

一种域的曲率与群不变函数*

殷慰萍

(中国科学技术大学数学系, 合肥)

摘 要

对 $\mathbb{C}^n$ 中的非齐性有界域 D , 我们得到了在 D 的解析自同胚群 $\text{Aut}(D)$ 下不变的函数; 给出了在 $\text{Aut}(D)$ 下不变的 Kähler 度量的一般形式; 利用群不变函数的性质, 将满足给定曲率条件的不变 Kähler 度量的求解化为相应的常微分方程问题; 给出了使 Ricci 曲率、Scalar 曲率和全纯截曲率在给定的条件下相应的不变 Kähler 度量的一些有趣的具体表达式。

一、基本事实

我们所考虑的域 $D = D(K)$ 是:

$$D = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_1, Z) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^{2K} + |Z|^2 < 1\},$$

其中 $K \approx 1$. 我们之所以集中研究 $D(K)$, 是因为随 K 的不同, $D(K)$ 可以是齐性、非齐性, 也可是强拟凸、弱拟凸、是一个很好的模型、能对上述四方面提供很好信息。

1. $D(K)$ 的解析自同胚最大群 此群若记之为 $\text{Aut}(D)$, 则它由下列形式的 D 的双全纯映照组成:^[1]

$$w_1 = e^{i\theta} z_1 (1 - |\alpha|^2)^{1/2K} (1 - \bar{\alpha} Z')^{-1/K},$$

$$W = (w_2, \dots, w_n) = e^{i\varphi} (1 - |\alpha|^2)^{1/2} (Z - \alpha) Q_\alpha (1 - \bar{\alpha} Z')^{-1},$$

其中 θ, φ 为任意实数, $i = \sqrt{-1}$, 而且

$$\alpha = (\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n-1}, \quad |\alpha|^2 < 1,$$

$$(Q_\alpha \bar{Q}'_\alpha)^{-1} = I^{(n-1)} - \bar{\alpha}' \alpha.$$

2. $D(K)$ 的 Bergman 核 此核若记为 $K_D(z, \bar{z})$, 则它有下列具体的显表达式^[2]:

$$K_D(z, \bar{z}) = \frac{K(1 - |Z|^2)^{-n+\frac{1}{K}}}{\pi^n [(1 - |Z|^2)^{1/K} - |z_1|^2]^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} b_j (1 - |Z|^2)^{\frac{n-1-j}{K}} [(1 - |Z|^2)^{1/K} - |z_1|^2]^j.$$

其中 b_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$) 由下式对 x 的同次幂比较系数而确定¹⁾:

$$\prod_{j=0}^{n-1} (x+1+jK) = K^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j \Gamma(x+n+1-j)}{\Gamma(n+1-j) \Gamma(x+1)}.$$

3. $D = D(K)$ 在 $\text{Aut}(D)$ 下不变的 Kähler 度量与不变函数 易知¹⁾, 若

本文于 1986 年 12 月 22 日收到, 1987 年 6 月 27 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

1) 见作者文章“Reinhardt 域的不变度量与群不变函数”(待发表)。

$$w = f(z) \in \text{Aut}(D),$$

$$K_j(z, \bar{z}) = (1 - |Z|^2)^{-n + \frac{n-1}{K}} [(1 - |Z|^2)^{\frac{1}{K}} - |z_1|^2]^{-(n+1)+j},$$

则有

$$K_j(z, \bar{z}) = K_j(w, \bar{w}) \left| \det \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right|^2 \quad (j \text{ 为任意实数}).$$

当 j 属于闭区间 $[0, n]$ 时, 对 $K_j(z, \bar{z})$ 进行 ∂^2 -过程后所得矩阵 $H_j(z, \bar{z})$ 是定正的, 而且

$$H_j(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) H_j(w, \bar{w}) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right)',$$

因此度量

$$ds_i^2 = dz H_j(z, \bar{z}) d\bar{z}'$$

是在 $\text{Aut}(D)$ 下不变的 Kähler 度量.

易知¹⁾, 函数

$$Y(z, \bar{z}) = (1 - |Z|^2)^{\frac{1}{K}} [(1 - |Z|^2)^{\frac{1}{K}} - |z_1|^2]^{-1} \quad (1)$$

在 $\text{Aut}(D)$ 下不变, 即若 $r \in \text{Aut}(D)$, 则 $Y(rz, \overline{rz}) = Y(z, \bar{z})$. 而且以 Y 为变量的任何函数也在 $\text{Aut}(D)$ 下不变.

二、 $D=D(K)$ 的不变 Kähler 度量与群不变函数 $Y(z, \bar{z})$ 的关系

由于

$$\begin{aligned} K_j(z, \bar{z}) &= (1 - |Z|^2)^{-n + \frac{n-1}{K}} [(1 - |Z|^2)^{\frac{1}{K}} - |z_1|^2]^{-(n+1)+j} \\ &= [Y(z, \bar{z})]^{n+1-j} (1 - |Z|^2)^{-\frac{nK+1}{K}}, \end{aligned}$$

因此, $D(K)$ 的 Bergman 核 $K_D(z, \bar{z})$ 可表为:

$$\begin{aligned} K_D(z, \bar{z}) &= \frac{K}{\Pi^n} \sum_{j=0}^{n-1} b_j K_j(z, \bar{z}) \\ &= \frac{K}{\Pi^n} (1 - |Z|^2)^{-\frac{nK+1}{K}} \sum_{j=0}^{n-1} b_j (Y(z, \bar{z}))^{n+1-j}. \end{aligned}$$

由此可知, $D(K)$ 的 Bergman 度量方阵, 实际上就是 $Y(z, \bar{z})$ 为变量的某一个函数与 $(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 的积经过 ∂^2 -过程而得到的. 下面我们证明 $D(K)$ 的任何在 $\text{Aut}(D)$ 下不变的 Kähler 度量, 在一个相当广泛的基本假定之下, 都可由下列形式的函数生成:

$$F(Y) (1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}, \quad (2)$$

其中 $F(Y)$ 是 Y 的任意一个函数.

基本假定 设 $D(K)$ 的函数 $K(z, \bar{z})$ 满足:

1) 见1245页脚注1).

