

一类余维 3 鞍点型平面向量场的分支

肖冬梅

(华中师范大学数学系, 武汉 430070)

摘 要

本文解决了 F. Dumortier, R. Roussarie 和 J. Sotomayor 在讨论余维 3 鞍点型平面系统的普适开折时遗留下来的 3 个主要问题, 从而证实了该文提出的一类余维 3 鞍点型平面向量场具有普适开折的猜想。

关键词 余维 3、鞍点型、平面向量场

向量场分支理论的基本问题是寻找结构不稳定系统的普适开折^[1] (Versal deformation or Universal unfolding), 这是个具有重要理论和实际应用价值而又困难的问题, 迄今为止, 仅找到了少数几类结构不稳定系统普适开折, 其中一个重要工作是由 Bogdanov 给出的, 他研究限制在二维中心流形上线性部分相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 规范形为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1\varphi_1(x_1) + x_1x_2\varphi_2(x_1) \end{cases} \quad (0.1)$$

的系统, 这里 φ_1, φ_2 是 x_1 的多项式, 则(0.1)式的 2-jet 为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = ax_1^2 + bx_1x_2. \end{cases} \quad (0.2)$$

当 $ab \neq 0$ 时, 他证明了(0.2)式有普适开折^[1], 人们称这种分支现象为余维 2 尖点型分支或 BT 分支^[1,2]. 随后 Dumortier, Roussarie 和 Sotomayor 合作考虑 a, b 之一为零且是余维 3 退化时, 系统是否存在普适开折的问题. 对 $a \neq 0, b = 0$ 情形, 他们经过长达十年的研究证明了其存在普适开折^[3]; 对 $a = 0, b \neq 0$ 情形, 系统(0.1)式的 3-jet 为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \varepsilon_1x_1^3 + bx_1x_2 + \varepsilon_2x_1^2x_2. \end{cases} \quad (0.3)$$

当 $b\varepsilon_1\varepsilon_2 \neq 0$ 时, 由奇点 $O(0,0)$ 的类型, 系统(0.3)分为 $\varepsilon_1 > 0$ 鞍点型; $\varepsilon_1 < 0, b^2 + 4\varepsilon_1 < 0$ 中心(或焦点)型; $\varepsilon_1 < 0, b^2 + 4\varepsilon_1 \geq 0$ 椭圆型. 对这三种类型, 他们提出有(弱)普适开折的猜想^[4], 并据此猜想画出三张分支图, 而要证实此猜想关键是研究系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^3 - x + \mu_1 + y(\nu + b(\lambda, \tau)x + \tau x^2) + \tau^2 y \phi(\tau, \lambda, x, y) \end{cases} \quad (0.4)$$

的分支,其中 $0 < \tau \ll 1, \lambda = (\mu_1, \nu)$ 是参数, $\phi, b \in C^\infty, b(0,0) > 0$. 对此文献[4]中还遗留疑难问题有待解决. 关于鞍点型这些问题是:(1)两鞍点共振(即 $b(\lambda, \tau) = 1$)时异宿环小邻域中有哪些分支现象发生?(2)如何确定鞍结点分界线与双曲鞍点连线的分支?(3)分支值的小邻域中的三个局部分支图能否连结成整体分支图. 本文在共振情况($b(\lambda, \tau) = 1$)下解决了这三个问题,对非共振情况($b(\lambda, \tau) \neq 1$)可类似讨论¹⁾,从而证实了 Sotomayor 等^[4]提出的猜想和分支图对鞍点型是正确的.

注 1.1 下文所说系统(0.4)均指 $b(\lambda, \tau) = 1$ 的情形,所画分支图均是 μ_1, ν 平面上的投影图.

1 鞍结分支值小邻域中的分支图

系统(0.4)的鞍结分支值是 $\mu_1 = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}$, 在 μ_1, ν 平面上它是两条平行线 L_{SN_1} 和

L_{SN_2} , 通过计算易得系统(0.4)的奇点性态见表 1.

定理 1.1 存在鞍结分支值的小邻域 V_{1l} 和 V_{1r} , 使得系统(0.4)在 V_{1l} 和 V_{1r} 中有分支图 1, 其中 $SNC_{a(b)(\tau)}$ 表示鞍结点分界线与双曲鞍点连线的分支; $C_{a(b)}$ 是两鞍点上(下)异宿轨分支; $BT_{l(r)}$ 是 BT 分支; $L_{l(r)}$ 是左(右)同宿环分支; L_H 是一阶 Hopf 分支.

由表 1 和文献[1]易证定理 1.1 中的分支值 $BT_{l(r)}, L_H$ 和 $L_{l(r)}$ 的存在性, 本文仅证分支值 SNC_{a1} 和 C_a 的存在性, 类似可证其它分支值 $SNC_{ar}, SNC_{bl(r)}$ 和 C_b 的存在性²⁾.

