1 e^{j(\omega t - k_x x + K_z z)} + B_2 e^{j(\omega t - k_x x - K_z z)} = B_1^+ + B_2^-, \\ \Psi_3^{(1)} &= \frac{K_z}{k_x} (B_1^+ - B_2^-). \end{aligned} \quad (8)$$

根据以前的方法很易算得

$$\begin{aligned} \overline{T}_{13}^{(2)} &= \eta'_{10} B_1^{+2} + \eta'_{11} B_2^{-2}, \\ \overline{T}_{33}^{(2)} &= \left[\frac{\lambda + 2\mu + m}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{K_z^2}{K_z^2} - \left(\mu + \frac{n}{4} \right) \frac{k_x^2}{K_z^2} \right] K^4 (1 + V_H^2) + \\ &\quad \frac{2}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{\lambda + 2\mu + m}{2} \left(1 - \frac{k_x^2}{K_z^2} \right) + \left(\mu + \frac{n}{4} \right) \frac{k_x^2}{K_z^2} \right] K^4 V_H \end{aligned} \quad (9)$$

以及二阶场满足,

$$(\nabla^2 + 4k^2) \varphi_b = - \sum_{i=0}^2 \eta_{Hi} E(\overline{K}_i) B_1^2, \quad (\nabla^2 + 4K^2) \Psi_{jb} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned} -\overline{K}_0 &= \overline{K}_1 = K_z, \quad \overline{K}_2 = 0, \quad \eta_{Hi} = (\eta'_{0i} - 1/4 K^2) U_i, \\ U_0 &= 1, \quad U_1 = (B_2/B_1)^2 = V_H^2, \quad U_2 = V_H, \end{aligned} \quad (11)$$

与 SV 波入射情况类似, 在 $i=2$ 时, 出现 Q 波, 它在临界角入射的情况下, 沿平行于边界的方向有积累解, 故(10)式中 φ_b 的特解为

$$\begin{aligned} \varphi_{b1} &= - \sum_{i=0}^2 f_i(x, z) B_1^2 \eta_{Hi} E(\overline{K}_i), \\ f_i(x, z) &= \frac{1}{4(k^2 - K_i^2)}, \quad \theta_i \neq \theta_i^{(c)}, \end{aligned} \quad (12)$$

Ψ_{jb} 满足齐次方程, 其解见文献[1, 2]. 对于自由表面的反射利用边界条件可得

$$\begin{aligned} 4(\lambda k^2 + 2\mu k_z^2) H_{01} + 8\mu k_x K_z H_{11} &= \\ \left(\frac{\lambda K^2 + 2\mu K_z^2}{k^2 - K^2} \right) (\eta_{H0} + \eta_{H1}) + \frac{\lambda k_x^2}{k_z^2} + \{ T_{33}^{(2)} \}_{z=0}^0, \\ 2k_x k_z H_{01} + (k_x^2 - K_z^2) H_{11} &= \frac{k_x K_z \eta_{H0}}{2(k^2 - K^2)} (1 - V_H^2) + \frac{1}{4\mu} \{ T_{13}^{(2)} \}_{z=0}^0, \end{aligned} \quad (13)$$

类似于文献[1,2],自由面上的切向和法向位移为

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= \frac{j}{2} B_1^2 \left\{ k_x \left[\frac{\eta_{H0} + \eta_{H1}}{k^2 - K^2} + \frac{\eta_{H2}}{k_z^2} - 4H_{01} \right] + 4K_z H_{11} \right\} e^{2j(\omega t - k_x x)}, \\ w^{(2)} &= -\frac{j}{2} B_1^2 \left\{ K_z \frac{\eta_{H0} - \eta_{H1}}{k^2 - K^2} + 4k_z H_{01} + 4K_z H_{11} \right\} e^{2j(\omega t - k_x x)}, \\ \bar{H}_0 &= \left\{ \lambda \left[\frac{K^2(\eta_{H0} + \eta_{H1})}{k^2 - K^2} + \frac{k_x^2}{k_z^2} \eta_{H2} \right] + 2\mu \frac{(\eta_{H0} + \eta_{H1})K_z^2}{k^2 - K^2} \right\} + \{ T_{33}^{(2)} \}_{z=0}^0, \\ \bar{H}_1 &= \{ T_{13}^{(2)} \}_{z=0}^0 / 4\mu. \end{aligned} \quad (14)$$