- (A) $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ 是 } z \text{ 和 } \bar{z} \text{ 的解析函数,} \\ 2. \text{ 对 } w = f(z) \in \text{Aut}(D), \text{ 有 } K(z, \bar{z}) = K(w, \bar{w}) \left| \det \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right|^2, \\ 3. \text{ } z = (z_1, 0) \text{ 时, } K(z, \bar{z}) \text{ 是 } |z_1|^2 \text{ 的某个函数 } F(|z_1|^2), \\ 4. \text{ 当 } z \in D(K) \text{ 时 } K(z, \bar{z}) > 0, \\ 5. \text{ 对 } K(z, \bar{z}) \text{ 进行 } \partial^2\text{-过程后所得矩阵定正, 即 } \left(\frac{\partial^2 \log K(z, \bar{z})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) > 0, \end{array} \right.$

此时我们称 $K(z, \bar{z})$ 为 $D(K)$ 的不变 Kähler 度量的生成函数。我们有如下定理。

定理 1. 若 $K(z, \bar{z})$ 为 $D(K)$ 的不变 Kähler 度量的生成函数, 则

$$K(z, \bar{z}) = F[Y(z, \bar{z})](1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}.$$

证. 由 (A)2 知, 当 $z = (z_1, \alpha)$ 时,

$$K[(z_1, \alpha), (z, \bar{\alpha})] = K[(w_1, 0), (\bar{w}_1, 0)] \left| \det \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right|^2_{z=\alpha}$$

由 (A)3 知,

$$K[(w_1, 0), (w_1, 0)] = F(|w_1|^2) = F\left[\frac{|z_1|^2}{(1 - |\alpha|^2)^{1/K}}\right],$$

而

$$\left| \det \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right|^2_{z=\alpha} = (1 - |\alpha|^2)^{-(nK+1)/K}.$$

上面运算对任意 $(z_1, \alpha) \in D(K)$ 都成立, 令 $\alpha = Z$ 得

$$K(z, \bar{z}) = F\left[\frac{|z_1|^2}{(1 - |Z|^2)^{1/K}}\right](1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}, \quad (3)$$

而

$$\begin{aligned} F\left[\frac{|z_1|^2}{(1 - |Z|^2)^{1/K}}\right] &= F\left[\frac{-((1 - |Z|^2)^{\frac{1}{K}} - |z_1|^2) + (1 - |Z|^2)^{1/K}}{(1 - |Z|^2)^{1/K}}\right] \\ &= F[-Y^{-1}(z, \bar{z}) + 1] \end{aligned}$$

仍然是 $Y(z, \bar{z})$ 的一个函数, 不妨仍将它记为 $F(Y)$, 以此代入 (3) 式即得所证。

由定理 1 知, 满足条件 (A) 的 $D(K)$ 的不变 Kähler 度量由形式 (2) 式的函数所生成。显然, 并不是所有 (2) 式的函数都符合基本假定 (A), 但是我们有:

定理 2. 若 (2) 式的函数满足 (A) 中的 1, 4, 5, 则此函数是 $D(K)$ 的不变 Kähler 度量的生成函数。而且与 (A)5 相应的度量矩阵为:

$$J \begin{pmatrix} F_1(Y) & 0 \\ 0 & F_2(Y)I^{(n-1)} \end{pmatrix} \bar{J}',$$

其行列式为:

$$G(Y)(1 - |Z|^2)^{-\frac{nK+1}{K}}$$

也具 (2) 式的形式。其中

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \quad J_{11} = e^{i\theta}(1 - |Z|^2)^{-\frac{1}{2K}}, \quad J_{21} = \frac{e^{i\varphi}}{K} z_1(1 - |Z|^2)^{-\frac{(2K+1)}{2K}} \bar{z}', \\ J_{22} = e^{i\varphi}(1 - |Z|^2)^{-\frac{1}{2}} Q_Z.$$

证. (2)式的函数显然满足 (A)3. 由第一节 1 知:

$$1 - |W|^2 = 1 - (1 - |\alpha|^2)(Z - \alpha)Q_\alpha \bar{Q}'_\alpha(Z' - \bar{\alpha}')|1 - \bar{\alpha}Z'|^{-2}.$$

经计算知

$$1 - |W|^2 = |1 - \bar{\alpha}z'|^{-2}(1 - |\alpha|^2)(1 - |z|^2).$$

而

$$\left| \det \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 = \frac{(1 - |\alpha|^2)^{(nK+1)/K}}{|1 - \bar{\alpha}Z'|^{2(nK+1)/K}},$$

因此

$$F(Y)(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K} = F(Y(w, \bar{w}))(1 - |W|^2)^{-\frac{nK+1}{K}} \left| \det \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 \text{ 满足 (A)2, 因}$$

此可成为不变 Kähler 度量的生成函数.

经过一些计算可知, 对(2)式的函数进行了 ∂^2 -过程后所得矩阵为:

$$J \begin{pmatrix} F_1(Y) & 0 \\ 0 & F_2(Y)I^{(n-1)} \end{pmatrix} \bar{J}',$$

其中

$$F_1(Y) = Y^2 \left[\frac{F'(Y)}{F(Y)}(-1 + 2Y) + \frac{F''(Y)}{F(Y)}(Y^2 - Y) + \left(\frac{F'}{F} \right)^2 (Y - Y^2) \right],$$

$$F_2(Y) = \frac{F'(Y)Y}{KF(Y)}(Y - 1) + \frac{nK + 1}{K},$$

$F'(Y), F''(Y)$ 分别表示 $F(Y)$ 对 Y 的一阶和二阶导数.

上面矩阵的行列式为:

$$F_1(F_2)^{n-1}(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K} = G(Y)(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}.$$

对任一不变函数 $F(Y)$, 由于对 $w = f(z) \in \text{Aut}(D)$ 有

$$\left(\frac{\partial^2 F(Y)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 F[Y(w, \bar{w})]}{\partial w_i \partial \bar{w}_j} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)',$$

因此上式若为定正方阵, 则 $F(Y)$ 就生成一个不变的 Kähler 度量. 但计算表明, 上式左端为:

$$J \begin{pmatrix} Y^2[F''(Y^2 - Y) + F'(2Y - 1)], & 0 \\ 0, & K^{-1}YF'(Y - 1)I^{(n-1)} \end{pmatrix} \bar{J}',$$

而 $Y - 1 = [(1 - |Z|^2)^{\frac{1}{K}} - 1]^{-1}|z_1|^2$, 当 $z_1 = 0$ 时, 上面方阵不可能定正. 因此, 任何一个不变函数都不可能成为 $D(K)$ 的不变 Kähler 度量的生成函数. 这种生成函数, 正如定理 1 所证明的, 必须在(2)式的函数中去找.