引理 1.1^[5] 设系统 $\dot{X} = g(X, \alpha, \beta)$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ 满足 (1)当 $\alpha = \beta = 0$ 时, 有双曲鞍点 P_1 和鞍结点 P_0 , 以及 P_0 的分界线与 P_1 的连线 $\gamma(t)$, 且 $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = P_0$; (2)当 $\alpha = 0$ 时, $s(\beta)$ 是 $\dot{X} = g(X, 0, \beta)$ 的鞍结点的坐标向量; (3)鞍结点 P_0 处中心流形上向量场的方程为

$$\dot{z}_1 = \alpha + (a_2(0) + O(\eta))z_1^2 + O(z_1^3, \eta),$$

其中 $\eta = (\alpha, \beta), a_2(0) \neq 0, O(\eta), O(z_1^3, \eta) \in C^\infty$; (4)数 A, B 为

$$A \triangleq \left[\lim_{t \rightarrow -\infty} K(t)g(\gamma(t), 0, 0) \right] \wedge u \neq 0,$$

$$B \triangleq \left[\lim_{t \rightarrow -\infty} K(t)g(\gamma(t), 0, 0) \wedge \frac{ds(0)}{d\beta} \right] + \int_{-\infty}^{\infty} K(t)g(\gamma(t), 0, 0) \wedge \frac{\partial g}{\partial \beta}(\gamma(t), 0, 0) dt,$$

这里 $K(t) = \exp \left(-\int_0^t \operatorname{div}(g(\gamma(s), 0, 0) ds) \right)$, u 是 P_0 处零特征值的右特征向量, $\wedge$ 是向量的交叉积; 那么系统在点 $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ 处发生鞍结点分界线与双曲鞍点连线的分支 SNC , 且异宿轨分支曲线 C 是满足

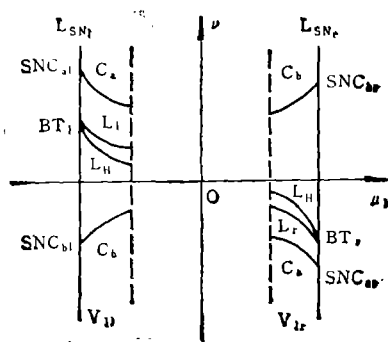


图 1

1) 肖冬梅, 平面上—类余维3鞍点型奇异向量场的普适开折, 北京大学博士学位论文, 1991.

表 1

参数取值		奇点个数	奇点性态
$\mu_1 = \nu = \tau = 0$		1	鞍点
$ \mu_1 > \frac{2}{3\sqrt{3}}$		1	双曲鞍点
$-\frac{2}{3\sqrt{3}} < \mu_1 < \frac{2}{3\sqrt{3}}$		3	两双曲鞍点和一结(焦)点
$\mu_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nu - \sqrt{1/3} + \frac{\tau}{3} + o(\tau) = 0$	2	双曲鞍点和尖点
	$\nu - \sqrt{1/3} + \frac{\tau}{3} + o(\tau) \neq 0$	2	双曲鞍点 O 和鞍结点 O^* , 且存在 O^* 分界线与 O 的上连线 γ_{a1} : $y = -\frac{1}{2}(x + \sqrt{1/3})(x - 2/\sqrt{3})$
	$\tau = 0, \nu = \frac{5}{2\sqrt{3}}$	2	双曲鞍点 O 和鞍结点 O^* , 且存在 O^* 分界线与 O 的下连线 γ_{b1} : $y = (x + \sqrt{1/3})(x - 2/\sqrt{3})$
	$\tau = 0, \nu = -\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	双曲鞍点 O 和鞍结点 O^* , 且存在 O^* 分界线与 O 的上连线 γ_{a1} : $y = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{1/3})(x + 2/\sqrt{3})$
$\mu_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nu + \sqrt{1/3} + \frac{\tau}{3} + o(\tau) = 0$	2	双曲鞍点和尖点
	$\nu + \sqrt{1/3} + \frac{\tau}{3} + o(\tau) \neq 0$	2	双曲鞍点 O 和鞍结点 O^* , 且存在 O^* 分界线与 O 的下连线 γ_{b1} : $y = (x - \sqrt{1/3})(x + 2/\sqrt{3})$
	$\tau = 0, \nu = \frac{2}{\sqrt{3}}$	2	双曲鞍点 O 和鞍结点 O^* , 且存在 O^* 分界线与 O 的上连线 γ_{a1} : $y = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{1/3})(x + 2/\sqrt{3})$
	$\tau = 0, \nu = -\frac{5}{2\sqrt{3}}$	2	双曲鞍点和鞍结点
$\mu_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nu + \sqrt{1/3} + \frac{\tau}{3} + o(\tau) = 0$	2	双曲鞍点和尖点
	$\nu + \sqrt{1/3} + \frac{\tau}{3} + o(\tau) \neq 0$	2	双曲鞍点 O 和鞍结点 O^* , 且存在 O^* 分界线与 O 的下连线 γ_{b1} : $y = (x - \sqrt{1/3})(x + 2/\sqrt{3})$
	$\tau = 0, \nu = \frac{2}{\sqrt{3}}$	2	双曲鞍点 O 和鞍结点 O^* , 且存在 O^* 分界线与 O 的上连线 γ_{a1} : $y = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{1/3})(x + 2/\sqrt{3})$
	$\tau = 0, \nu = -\frac{5}{2\sqrt{3}}$	2	双曲鞍点和鞍结点