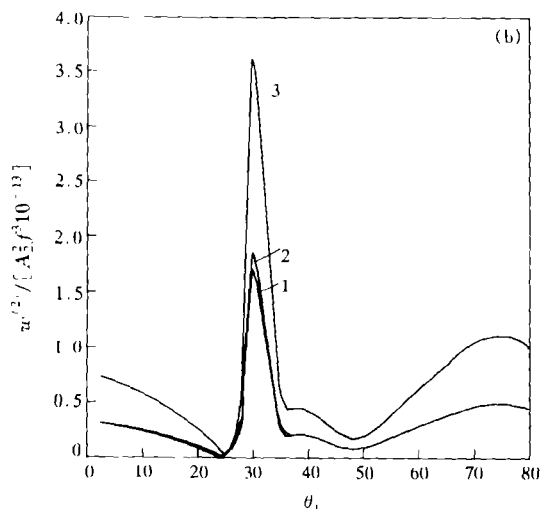
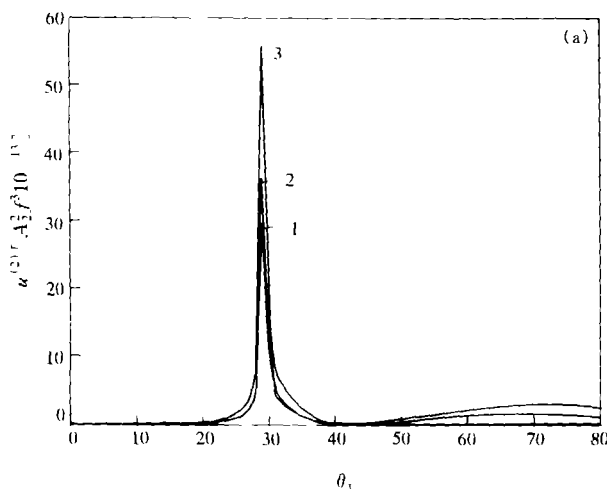


图 1 SV 波入射时铝的自由面上其切向(a)和法向位移(b)的模与入射角的关系

$\lambda = 0.561 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$; $\mu = 0.256 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$, 在图(a)、(b)中, 曲线 1, 2 和 3 中的三阶弹性常数分别为: 1 示 $l = -3.11 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$, $m = -4.01 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$; 2 示 $l = -6.22 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$, $m = -4.01 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$; 3 示 $l = -3.11 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$, $m = -8.02 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$

H_{01} 和 H_{11} 可从(13)式求得. 这里更正了文献[2]中的笔误.

3 数值计算

当入射角超过临界角时, (3)式和(14)式所表示的位移量皆为复量, 因此在做数值计算时取它们的模和幅角. 在下面的图示中, 纵坐标为二阶位移 $u^{(2)}$ 或 $w^{(2)}$ 除以入射波振幅的平方与 $(10^{-13} f^3)$ 的乘积, 即

$$\frac{u^{(2)} \text{ 或 } w^{(2)}}{(A_2^2 \text{ 或 } B_1^2) f^3 10^{-13}}$$

横坐标为入射角, 式中 f 为频率. 今后, 我们称这个量为二阶位移响应. 对于铝材料而言, 图 1(a)、(b)分别表示 SV 波入射时自由表面切向和法向位移的模. 显然, 当入射角达到临界角时, 模出现很尖锐的峰值, 其位置取决于二阶弹性模量, 峰值大小主要取决于三阶弹性模量 m ; 图 2(a)、(b)分别表示钢的位移模. 数值计算也表明(略), 幅角在临界角附近有跃变.