三、对 C^n 中任意一个有界域 $\mathcal{D}$ 的情形

将(2)式改写一下, 并注意到第二节开头的 $D(K)$ 的 Bergman 核的表达形式. 我们有:

$$\begin{aligned} F(Y)(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K} &= F(Y) \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j Y^{n+1-j} \right)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j Y^{n+1-j} \right) (1 - |Z|^2)^{\frac{-(nK+1)}{K}} \\ &= G(Y) K_D(z, \bar{z}). \end{aligned}$$

其中 $G(Y)$ 仍然是一个 Y 的某一函数, 即是 $D(K)$ 的在 $\text{Aut}(D)$ 下不变的函数.

因此, 对 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域 $\mathcal{D}$, 若 $K_{\mathcal{D}}(z, \bar{z})$ 是 Bergman 函数, 以 $F(z, \bar{z})$ 表示域 $\mathcal{D}$ 的在 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ 下的任意不变函数, 若下式的函数

$$F(z, \bar{z}) K_{\mathcal{D}}(z, \bar{z}) \quad (4)$$

中, $F(z, \bar{z})$ 是 z 和 $\bar{z}$ 的解析函数且 > 0 , 而且由对 (4) 式进行 ∂^2 -过程所得的方阵定正, 则 (4) 式的函数就生成了域 $\mathcal{D}$ 的在 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ 下不变的 Kähler 度量.

当 $\mathcal{D}$ 为齐性域时, 在 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ 下不变的函数显然只能是常数. 此时 (4) 式的函数只能生成唯一的一个不变 Kähler 度量即 Bergman 度量.

当 $\mathcal{D}$ 不是齐性域时, 总存在域 $\mathcal{D}$ 的在 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ 下不变的函数且非常数. 例如令

$$Y(z, \bar{z}) = \frac{K_{\mathcal{D}}(z, \bar{z})}{\det T_{\mathcal{D}}(z, \bar{z})},$$

其中 $T_{\mathcal{D}}(z, \bar{z})$ 是域 $\mathcal{D}$ 的 Bergman 度量方阵, 则易知, $Y(z, \bar{z})$ 在 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ 下不变, 任何以 Y 为变量的函数 $G(Y(z, \bar{z})) = F(z, \bar{z})$ 也在 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ 下不变. 而且当 $\mathcal{D}$ 不是齐性域时, 一般来说, $Y(z, \bar{z})$ 不是常数. 因此存在着 $\mathcal{D}$ 的在 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ 下不变的非常数函数, 而且其数量是无穷的. 这样正如对 $D(K)$ 讨论的那样, 形如下式:

$$F(Y) K_{\mathcal{D}}(z, \bar{z}) \quad (5)$$

的函数, 当 $\mathcal{D}$ 不是齐性域时, 能产生无穷多个在 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ 下不变的域 $\mathcal{D}$ 的 Kähler 度量, 适当选取 $F(Y)$, 就能得到满足给定曲率条件的在 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ 下不变的 Kähler 度量来.

四、 $D(K)$ 的不变 Kähler 度量所满足的微分方程

令

$$X = |z_1|^2 (1 - |Z|^2)^{-1/K}, \quad (6)$$

则 $X = 1 - Y^{-1}$, 是 Y 的函数. 同时 $Y = (1 - X)^{-1}$ 也是 X 的函数. 因此可令

$$\begin{aligned} I(D) &\equiv \{F(Y) | F(Y) \text{ 是 } Y \text{ 的实值函数}\} \\ &= \{G(X) | G(X) \text{ 是 } X \text{ 的实值函数}\}. \end{aligned}$$

若 $G(X) \in I(D)$, 而且 $W = \log G(X)$ 有意义, 同时有

$$(M) \begin{cases} X \frac{dW}{dX} + nK + 1 > 0, \\ X \frac{d^2 W}{dX^2} + \frac{dW}{dX} > 0, \end{cases}$$

我们称 $G(X)$ 满足条件 (M). 令

$$IM(D) = \{G(X)(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K} | G(X) \in I(D) \text{ 并满足 (M)}\},$$

则 $IM(D)$ 中的任一元素 $G(X)(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 都是 D 的不变 Kähler 度量的生成函数. 事实上, 令

$$T(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial^2 \log [G(X)(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}]}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right),$$

则容易验证有 $T(z, \bar{z}) > 0$. 若 $w = f(z) \in \text{Aut}(D)$, 则不难验证有下式成立:

$$T(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) T(w, \bar{w}) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right). \quad (7)$$

因此度量

$$dS^2 = dz T(z, \bar{z}) d\bar{z}$$

在 $\text{Aut}(D)$ 下不变. 经计算我们有

$$T(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & K^{-1} G_2 I^{(n-1)} \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}}, \quad (8)$$

其中 J_{11}, J_{21}, J_{22} 如定理 2 中所示,

$$G_1 = XW'' + W', \quad G_2 = XW' + nK + 1. \quad (9)$$

这里 $W' = \frac{dW}{dX}$, $W'' = \frac{d^2W}{dX^2}$ (下同).

若令

$$H(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial^2 \log \det T(z, \bar{z})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right),$$

则经过计算, 我们有

$$H(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & K^{-1} H_2 I^{(n-1)} \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} J_{11} & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}}, \quad (10)$$

其中

$$H_2 = X \left[\frac{dW_1}{dX} + (n-1) \frac{dW_2}{dX} \right] + nK + 1, \quad (11)$$

$$H_1 = \frac{dH_2}{dX} = X[W_1' + (n-1)W_2'] + W_1' + (n-1)W_2', \quad (12)$$

$$W_1 = \log G_1, \quad W_2 = \log G_2. \quad (13)$$

1. $D(K)$ 的 Ricci 曲率

设由 $G(X)(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 生成的 $D(K)$ 的不变 Kähler 度量下的 Ricci 曲率记为 $R(z, dz)$. 则

$$R(z, dz) = -dz H(z, \bar{z}) d\bar{z}' / [dz T(z, \bar{z}) d\bar{z}'].$$

(1) $R(z, dz) = 0$, 易知其充要条件为 $H_2 \equiv 0$. 即 $X[W_1' + (n-1)W_2'] + nK + 1 = 0$, 即 $W_1 + (n-1)W_2 = -(nK+1) \log X + C_1$, 即 $G_1 G_2^{n-1} = e^{C_1} X^{-(nK+1)}$, 即

$$(G_2^n)' = n e^{C_1} X^{-(nK+1)},$$

即有 $G_2^n = -K^{-1} e^{C_1} X^{-nK} + C_2$. 当 X 趋于零时, G_2^n 趋于 $-\infty$. 因而不管常数 C_2 取多么大, 总不能使 $G_2 = XW' + nK + 1$ 总大于零. 不满足条件 (M), 也即 $IM(D)$ 中的任一元素所生成的不变 Kähler 度量的 Ricci 曲率不能恒等于零.