$$\alpha = -a_2(0) \frac{B^2}{A^2} \beta^2 + O(\beta^3)$$

的半条曲线: 当鞍结点 P_0 破裂, 其一为鞍点时, 若此鞍点的 x_1 坐标 $x_1^* < 0$, 则取 β 的符号与 AB 相同, 否则取反号。

注 1.2 此引理取自文献[5], 但进行了修改, 排除掉原定理结论中的半条“分支”曲线, 它对应系统有双曲鞍点与双曲结点的连线, 而这不发生分支现象。

定理 1.1 的证 根据表 1, 作变换 $x_1 = x + \sqrt{1/3}$, $x_2 = y$, $\tau = \tau$, $\bar{\mu}_1 = \mu_1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$,

$\bar{\nu} = \nu - \frac{5}{2\sqrt{3}}$, 则系统(0.4)化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2(x_1 - \sqrt{3}) + x_2\left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \bar{\mu}_1 + \bar{\nu}x_2 + \tau x_2\phi_1(\tau, \lambda, x_1, x_2), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\lambda = (\bar{\mu}_1, \bar{\nu})$, $\phi_1 \in C^\infty$. 当 $\lambda = 0, \tau = 0$ 时, 系统(1.1)有双曲鞍点 $O_1(\sqrt{3}, 0)$ 和鞍结点

$O(0,0)$, 以及 O 的分界线与 O_1 的上连线 $\gamma_{a1}: y = -\frac{1}{2}x(x - \sqrt{3})$. 在参数适当微扰下, 鞍

结点 O 破裂为结点 O_2 和双曲鞍点 O_3 , γ_{a1} 分裂为 O_3 的分界线 γ_{a1}' 与 O_1 的分界线 γ_{a1}'' , 记 γ_{a1}' 与 γ_{a1}'' 之间距离为 $d_{a1}(\lambda, \tau, \epsilon)$, 若 $d_{a1}(\lambda, \tau, 0) = 0$, 则系统发生 SNC_{a1} 分支且上异宿轨分支 C_a 满足 $d_{a1}(\lambda, \tau, 0) = 0$.

首先考虑 $\tau = 0$ 情形, 此时系统(1.1)为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2(x_1 - \sqrt{3}) + x_2\left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \bar{\mu}_1 + \bar{\nu}x_2. \end{cases} \quad (1.2)$$

作变换 $x_1 = y_1 + y_2 + \bar{\mu}_1$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(y_2 + \bar{\mu}_1)$, $\bar{\mu}_1 = -\frac{4}{3}\bar{\mu}_1$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}$, 则(1.2)化为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{\mu}_1 + 3\bar{\mu}_1^2 - \bar{\mu}_1\bar{\nu} - \bar{\nu}y_2 + 3\bar{\mu}_1y_1 + 2\bar{\mu}_1y_2 + 2y_1^2 + 3y_1y_2 + y_2^2 \\ \quad - \frac{2}{\sqrt{3}}(\bar{\mu}_1 + y_1 + y_2)^3, \\ \dot{y}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} y_2 - 3\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_1\bar{\nu} + \bar{\nu}y_2 - 3\bar{\mu}_1y_1 - 2\bar{\mu}_1y_2 - 2y_1^2 - 3y_1y_2 - y_2^2 \\ \quad + \frac{2}{\sqrt{3}}(\bar{\mu}_1 + y_1 + y_2)^3. \end{cases} \quad (1.3)$$

由待定系数法得系统(1.3)的中心流形

$$y_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}y_1^2 + \frac{14}{\sqrt{3}}\bar{\mu}_1y_1 + \frac{20}{\sqrt{3}}\bar{\mu}_1^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\mu}_1\bar{\nu} + O(y_1^3, \bar{\lambda}).$$

从而系统在中心流形上的方程为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{\mu}_1 + O(\|\bar{\lambda}\|^2) + (3\bar{\mu}_1 + O(\|\bar{\lambda}\|^2))y_1 \\ &\quad + \left(2 - \frac{4}{\sqrt{3}}\bar{\nu} + 6\sqrt{3}\bar{\mu}_1 + O(\|\bar{\lambda}\|^2)\right)y_1^2 + O(y_1^3, \bar{\lambda}) \triangleq F(y_1, \bar{\lambda}). \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} G(y_1, \bar{\lambda}) &\triangleq \frac{\partial F(y_1, \bar{\lambda})}{\partial y_1} = (3\bar{\mu}_1 + O(\|\bar{\lambda}\|^2)) + 2\left(2 - \frac{4}{\sqrt{3}}\bar{\nu} + 6\sqrt{3}\bar{\mu}_1\right. \\ &\quad \left.+ O(\|\bar{\lambda}\|^2)\right)y_1 + O(y_1^2, \bar{\lambda}). \end{aligned}$$