当 SH 波入射到铝的自由面时, 图 3(a)、(b)分别表示切向和法向位移模. 对于钢有类似的图示.

4 结果的讨论

从上述结果可知, 在 SV, SH 波入射的情况下, 对应于 $i = 2$ 时的二阶体波被文献[3~5]称为 Q 谐波, 它们都是入射横波与反射横波的相互作用所产生的. 只当入射角恰好等于临界角时, $k_z = 0$, 因而 $k = k_x$,

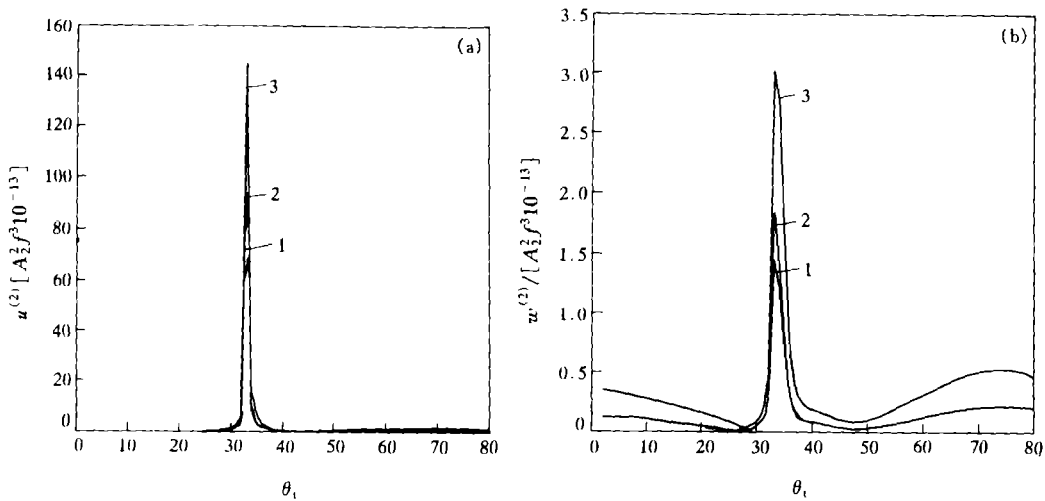


图2 SV波入射时钢的自由表面上其切向位移(a)和法向位移(b)的模与入射角的关系

图(a)、(b)中曲线1的弹性常数分别取自文献[1]中表1的编号1, 曲线2仅将三阶弹性常数 l 加倍其余的常数与1相同; 曲线3仅将 m 加倍

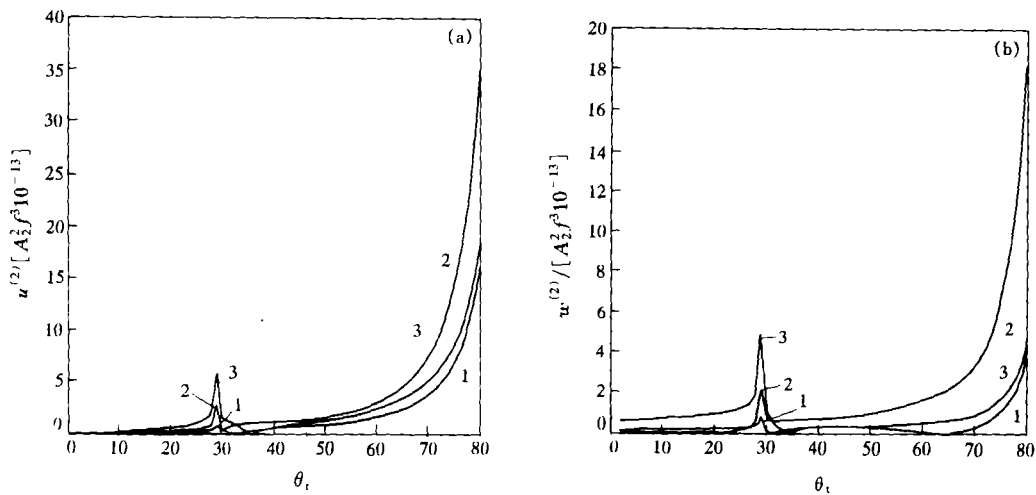


图3 SH波入射到铝的自由面上其切向位移(a)和法向位移(b)的模与入射角的关系

λ, μ 与图1相同, 在图(a)、(b)中, 曲线1的三阶弹性常数见文献[1]中表1的编号3, 曲线2仅将三阶弹性常数 n 加倍, 曲线3仅将 m 加倍, 其余不变