(2) 用上述类似办法, 可以证明 $IM(D)$ 中的任一元素所生成的不变 Kähler 度量的 Ricci 曲率不可能恒 ≥ 0 或恒 > 0 .

(3) $R(z, dz) \equiv -1$, 易知其充要条件为 $H(z, \bar{z}) = T(z, \bar{z})$. 即 $X[W'_1 + (n-1)W'_2] - XW' \equiv 0$, 即 $W_1 + (n-1)W_2 - W = C_1$, 即 $\log G_1 + (n-1)\log G_2 - \log G = C_1$. 即

$$(XW'' + W')(XW' + nK + 1)^{n-1} = e^{C_1} e^W. \quad (14)$$

熟知, 要得到 $\mathbf{C}^n$ 中光滑有界域的 Kähler-Einstein 度量, 一般要解下列复 Monge-Ampère 型的方程:

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right) = e^{(n+1)u}.$$

而我们在域 $D(K)$ 的情况, 将它化为一个常微分方程的求解问题.

(4) $R(z, dz) \leq 0$, 其充要条件为 $H(z, \bar{z}) \geq 0$. 此即 $H_2 = X[W'_1 + (n-1)W'_2] + nK + 1 \geq 0$ 及 $H'_2 \geq 0$, 这说明 H_2 是变量 X 在 $[0, 1)$ 上的非负不减函数 (因 $0 \leq X < 1$), 因此设 $f(X)$ 是任一给定的在 $[0, 1)$ 上不减的非负函数, 则方程 $X[W'_1 + (n-1)W'_2] + nK + 1 = f(X)$ 的解 $G(X) \in I(D)$, 而 $G(X)(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K} \in IM(D)$. 因此要求 $R(z, dz) \leq 0$ 的问题就化为下列常微分方程的求解问题:

$$\begin{cases} W'_1 + (n-1)W'_2 = [f(X) - (nK + 1)]/X, \\ f(X) \text{ 在 } [0, 1) \text{ 上不减且非负.} \end{cases} \quad (15)$$

解得

$$G(X) = X^{-(nK+1)} \exp \left\{ C_3 + \left[n \int X^{-(nK+1)} \exp \left(C_1 + \int f(X) X^{-1} dX \right) + C_2 \right]^{\frac{1}{n}} X^{-1} dX \right\},$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意实常数.

(5) $R(z, dz) < 0$, 同(4)一样, 此问题化为下列常微分方程问题:

$$\begin{cases} W'_1 + (n-1)W'_2 = [f(X) - (nK + 1)]/X, \\ f(X) \text{ 为在 } [0, 1) \text{ 上增加的正值函数.} \end{cases} \quad (16)$$

解得

$$G(X) = X^{-(nK+1)} \exp \left\{ C_3 + \left[C_2 + n \int X^{-(nK+1)} \exp \left(C_1 + \int f(X) X^{-1} dX \right) \right]^{\frac{1}{n}} X^{-1} dX \right\},$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意实常数.

(6) $R(z, dz) \leq -1$, 其充要条件为 $H(z, \bar{z}) - T(z, \bar{z}) \geq 0$, 此即 $H_2 - G_2 \geq 0$ 及 $(H_2 - G_2)' \geq 0$. 因此 $H_2 - G_2$ 为 $[0, 1)$ 上不减的非负函数. 这就化为下列方程问题:

$$\begin{cases} X[W'_1 + (n-1)W'_2 - W'] = f(X), \\ f(X) \text{ 在 } [0, 1) \text{ 上非负且不减.} \end{cases} \quad (17)$$

上述方程等价于

$$(XW'' + W')[XW' + nK + 1]^{n-1} = e^W \exp[C_1 + \int f(X) X^{-1} dX].$$

(7) $-1 \leq R(z, dz) \leq 0$, 这等价于 $H(z, \bar{z}) - T(z, \bar{z}) \leq 0$, 此即 $H_2 - G_2 \leq 0$ 及 $(H_2 - G_2)' \leq 0$. 因此, $H_2 - G_2$ 为 $[0, 1)$ 上不增的非正函数. 这化为下列方程问题:

$$\begin{cases} X[W'_1 + (n-1)W'_2 - W'] = f(X), \\ f(X) \text{ 在 } [0, 1) \text{ 上非正且不增.} \end{cases} \quad (18)$$

这方程等价于

$$(XW'' + W')(XW' + nK + 1)^{n-1} = e^W \exp \left[C_1 + \int f(X)X^{-1}dX \right].$$

(3)–(7)的解 $G(X) = e^W$ 必须符合条件 (M).

2. $D(K)$ 的 Scalar 曲率

设由 $IM(D)$ 中的元素 $G(X)(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 生成的不变 Kähler 度量下 D 的 Scalar 曲率记为 $\mathcal{Q}(z, \bar{z})$, 则有

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(z, \bar{z}) &= -\text{tr}[T^{-1}(z, \bar{z})H(z, \bar{z})] \\ &= -\left[\frac{H_1}{G_1} + (n-1)\frac{H_2}{G_2}\right]. \end{aligned}$$

经计算, 我们有:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(z, \bar{z}) &= -X \left[\frac{G_2''}{(G_2')^2} - \frac{(G_2'')^2}{(G_2')^3} + \frac{2(n-1)G_2''}{G_2 G_2'} + (n-1)(n-2) \frac{G_2'}{G_2^2} \right] \\ &\quad - \left[\frac{G_2''}{(G_2')^2} + (n-1)(nK+2) \frac{1}{G_2} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

其中 G_2 如(9)式所示, 而

$$W = \log G(X), \quad (21)$$

因此(20)式就是关于 $G(X)$ 的对 X 的常微分方程. 对 $\mathcal{Q}(z, \bar{z})$ 给定曲率条件(例如 ≤ 0 , < 0 , $< -a^2 < 0$ 等), 就化为常微分方程的求解问题. 这里就不一一列出了, 都可仿 1. 的方法去转化.