由隐函数定理知存在函数 $\alpha(\bar{\lambda})$, 满足 $\alpha(0) = 0$, $G(\alpha(\bar{\lambda}), \bar{\lambda}) = 0$. 故中心流形上方程进一步化为

$$\dot{z}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{\mu}_1 + O(\|\bar{\lambda}\|^2) + (4 + O(\bar{\lambda}))z_1^2 + O(z_1^3, \bar{\lambda}).$$

而

$$\begin{aligned}
 A &\triangleq \left[\lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{-\int_0^{\tau} \left(3x^4 - 2\sqrt{3}x + by \frac{\sqrt{3}}{2} + x \right) ds} \left(x^2(x - \sqrt{3}) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + x \right) y \right) \right]_{\tau_{a1}} \wedge u \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3} \frac{(\sqrt{3} - x)^3}{x} \left(-x^2(x - \sqrt{3}) - y \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + x \right) \right) = -3\sqrt{3} \neq 0, \\
 B &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{3} \frac{(\sqrt{3} - x)^3}{x} \left(x^2(x - \sqrt{3}) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + x \right) y \right) \wedge \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix} \right) dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{3} (\sqrt{3} - x)^3 dx = \frac{3\sqrt{3}}{14}.
 \end{aligned}$$

记鞍结点 $O(0,0)$ 破裂后的一奇点为 O^* , 其坐标为 (z_1^*, v_1^*) , 易证当 $z_1^* < 0$ 时, 奇点 $O^*(z_1^*, v_1^*)$ 为双曲鞍点, 由引理 1.1 知系统(1.2)在 $\lambda=0$ 处发生鞍结点分界线与双曲鞍点连线的分支,

且上异宿轨分支曲线为 $\frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\mu}_1 - \frac{1}{49} \bar{v}^2 + O(\bar{v}^3) = 0, \bar{v} < 0$. 即 $d_{a1}(\lambda, 0, 0) = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\mu}_1 -$

$\frac{1}{49} \bar{v}^2 + O(\bar{v}^3)$. 由隐函数定理知, 存在 $0 < \delta \ll 1$, $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_{a1}(\bar{v}, \tau)$, 使得当 $0 < \tau < \delta$ 时有

$d_{a1}(\bar{\mu}_{a1}(\bar{v}, \tau), \bar{v}, \tau, 0) = 0$. 故在点 $(\mu_1, \nu) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{2\sqrt{3}} + O(\tau) \right)$ 处, 系统(0.4)发

生鞍结点分界线与双曲鞍点的上连线分支 SNC_{a1} , 且上异宿轨分支 C_a 关于 τ 的零阶近似方程为

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\mu_1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{49} \left(\nu - \frac{5}{2\sqrt{3}} \right)^2 + O\left(\left(\nu - \frac{5}{2\sqrt{3}} \right)^3 \right) = 0, \nu < \frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

另一方面, 系统(0.4)在参数空间和相平面的原点充分小邻域中关于 ν 构成旋转向量场, 故在分支曲线 L_{SN_1} 上存在唯一分支点 SNC_{a1} 以及过点 SNC_{a1} 的半条分支曲线 C_a , 故得分支图 1.

2 可积系统对应的参数值小邻域中的分支图

若参数 $\mu_1 = \nu = \tau = 0$, 则系统(0.4)为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^3 - x + xy. \end{cases} \quad (2.1)$$

这是一个可积系统, 具有无穷余维的退化性. 作参数尺度变换 $\varepsilon = \tau, \mu_1 = \varepsilon \hat{\mu}_1, \nu = \varepsilon \hat{\nu}$, 则(0.4)式化为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^3 - x + xy + \varepsilon(\hat{\mu}_1 + \hat{\nu}y + x^2y) + y\varepsilon^2\phi_2(\varepsilon, \hat{\lambda}, x, y). \end{cases} \quad (2.2)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统(2.2)有三个奇点: 中心 $S(0,0)$, 双曲鞍点 $S_1(-1,0)$ 和 $S_2(1,0)$, 以及第一积分

$$H(x, y) \equiv (1 + y - x^2)(1 - 2y - x^2)^{\frac{1}{2}} = h,$$

当 $0 < h < 1$ 时,系统有闭轨线 $\Gamma_h: H(x, y) = h$, 并且当 $h \rightarrow 0+$ 时, Γ_h 扩张为过两鞍点 S_1, S_2 的异宿环 Γ ; 当 $h \rightarrow 1-$ 时, Γ_h 收缩为中心点 $S(0, 0)$.

当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时,系统(2.2)在 $0 \leq h \leq 1$ 上可能产生分支,为讨论方便,分以下两步进行.