由文献[2]的(6)式可知, 对应的波动方程应为

$$\nabla^2 \varphi_b + 4k^2 \varphi = -A_2^2 \beta_{,2} e^{-jkx}$$

由文献[5,6]的解法可知, 它是沿 x 方向有积累的波(积累面波). 在SV波入射的情况下, 对应于 $i=3$ 时的二阶体波却是一种多变的波, 当入射角小于临界角时, 它是沿边界法线方向有积累的波; 当入射角恰好等于临界角时, 它开始成为面波(在临界角处幅度最大), 由上述讨论可知, 它也是沿平行于边界方向有积累; 当入射角大于临界角时, 它成为沿法线方向有积累的非均匀波(法向有衰减的波). 由此可见, 在入射角恰好等于临界角时, 两种波的积累都是沿边界方向. 正如文献[5,6]指出, 当 k_z 不等于零时, 沿边界方向的积累解可以转换为沿边界法线

方向的积累解,但在临界角情况下,这种关系是否成立有待进一步研究.

由(3)式可知,当入射角等于临界角时, $k_z = 0$, $u^{(2)}$, $w^{(2)}$ 分别为二阶和一阶无限大,这表明,二阶谐波在自由面上的位移为无限大,但实际上由于介质有吸收,横波和纵波的波数可分别写成

$$\begin{aligned} K &= K_0 \pm ja_l, \\ k &= k_0 \pm ja_l, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 K_0 , k_0 和 α_l , α_l 分别为它们的实部波数和吸收系数,而

$$k_z = k \cos \theta_1 = k \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = K \sqrt{\frac{k^2}{K^2} - \sin^2 \theta_1}, \quad (16)$$

通常, $K_0 \gg \alpha_l$, $k_0 \gg \alpha_l$, 利用 Snell 定律,近似地认为

$$\sin \theta_1^{(c)} = \frac{k_0}{K_0},$$

很易证明,

$$k_z \approx k_0(1 \pm j) \sqrt{\frac{\alpha_l}{k_0} - \frac{\alpha_l}{K_0}}.$$

对于纯铝而言, α/k 是 10^{-4} 到 10^{-5} 的量级,故在临界角附近, $w^{(2)}$, $u^{(2)}$ 中与 $1/k_z$ 有关的项要比其他项分别高 2 和 4 个数量级,致使用非线性方法产生的二阶谐表面波其大小有可能与线性方法所产生的表面波相比拟.

在 SH 波入射时,在临界角附近 Q 波也出现峰值,当 θ_1 趋向 90° 时,位移趋向很大的值.

参 考 文 献

- 1 钱祖文. 有界空间的非线性声学——二阶谐波的反射和折射(I) P 波入射. 中国科学, A 辑, 1993, 23(7): 693~701
- 2 钱祖文. 有界空间的非线性声学——二阶谐波的反射和折射(II) SV 和 SH 波入射. 中国科学, A 辑, 1994, 24(2): 177~185
- 3 Qian Z W. Equations of the second-order potentials of finite-amplitude wave in elastic solids. J Acoust Soc Am, 1989, 86: 1965~1967
- 4 Qian Z W. Equations of the second-order potentials in bounded solid space——bulk and surface waves. J Sound and Vibration, 1995, 186(4): 561~566
- 5 钱祖文. 非线性声学谐波方程的特解及其在边值问题中的应用. 物理学报, 1993, 42(6): 949~953
- 6 Qian Z W. Second-order harmonics of surface wave in isotropic solids. J Sound and Vibration, 1995, 187(3): 369~379