3. 全纯截曲率

设由 $IM(D)$ 中任一元素 $G(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 所生成的不变 Kähler 度量下的 D 的全纯截曲率记为 $\omega(z, dz)$, 则有

$$\omega(z, dz) = \frac{dz[-\bar{d}dT + dT \cdot T^{-1}\bar{d}T']\bar{d}z'}{[dzT\bar{d}z']^2},$$

由于

$$T = T(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} T_{11} &= (XW'' + W')(1 - |Z|^2)^{-\frac{1}{K}}, \quad T_{12} = K^{-1}(XW'' + W')(1 - |Z|^2)^{-1-\frac{1}{K}}\bar{z}_1 Z, \\ T_{22} &= K^{-2}(XW'' + W')(1 - |Z|^2)^{-2-\frac{1}{K}}|z_1|^2 \bar{Z}' Z + K^{-1}(XW' + nK + 1)(1 - |Z|^2)^{-1} Q \bar{Q}', \\ Q \bar{Q}' &= (I - \bar{Z}' Z)^{-1}, \quad T_{21} = \bar{T}'_{12}. \end{aligned}$$

为了得到 $\omega(z, dz)$ 的表达式, 我们只要计算出在点 $z = (z_1, 0)$ 处的表达式, 就能得到在任意点 $z \in D$ 的表达式. 以下先计算 $\omega(z, dz)$ 在 $(z_1, 0)$ 处的式子, 为书写简单起见本段下面的算式都理解为在 $(z_1, 0)$ 点处的值, 经计算我们有:

$$\begin{aligned} dT_{11} &= (XW''' + 2W'')\bar{z}_1 dz_1, \\ \bar{d}dT_{11} &= [(XW''' + 2W'') + (XW^{(4)} + 3W''')X]|dz_1|^2 \\ &\quad + K^{-1}[(XW'' + W') + (XW''' + 2W'')X]dZ\bar{d}Z', \end{aligned}$$

$$dT_{12} = K^{-1}(XW'' + W')\bar{z}_1 dZ,$$

$$\bar{d}dT_{12} = K^{-1}[(XW'' + W') + X(W'' + 2W'')]\bar{d}z_1 dZ$$

$$dT_{22} = K^{-1}(XW'' + W')\bar{z}_1 dz_1 I^{(n-1)},$$

$$\begin{aligned} \bar{d}dT_{22} = & K^{-1}[K^{-1}X(XW'' + W') + (XW' + nK + 1)]\bar{d}\bar{Z}'dZ \\ & + K^{-1}I^{(n-1)}\{[(XW'' + W') + (XW''' + 2W'')X]|dz_1|^2 \\ & + [(XW' + nK + 1) + X(XW'' + W')]\bar{d}Z\bar{d}\bar{Z}'\}. \end{aligned}$$

令

$$dT \cdot T^{-1}\bar{d}T' = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix},$$

则经计算有

$$\begin{aligned} R_{11} = & (XW'' + W')^{-1}(XW''' + 2W'')^2 X|dz_1|^2 \\ & + K^{-1}(XW' + nK + 1)^{-1}(XW'' + W')^2 X dZ\bar{d}\bar{Z}', \end{aligned}$$

$$R_{12} = \bar{R}_{21} = K^{-1}(XW' + nK + 1)^{-1}(XW'' + W')^2 X \bar{d}z_1 dZ,$$

$$R_{22} = K^{-1}(XW' + nK + 1)^{-1}(XW'' + W')^2 X|dz_1|^2 I^{(n-1)}.$$

因此,最后我们得到 $\omega(z, dz)$ 在 $(z_1, 0)$ 处之值为:

$$\begin{aligned} \omega(z, dz) = & \{[(XW'' + W')^{-1}(XW''' + 2W'')^2 X - (XW''' + 2W'') \\ & - X(XW''' + 2W'')']|dz_1|^4 - K^{-1}[2(XW' + nK + 1) \\ & + K^{-1}(K + 1)X(XW'' + W')] (dZ\bar{d}\bar{Z}')^2 + [4(XW' + nK + 1)^{-1} \\ & \cdot (XW'' + W')^2 X - 4(XW'' + W') - 4(XW''' + 2W'')X]K^{-1}|dz_1|^2 dZ\bar{d}\bar{Z}'\} \\ & \cdot \{(XW'' + W')|dz_1|^2 + K^{-1}(XW' + nK + 1)dZ\bar{d}\bar{Z}'\}^{-2}. \end{aligned}$$

上式中把 $|dz_1|^2$ 换为 $\{(1 - |Z|^2)^{-1-\frac{1}{K}}[(1 - |Z|^2)^2|dz_1|^2 + K^{-2}|z_1|^2 \bar{Z}dZ'Z\bar{d}\bar{Z}' + 2K^{-1}(1 - |Z|^2)\text{Re}(\bar{z}_1 dz_1 Z\bar{d}\bar{Z}')]\}$, 把 $dZ\bar{d}\bar{Z}'$ 换为 $[(1 - |Z|^2)^{-1} \cdot dZ(I - \bar{Z}'Z)^{-1}\bar{d}\bar{Z}']$, X 如(6)式所示, W 如(21)式所示, 则所得结果就是 $\omega(z, dz)$ 在 D 的任一点 z 处的表达式.

对 $\omega(z, dz)$ 给定条件, 则满足此给定条件的不变 Kähler 度量的求解, 就化为相应的常微分方程的求解问题.