2.1 异宿环小邻域 U 内的分支

当 $\varepsilon = 0$ 时,系统(2.2)的连接两鞍点 S_1, S_2 的上(下)异宿轨 $\Gamma_a(\Gamma_b)$ 的方程为 $y = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$, $y = x^2 - 1$, 取正(负) y 轴作 $\Gamma_a(\Gamma_b)$ 的无切线, $\Gamma_a(\Gamma_b)$ 与正(负) y 轴的交点对应时刻 $t = 0$, 则 $\Gamma_a(\Gamma_b)$ 的参数方程为

$$\Gamma_a: x(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}, \quad y(t) = \frac{2e^t}{(1 + e^t)^2}; \quad \left(\Gamma_b: x(t) = \frac{e^{-2t} - 1}{e^{-2t} + 1}, \quad y(t) = -\frac{4e^{-2t}}{(1 + e^{-2t})^2} \right);$$

设在 $\varepsilon \approx 0$ 的适当小扰动下, Γ_a, Γ_b 破裂, 破裂后记 S_1 的不稳定流形(稳定流形)与 S_2 的稳定流形(不稳定流形)间距离为 $d_a(d_b)$, 则 d_a, d_b 可分别展开为 ε 的 C^∞ 函数: $d_a = \varepsilon I_1 + O(\varepsilon^2)$, $d_b = \varepsilon I_2 + O(\varepsilon^2)$, 这里 I_1 (或 I_2) 为 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\int_0^t A ds} (P_0 Q_1 - Q_0 P_1) ds$ 中将 x, y 用 Γ_a (或 Γ_b) 的参数方程代入计算的结果, 其中 $P_0 = y, P_1 = 0, Q_0 = x^3 - x + xy, Q_1 = \dot{\mu}_1 + \dot{\nu}y + x^2y, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 + y - 1 & x \end{pmatrix}$.

定理 2.1 存在常数 $0 < \delta_1 \ll 1$, 且当 $\varepsilon \in (0, \delta_1)$ 时, (1)存在函数 $\bar{\mu}_{10}(\varepsilon), \bar{\nu}_0(\varepsilon)$ 满足 $\bar{\mu}_{10}(0) = \frac{1}{42}, \bar{\nu}_0(0) = -\frac{17}{84}$ 使得当 $\hat{\mu}_1 = \bar{\mu}_{10}(\varepsilon), \hat{\nu} = \bar{\nu}_0(\varepsilon)$ 时, 系统(2.2)有异宿环 Γ^* , 并且 Γ^* 是不稳定的; (2)存在函数 $\hat{\mu}_{10}(\hat{\nu}, \varepsilon)$ 满足

$$\hat{\mu}_{10}(\hat{\nu}, 0) + \frac{2}{5}\hat{\nu} + \frac{2}{35} = 0, \quad \text{但} \quad -\hat{\mu}_{10}(\hat{\nu}, 0) + \frac{1}{2}\hat{\nu} + \frac{1}{8} \approx 0,$$

使得当 $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_{10}(\hat{\nu}, \varepsilon)$ 时, 系统(2.2)有上异宿轨; (3)存在函数 $\mu_{10}^*(\hat{\nu}, \varepsilon)$ 满足

$$-\mu_{10}^*(\hat{\nu}, 0) + \frac{1}{2}\hat{\nu} + \frac{1}{8} = 0, \quad \text{但} \quad \mu_{10}^*(\hat{\nu}, 0) + \frac{2}{5}\hat{\nu} + \frac{2}{35} \approx 0,$$

使得当 $\hat{\mu}_1 = \mu_{10}^*(\hat{\nu}, \varepsilon)$ 时, 系统(2.2)有下异宿轨.

证 根据 Melnikov 方法, 易计算得

$$I_1 = \frac{4}{3}\hat{\mu}_1 + \frac{8}{15}\hat{\nu} + \frac{8}{105}, \quad I_2 = -\pi\hat{\mu}_1 + \frac{1}{2}\pi\hat{\nu} + \frac{1}{8}\pi,$$

对函数 $\frac{d_a}{\varepsilon}, \frac{d_b}{\varepsilon}$ 用隐函数定理易证 (1), (2), (3) 所述分支值的存在性, 下证异宿环 Γ^* 不稳定.

设系统(2.2)的两鞍点为 $S_1^*(x_1, 0)$ 和 $S_2^*(x_2, 0)$, 其中 $x_1 = -1 - \frac{1}{2}\varepsilon\hat{\mu}_1 + O(\varepsilon^2), x_2 = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon\hat{\mu}_1 + O(\varepsilon^2)$, 则 S_1^*, S_2^* 的特征值为

$$\lambda_{11} = 1 + \varepsilon \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\hat{\mu}_1 + \frac{1}{3}\hat{\nu} \right) + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \left(\frac{2}{7} + \frac{5}{8}I_1 \right)$$

$$+ O(\varepsilon^2) \triangleq 1 + \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^2) > 0,$$

$$\lambda_{12} = -2 + \varepsilon\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\hat{\mu}_1 + \frac{2}{3}\hat{\nu}\right) + O(\varepsilon^2)$$

$$= -2 + \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi}I_2\right) + O(\varepsilon^2) \triangleq -2 + \varepsilon\beta + O(\varepsilon^2) < 0,$$

$$\lambda_{21} = 2 + \varepsilon\beta + O(\varepsilon^2) > 0, \quad \lambda_{22} = -1 + \varepsilon\alpha + O(\varepsilon^2) < 0.$$