五、满足给定曲率条件的不变 Kähler 度量的具体表达式

1. Ricci 曲率 $R(z, dz)$

(1) 令 $G(X) = (1 + X)^{2(nK+1)/(n-1)}$. 则 $G_2 = XW' + nK + 1 = 2(nK + 1)(n - 1)^{-1}X(1 + X)^{2(nK+1)(n-1)^{-1-1}} + nK + 1$. $G_1 = G'_2 = 2(nK + 1)(n - 1)^{-1}(1 + X)^{-2}$, 显然 $G(X)$ 满足条件 (M). $H_2 = X[W'_1 + (n - 1)W'_2] + nK + 1 = X(n + 1)[(1 + X)^{-1} - (1 + (n + 1)(n - 1)^{-1}X)^{-1}] + nK + 1 > 0$, $H_1 = -(n + 1)(1 + X)^{-2} + (n - 1)^2(n + 1)[n - 1 + (n + 1)X]^{-2} \leq 0$, 因此在相应的不变度量下其 Ricci 曲率符号不定. 若 $dz = (dz_1, 0) \neq 0$, 则 $R(z, dz) \geq 0$. 若 $dz = (0, dZ) \neq 0$, 则 $R(z, dZ) < 0$. 特别 $X = 0$ 时, $H_1 = 0$, $H_2 = nK + 1$, 因此取 $dz = (dz_1, 0) \neq 0$, 在 $z = (0, Z)$ 点 (即 $X = 0$ 的点) 有 $R(z, dz) = 0$.

(2) 令 $G(X) = (1 - X)^{-(n+1-j)}$, 则由文献[3]可知, 当 $0 \leq j \leq n$ 时, 相应的 Ricci 曲率 $R(z, dz) < 0$. X 当 $j = 0$ 时, $R(z, dz) > -1$, 当 $j = n - 1$ 时, $R(z, dz) \leq -1$ (都假定 $K > 1$).

(3) 令 $G(X) = (1 - X)^{-(nK+1)}$, 则 $G_2 = (nK + 1)(1 - X)^{-1} > 0$, 而 $G_1 = (nK + 1)(1 - X)^{-2} > 0$, 故 $G(X)$ 符合条件 (M). 又有 $H_2 = X[2(1 - X)^{-1} + (n - 1)(1 - X)^{-1}] + nK + 1 = (n + 1)X(1 - X)^{-1} + nK + 1$, $H_1 = (n + 1)(1 - X)^{-2}$. 而 $H_1 - G_1 = (n - nK)(1 - X)^{-2}$, $H_2 - G_2 = (n - nK)(1 - X)^{-1} + nK - n = (n - nK)(1 - X)^{-1}X$. 因此, 当 $K = 1$ 时 $H_1 - G_1 = 0$, $H_2 - G_2 = 0$, 对应的 $R(z, dz) \equiv -1$; 当 $K > 1$ 时, $H_1 - G_1 < 0$, $H_2 - G_2 < 0$, 对应的 $R(z, dz) > -1$; 当 $K < 1$ 时, $H_1 - G_1 > 0$, $H_2 - G_2 > 0$, 故对应的 Ricci 曲率 $R(z, dz) < -1$. 由此可知由

$$(1 - X)^{-(nK+1)}(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}$$

生成的 Kähler 度量与 D 的 Bergman 度量很相似.

(4) 令 $G(X) = (1 - X)^{-2(nK+1)/(n+1)}$, 则 $G_2 = [2(nK + 1)/(n + 1)](1 - X)^{-1}X + nK + 1$, $G_1 = 2(nK + 1)(n + 1)^{-1}(1 - X)^{-2}$, 故 $G(X)$ 满足条件 (M). $H_2 = X[(n + 1)(1 - X)^{-1} - (n - 1)^2(n + 1 - (n - 1)X)^{-1}] + nK + 1 = (n + 1)[(1 - X)^{-1} - (n - 1)(n + 1 - (n - 1)X)^{-1}] + nK - 1 > 0$, $H_1 = 4[n - (n - 1)X](1 - X)^{-2}[(n + 1) - (n - 1)X]^{-2}$. 因此, $R(z, dz) < 0$. 当 $K < 1$ 时, 相应的 $R(z, dz) < -1$. 当 $K > 1$ 时, n 适当大, 有 $-1 < R(z, dz) < 0$.

2. Scalar 曲率

(1) 令 $G(X) = (1 - X)^{-(n+1-j)}(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}$, 由文献[3]可知, 当 $K > 1$, $0 \leq j \leq n$ 时, 有 $\mathcal{Q}(z, \bar{z}) \leq -(n + 1)[(n + 1 - j)^{-1} + (n - 1)(n + 1 - j)(nK + 1)^{-1}]$.

(2) 令 $G(X) = (1 - X)^{-(nK+1)}$, 由计算易知, 相应的 $\mathcal{Q}(z, \bar{z}) = -n(nK + 1)^{-1}[(n - 1)(1 - K)X + (n - 1)K + 2] = -n(nK + 1)^{-1}[(n - 1)(K - 1)(1 - X) + n + 1] < 0$. 当 $K > 1$ 时, $\mathcal{Q}(z, \bar{z})$ 随 X 而递增, 故 $-n(nK + 2 - K)(nK + 1)^{-1} < \mathcal{Q}(z, \bar{z}) < -n(n + 1)(nK + 1)^{-1}$. 当 $K < 1$ 时, $\mathcal{Q}(z, \bar{z})$ 随 X 而递减. 因此, 此时有 $-n(n + 1)(nK + 1)^{-1} < \mathcal{Q}(z, \bar{z}) < -n(nK + 2 - K)(nK + 1)^{-1}$. 不论 K 如何, 当 $K \rightarrow 1$ 时, 总有 $\mathcal{Q}(z, \bar{z}) \rightarrow -n$. 由此可知, 由 $(1 - X)^{-(nK+1)}(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 所生成的不变 Kähler 度量与 Bergman 度量很类似.

(3) 令 $G(X) = (1 + X)^{\lambda(nK+1)}$ ($\lambda > 0$), 则有 $G_2 = (1 + X)^{-1} \cdot [(1 + \lambda)X + 1](nK + 1) > 0$, $G_1 = (1 + X)^{-2}\lambda(nK + 1) > 0$, $H_2 = (n + 1)(1 + X)^{-1} - (n - 1)[(1 + \lambda)X + 1]^{-1} + nK - 1$, $H_1 = -(n + 1)(1 + X)^{-2} + (n - 1)(1 + \lambda)[(1 + \lambda)X + 1]^{-2}$ (当 $\lambda \leq \frac{n+1}{n-1}$ 时, 显然有 $H_1 < 0$, 因此, 有可能使 $\mathcal{Q}(z, \bar{z}) > 0$). 经计算, $-\mathcal{Q}(z, \bar{z}) = H_1 G_1^{-1} + (n - 1)H_2 \cdot G_2^{-1} = (nK + 1)^{-1}\lambda^{-1}[(1 + \lambda)X + 1]^{-2} \cdot \{- (n + 1)[1 + (1 + \lambda)X]^2 + (1 + X)^2(n - 1)(1 + \lambda) + (n - 1)(n + 1)\lambda[1 + (1 + \lambda)X] - \lambda(n - 1)^2(1 + X) + (1 + X)(n - 1)(nK - 1)\lambda[1 + (1 + \lambda)X]\}$. 令 $f(X)$ 代表大括号内的式子, 则当 $X_0 = -\{\lambda^2 n(n - 1)(K + 1) + 2\lambda[(n - 1)nK - 2] - 4\} \{2(1 + \lambda) \cdot [(n(n - 1)K - 2n)\lambda - 2]\}^{-1} = -n(n$

$-1)(K+1)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\{2(1+\lambda)[(n(n-1)K-2n)\lambda-2]\}^{-1}$, 其中 λ_1 是 $[(n-1)n(K+1)]^{-1}\{- (n-1)nK+2 \pm [((n-1)nK-2)^2+4n(n-1)(K+1)]^{\frac{1}{2}}\}$ 中取“-”号的项, λ_2 是取“+”号的项. 易见 $\lambda_1 < 0$, 而当 $K > 1$ 时有 $\lambda_2 > 0$, 由 X_0 的表示式可知, 当 $K > 1, \lambda \leq \lambda_2, [n(n-1)K-2n]\lambda-2 \leq 0$ 时, 有 $X_0 < 0$. 即 $f(X)$ 的唯一的一个取最大值的点 $X_0 \in [0, 1)$, 因此 $f(X)$ 在 $[0, 1)$ 单调所以若 $f(0) < 0$, 则 $f(X)$ 在 $[0, 1)$ 恒小于零, 从而 $\mathcal{Q}(z, \bar{z}) > 0$ 在 $D(K)$ 成立. 下面计算 $f(0)$. 经计算有 $f(0) = \lambda(n-1)(nK+2)-2$. 因此当 $\lambda < 2[(n-1)(nK+2)]^{-1}, K > 1$ 时, 有 $f(0) < 0$. 故最后得出结论如下: 当 $K > 1, 0 < \lambda < \min\{2[(n-1)(nK+2)]^{-1}, \lambda_2, 2[n(n-1)K-2n]^{-1}\}$ 时, 由 $(1+X)^{\lambda(nK+1)}(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 生成的不变 Kähler 度量的 Scalar 曲率, $\mathcal{Q}(z, \bar{z}) > 0$ 在 $D(K)$ 的每一点成立.

(4) 令 $G(X) = (1-X)^{-l} (l > 0), G_2 = l(1-X)^{-1} + nK + 1 > 0, G_1 = l(1-X)^{-2} > 0, H_2 = (n+1)(1-X)^{-1} - (n-1)(nK+1)[(l-nK-1)X + (nK+1)]^{-1} + nK - 1, H_1 = (n+1)(1-X)^{-2} + (n-1)(nK+1)(l-nK-1)[(l-nK-1)X + nK+1]^{-2}$. 经计算有: $H_1 G_1^{-1} + (n-1)H_2 G_2^{-1} = (n+1)/l + l^{-1}[(l-nK-1)X + nK+1]^{-2} \cdot \{(1-X)^2[(n-1)(nK+1)(l-nK-1) + l(n-1)(nK-1)(nK+1-l)] + (1-X)[l^2(n-1)(nK-1) + l(n-1)(n+1)(nK+1-l) - l(n-1)^2(nK+1)] + l^2(n-1)(n+1)\}$. 令大括号内的式子为 $f(1-X)$, 并令 $1-X=T$, 则 $f'(T) = 2T(n-1)(nK+1-l)[l(nK-1) - (nK+1)] + l(n-1)[(nK+1)(l+2) - l(n+3)]$, $f'(T)$ 的唯一零点为 $T_0 = -l[(nK+1)(l+2) - l(n+3)] \cdot \{2(nK+1-l) \cdot [l(nK-1) - (nK+1)]\}^{-1}$. $nK+1 > l > (nK+1)(nK-1)^{-1}$ 时, $T_0 < 0 (K > 1)$. 当 $T > T_0$ 时 $f(T)$ 递增, $f(T)$ 在 $(0, 1]$ 的最小值为 $f(0) = l^2(n-1)(n+1)$, 其最大值为 $f(1) = (n-1)(nK+1)[l(nK+2) - (nK+1)]$ 因此有如下估计式:

$$-\frac{n+1}{l} - \frac{l(nK+2) - nK - 1}{l^2(n-1)^{-1}(nK+1)^{-1}} \leq \mathcal{Q}(z, \bar{z}) \leq -\frac{n+1}{l} - \frac{l(n-1)(n+1)}{(nK+1)^2}, \quad (22)$$

当 $K > 1, (nK+1 > l) > (nK+1)(nK-1)^{-1}$ 时成立.

易知, 当 $K > 1, l > nK+1$ 或 $l < (nK+1)(nK-1)^{-1}$ 时, 有 $T_0 > 0$. 由计算表明, 当 $l > l_2, K > 1$ 时有 $T_0 > 1$. 当 $K > 1, l < l_1$ 时有 $T_0 > 1$, 其中

$$l_1 = (nK+1)(nK+n)^{-1}[(nK+1) - (n^2K^2 - 2n + 1)^{\frac{1}{2}}],$$

$$l_2 = (nK+1)(nK+n)^{-1}[(nK+1) + (n^2K^2 - 2n + 1)^{\frac{1}{2}}].$$

因此, 当 $K > 1, l > l_2$ 时或 $l < l_1$ 时, 都有 $T_0 > 1$, 而且 $f(T)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 所以此时也有估计式(22)成立.

3. $D(K)$ 的全纯截曲率 (Holomorphic sectional curvature)

本文我们简称为全纯曲率.

(1) 令 $G(X) = (1-X)^{-(n+1-j)}$, 则文献[3]可知, $G(X)(1-|Z|^2)^{-(nK+1)/K} \in IM(D)$, 而且 $\omega(z, dz) < 0 (0 \leq j \leq n)$.