令

$$r_1 \triangleq -\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} = 2 - \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\hat{\mu}_1 + \frac{4}{3}\hat{\nu}\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2) = 2 - \left(\frac{15}{14} + \frac{5}{4}I_1 + \frac{4}{3\pi}I_2\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\triangleq 2 - \varepsilon\gamma + O(\varepsilon^2) > 1,$$

$$r_2 \triangleq -\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{21}} = \frac{1}{2} - \varepsilon\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\hat{\mu}_1 + \frac{1}{3}\hat{\nu}\right) + O(\varepsilon^2)$$

$$= \frac{1}{2} - \varepsilon\left(\frac{15}{56} + \frac{5}{16}I_1 + \frac{1}{3\pi}I_2\right) + O(\varepsilon^2) < 1,$$

则异宿环 Γ^* 的鞍量小于 1, 故 Γ^* 是不稳定的.

当 $\varepsilon \in (0, \delta_1)$ 时, 由定理 2.1 知系统(2.2)可改写为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^3 - x + xy + \varepsilon(\bar{\mu}_{10}(\varepsilon) + \bar{\nu}_0(\varepsilon)y + x^2y) \\ \quad + \varepsilon\left[\left(\frac{5}{12}I_1 - \frac{4}{9\pi}I_2\right) + \left(\frac{5}{6}I_1 + \frac{10}{9\pi}I_2\right)y\right] + O(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (2.3)$$

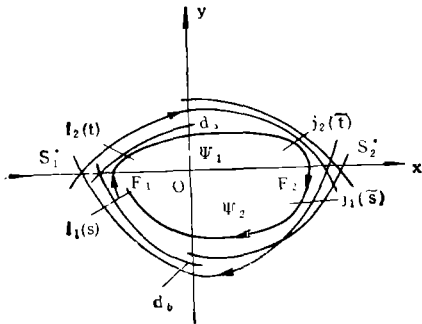


图 2

并且有函数 $I_1(\varepsilon), I_2(\varepsilon)$ 满足 $I_1(0) = 0, I_2(0) = 0$ 使得系统(2.3)有不稳定异宿环 Γ^* . 记 $\theta = (I_1, I_2)$, 在 Γ^* 的充分小邻域 U 内考虑后继函数 $H(s)$, 它由四个映射复合而成 $H(s) = \Psi_2 \circ F_2 \circ \Psi_1 \circ F_1(s)$ (见图 2), l_1, l_2, j_1, j_2 是 Γ^* 的无切线, $s, t, \bar{s}, \bar{t}$ 分别是其上的坐标, F_1, F_2 是 S_1^*, S_2^* 的小邻域中的 Dulac 映射, Ψ_1, Ψ_2 是鞍点邻域外部的微分同胚. 显然系统(2.3)在 U 内有闭轨等价于函数 $H(s)$ 有不动点, 也等价于函数 $E(s) \triangleq \Psi_1 \circ F_1(s) - F_2^{-1} \circ \Psi_2^{-1}(s)$ 有零点.

引理 2.1^[6] 设 θ 是 $\mathbb{R}^2$ 中有界域上的参数, 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1(\theta)x + f_1(\theta, x, y), \\ \dot{y} = \lambda_2(\theta)y + f_2(\theta, x, y) \end{cases} \quad (2.4)$$

满足(1) $\lambda_1(\theta) < 0 < \lambda_2(\theta), \lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta) \in \mathbb{C}^{k+2}, k > 1$; (2) $f_1, f_2 \in \mathbb{C}^{k+1}$, 在奇点 $O(0, 0)$ 的小邻域 W 中有 $f_1(\vartheta, 0, y) = 0, Df_1(\theta, 0, 0) = 0, f_2(\theta, x, 0) = 0, Df_2(\theta, 0, 0) = 0$; (3) 线段 $\bar{l}_1: x = x_0, \bar{l}_2: y = y_0$ 是 $O(0, 0)$ 的稳定流形和不稳定流形上的无切线, 则存在 $O(0, 0)$ 的充分小邻域 W^* , 它不依赖于 θ , 使得 W^* 内 $\bar{l}_1$ 到 $\bar{l}_2$ 的 Dulac 映射 $F: P(x_0, y) \rightarrow Q(x, y_0)$ 可表示为 $y = [c(\theta) + R(\theta, T)]e^{-\lambda_1(\theta)T}$, 其中 $T > 0$ 是(2.4)式的轨线由 P 到 Q 所需的时间;

$c(\theta) \in C^{k-1}, c(0) > 0, R(\theta, T) \in C^{k-1}$, 且对给定的 $\sigma, 0 < \sigma < \min\{-\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)\}$, 存在常数 $c_0 > 0, \hat{c} > 0$ 使得 $\left| \frac{\partial^s R(\theta, T)}{\partial^s \theta} \right| \leq c_0 e^{-\sigma T}, \left| \frac{\partial^s R(\theta, T)}{\partial^s T} \right| \leq c_0 e^{-\sigma T}, s=0, 1, \dots, k-1$.