(2) 设 C 为常数, 则我们得到 $\omega(z, dz)$ 在 $(z_1, 0)$ 之值为:

$$\omega(z, dz) = -C - \{|dz_1|^4[(XW'''+2W'')+X(XW'''+2W'')']$$

$$\begin{aligned}
& -X(XW''' + 2W'')^2(XW'' + W')^{-1} - C(XW'' + W')^2] + K^{-1}(dZ\overline{dZ}')^2 \\
& \cdot [2(XW' + nK + 1) + (K + 1)X(XW'' + W') - K^{-2}C(XW' + nK \\
& + 1)^2] + 2K^{-1}|dz_1|^2 dZ\overline{dZ}'[2(XW'' + W') + 2X(XW''' + 2W'') \\
& - 2X(XW'' + W')^2 \cdot (XW' + nK + 1)^{-1} - C(XW' + nK + 1)(XW'' \\
& + W')] \cdot \{dzT\overline{dz}'\}^{-2}.
\end{aligned}$$

令大括号内式子以 $\omega_1(z, dz)$ 表之, 即有

$$\omega(z, dz) = -C - \omega_1(z, dz) \cdot \{dzT\overline{dz}'\}^{-2}. \quad (23)$$

令 $G(X) = (1 - X)^{-l} (l > 0)$. 则经计算有:

$$W' = l(1 - X)^{-1}, W'' = l(1 - X)^{-2}, W''' = 2l(1 - X)^{-3}, W^{(4)} = 6l(1 - X)^{-4}.$$

以此代入 $\omega_1(z, dz)$ 的表示式, 并令 $l = nK + 1$ 得:

$$\begin{aligned}
\omega_1(z, dz) &= |dz_1|^4 [(1 - X)^{-4}(2l - Cl^2)] + K^{-1}l(dZ\overline{dZ}')^2 \\
&\cdot [(1 - X)^{-2}(K + 1 - K^{-2}Cl) + (1 - X)^{-1}(1 - K)] + 2K^{-1}l|dz_1|^2 dZ\overline{dZ}' \\
&\cdot [(1 - X)^{-3}(2 - Cl)].
\end{aligned}$$

易知, 当 $C \leq 2l^{-1} = 2(nK + 1)^{-1}$ 时, 上式 $|dz_1|^4$ 的系数 ≥ 0 , $|dz_1|^2 dZ\overline{dZ}'$ 的系数也 ≥ 0 .

当 $C \leq \min\{2K^2(nK + 1)^{-1}, K^2(K + 1)(nK + 1)^{-1}\}$ 时, $(dZ\overline{dZ}')^2$ 的系数 ≥ 0 . 由此可见.

当 $C \leq \min\{2K^2(nK + 1)^{-1}, K^2(K + 1)(nK + 1)^{-1}, 2(nK + 1)^{-1}\}$ 时, 有 $\omega_1(z, dz) \geq 0$, 此时就有 $\omega(z, dz) \leq -C$. 当 $C \geq \max\{2(nK + 1)^{-1}, 2K^2(nK + 1)^{-1}, K^2(K + 1)(nK + 1)^{-1}\}$ 时, $0 > \omega(z, dz) \geq -C$,

当 $K = 1, C = 2(n + 1)^{-1}$ 时, 有 $\omega_1(z, dz) = 0$, 从而就有 $\omega(z, dz) = -2(n + 1)^{-1}$.

容易验证当 $K = 1, C = -(n - 1)(n + 1)^{-1}$ 时, $\omega(z, dz) = (n - 1)(n + 1)^{-1}$.

(3) 令 $G(X) = e^X$, 则 $W = \log G = X, W' = 1, W'' = 0$, 而 $G_2 = XW' + nK + 1 = X + nK + 1 > 0, G_1 = 1 > 0$, 故 $e^X(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 属于 $IM(D)$. 经计算有:

$$\begin{aligned}
\omega_1(z, dz) &= -C|dz_1|^4 + K^{-1}(dZ\overline{dZ}')^2[2(X + nK + 1) + (K + 1)X \\
&- K^{-2}C(X + nK + 1)^2] + 2K^{-1}|dz_1|^2 dZ\overline{dZ}'[(nK + 1)(X + nK + 1)^{-1} \\
&- C(X + nK + 1)].
\end{aligned}$$

因此, 当 $C < 0$ 时, 总有 $\omega_1(z, dz) > 0$, 从而有

$$\omega(z, dz) < -C.$$

当 $C = 0$ 时, 取 $dz = (dz_1, 0) \neq 0$, 则总有 $\omega(z, dz) = 0$.

(4) 令 $G(X) = (1 + X)^l (l > 0)$. 则经计算有:

$$\begin{aligned}
\omega_1(z, dz) &= l(1 + X)^{-4}|dz_1|^4(-2 - Cl) + K^{-1}(dZ\overline{dZ}')^2\{-l(K + 1 \\
&+ K^{-2}Cl)(1 + X)^{-2} + [l(K - 1 + 2K^{-2}C(nK + 1 + l))(1 + X)^{-1} \\
&+ 2(nK + 1 + l) - K^{-2}C(nK + 1 + l)^2] + 2K^{-1}(1 + X)^{-2}l|dz_1|^2 dZ\overline{dZ}' \\
&\cdot \{(4 + Cl)(1 + X)^{-1} - [2 + C(nK + l + 1)] + 2l(1 + X)^{-1}[(1 \\
&+ X)(nK + 1 + l) - l]^{-1} - 2l[(1 + X)(nK + 1 + l) - l]^{-1}\}.
\end{aligned}$$

当 $C = -2l^{-1}$, $dz = (dz_1, 0) \neq 0$, 则有

$$\omega(z, dz) = 2l^{-1}.$$

请注意在讨论全纯曲率时, 我们都是在点 $z = (z_1, 0)$ 处进行计算的. 从上式可知, 当 l 为任意小的正数时, 由 $e^X(1 - |Z|^2)^{-(nK+1)/K}$ 生成的不变的 Kähler 度量的全纯截曲率 $\omega(z, dz)$ 在方向 $dz = (dz_1, 0) \neq 0$ 处可任意大.

自然会问, 满足相应于这些不变 Kähler 度量的 Laplace-Beltrami 算子的函数 (一般称为调和函数) 的 Dirichlet 问题可解否? 特别, 是否存在在群 $\text{Aut}(D)$ 下不变的调和函数? 这些请看作者的另一篇文章“在 $\text{Aut}(D)$ 下不变的调和函数”.

参 考 文 献

- [1] Webster, S. M., *Inven. Math.*, **51**(1979), 155—169.
- [2] D'Angelo, J. P., *Duke Math. J.*, **45**(1978), 259—265.
- [3] 殷慰萍, 科学通报, **32**(1987), 11: 876.