注 2.1 此引理是根据文献[6]中定理和推论对二维双参数系统进行改写取出本文需要的结论.

推论¹⁾ 在引理 2.1 的条件下, Dulac 映射 F 可进一步表示为

$$x = \left[c(\theta) + R\left(\theta, -\frac{\ln y}{\lambda_2(\theta)}\right) \right] y^{-\frac{\lambda_1(\theta)}{\lambda_2(\theta)}},$$

其中 $c(\theta) \in C^{k-1}, c(0) > 0, R(\theta, y) \in C^{k-1}$, 且对给定的常数 $0 < \sigma < \min\{-\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)\}$, 存在常数 $c > 0, \hat{c} > 0$ 使得 $\left| \frac{\partial^s R(\theta, y)}{\partial^s y} \right| \leq c y^{\frac{\sigma}{\lambda_2(\theta)}}, \left| \frac{\partial^s R(\theta, y)}{\partial^s \theta} \right| \leq \hat{c} y^{\frac{\sigma}{\lambda_2(\theta)}}, s=0, 1, \dots, k-1$.

由推论及微分同胚定义得 $F_1, F_2^{-1}, \Psi_1, \Psi_2^{-1}$ 表达式:

$$F_1: I_1(s) \rightarrow I_2(t), t = F_1(s) = \left[c_1(\theta) + R_1\left(\theta, -\frac{\ln s}{\lambda_{11}(\theta)}\right) \right] s^{r_1}, \quad c_1(0) > 0;$$

$$F_2^{-1}: I_1(\tilde{s}) \rightarrow I_2(\tilde{t}), \tilde{t} = F_2^{-1}(\tilde{s}) = \left[c_2(\theta) + R_2\left(\theta, \frac{\ln \tilde{s}}{\lambda_{22}(\theta)}\right) \right] \tilde{s}^{\frac{1}{r_2}}, \quad c_2(0) > 0;$$

$$\Psi_1: I_2(t) \rightarrow I_2(\tilde{t}), \tilde{t} = d_a + \phi_1(t) = d_a + u_1(\theta)t + O(t^2), \quad u_1(0) > 0;$$

$$\Psi_2^{-1}: I_1(s) \rightarrow I_2(\tilde{s}), \tilde{s} = -d_b + \phi_2^{-1}(s) = -d_b + v_1(\theta)s + O(s^2), \quad v_1(0) > 0.$$

显然, 函数 $E(s)$ 的零点与无切线 I_1, I_2, I_1, I_2 及其上坐标选取无关, 下面根据 $E(s)$ 的性质讨论系统(2.3)的分支.

(1) 系统(2.3)的左同宿环分支 L_1 . 若系统(2.3)有过 S^* 的同宿环, 则函数 $E(s)$ 满足

$$E(0) = \Psi_1 \circ F_1(0) - F_2^{-1} \circ \Psi_2^{-1}(0) = 0,$$

即

$$\varepsilon I_1 + O(\varepsilon^2) - \left[c_2(\theta) + R_2(\theta), \left(\frac{\ln(-\varepsilon I_2 + O(\varepsilon^2))}{\lambda_{22}(\theta)} \right) \right] (-\varepsilon I_2 + O(\varepsilon^2))^{2+\varepsilon r_2 + O(\varepsilon^2)} = 0.$$

由于 $\varepsilon > 0$, 记上式左端为 $\varepsilon G_1(I_1, I_2, \varepsilon)$, 则对函数 $G_1(I_1, I_2, \varepsilon)$ 用隐函数定理得, 存在常数 $\delta_2 > 0$, 当 $0 < \varepsilon < \delta_2, 0 < -I_2 < \delta_2$ 时, $I_1 = I_1(I_2, \varepsilon)$ 满足 $G_1(I_1(I_2, \varepsilon), I_2, \varepsilon) = 0$. 故系统(2.3)存在左同宿环分支 $L_1: I_1 = I_1(I_2, \varepsilon)$, 且对任意固定的 $\varepsilon \in (0, \delta_2)$, L_1 的近似方程为

$$I_1 = c\varepsilon^{1+\varepsilon r_2}(-I_2)^{2+\varepsilon r_2} + o((-I_2)^{2+\varepsilon r_2}), \quad c > 0 \text{ 为常数}.$$

另外已知与 L_1 上的点对应的系统有鞍点 S_1^* , 其鞍量 $r_1 > 1$, 故左同宿环稳定.

(2) 系统(2.3)的右同宿环分支 L_r . 为计算简便, 考虑函数

$$\tilde{E}(\tilde{s}) = F_1 \circ \Psi_2(\tilde{s}) - \Psi_1^{-1} \circ F_2^{-1}(\tilde{s}),$$

若(2.3)式有过鞍点 S_r^* 的同宿环, 则 $\tilde{E}(0) = 0$. 类似于(1)的讨论得, 存在常数 $\delta_3 > 0$, 当

1) 见 253 页脚注.

$0 < \varepsilon < \delta_3, 0 < I_2 < \delta_3$ 时, 系统(2.3)有右同宿环分支 $L_r: I_1 = \tilde{I}_1(I_2, \varepsilon)$, 且对任意固定的 $\varepsilon \in (0, \delta_3), L_r$ 的近似方程为

$$I_1 = -\bar{c}\varepsilon^{1-\sigma_1}I_2^{2-\sigma_2} + o((I_2)^{2-\sigma_2}), \quad \bar{c} > 0 \text{ 为常数.}$$

另外右同宿环是不稳定的.

(3) 系统(2.3)的重闭轨分支 L_d . 由函数 $E(s)$ 的定义, 系统(2.3)有二重闭轨等价于

$$E(s) = 0, \quad \frac{dE(s)}{ds} = 0, \quad \frac{d^2E(s)}{ds^2} \neq 0$$

有非零解. 由推论的估计式得

$$\begin{cases} E(s) = \Psi_1 F_1(s) - F_2^{-1} \Psi_2^{-1}(s) = d_s + u_1 c_1 s^{r_1} + O(s^{r_1+\sigma_1}) \\ \quad - c_2 (-d_b + \Psi_2^{-1}(s))^{1/r_2} - O((-d_b + \Psi_2^{-1}(s))^{1/r_2+\sigma_2}) = 0, \\ \frac{dE(s)}{ds} = (v_1 + 2v_2 s + O(s^2)) \left(\frac{u_1 c_1 r_1}{v_1} s^{r_1-1} + O(s^{r_1+\sigma_1-1}) \right. \\ \quad \left. - \frac{c_2}{r_2} (-d_b + \Psi_2^{-1}(s))^{1/r_2-1} - O((-d_b + \Psi_2^{-1}(s))^{1/r_2-1+\sigma_2}) \right) = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

其中 $c_1, c_2, u_1, v_1, \sigma_1, \sigma_2$ 均为正常数, 且 $\sigma_1 < 1, \sigma_2 < 1, 0 < s \ll 1$, 从而(2.5)式等价于

$$\begin{cases} d_s + u_1 c_1 s^{r_1} + O(s^{r_1+\sigma_1}) - c_2 (-d_b + \Psi_2^{-1}(s))^{1/r_2} - O((-d_b + \Psi_2^{-1}(s))^{1/r_2+\sigma_2}) = 0, \\ \frac{u_1 c_1 r_1}{v_1} s^{r_1-1} + O(s^{r_1+\sigma_1-1}) - \frac{c_2}{r_2} (-d_b + \Psi_2^{-1}(s))^{1/r_2-1} - O((-d_b + \Psi_2^{-1}(s))^{1/r_2-1+\sigma_2}) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

取 $s = \varepsilon \bar{y}$, 则方程组(2.6)等价于

$$\begin{cases} I_1 + u_1 c_1 \varepsilon^{1-\sigma_1} \bar{y}^{2-\sigma_2} + O(\varepsilon^{1-\sigma_1} \bar{y}^{2-\sigma_2+O(\varepsilon^2)}) - c_2 (-I_2 + v_1 \bar{y} + O(\varepsilon^2))^{1/r_2} - O((-I_2 + v_1 \bar{y} + O(\varepsilon^2))^{1/r_2+\sigma_2}) + O(\varepsilon) \\ \quad + O(\varepsilon^{1+\sigma_1-2\sigma_2+O(\varepsilon^2)}) - O(\varepsilon^{1+\sigma_2+2\sigma_2+O(\varepsilon^2)} (-I_2 + v_1 \bar{y} + O(\varepsilon))^{1/r_2-1+\sigma_2}) = 0, \\ I_2 - v_1 \bar{y} + \left(\frac{u_1 c_1}{v_1} (2 - \varepsilon \gamma + O(\varepsilon^2)) \bar{y}^{1-\varepsilon \gamma + O(\varepsilon^2)} + O(\varepsilon^{\sigma_1} \bar{y}^{1+\sigma_1-2\sigma_2+O(\varepsilon^2)}) \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon \gamma + O(\varepsilon^2)}} \\ \quad + O(\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

简记(2.7)式为 $E_1(I_1, I_2, \varepsilon, \bar{y}) = 0, E_2(I_1, I_2, \varepsilon, \bar{y}) = 0$, 易证 E_1, E_2 是 $I_1, I_2, \varepsilon, \bar{y}$ 的连续函数, 且关于 I_1, I_2 是 C^1 的, 经计算得

$$E_1(0, 0, 0, 0) = 0, E_2(0, 0, 0, 0) = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial I_1} & \frac{\partial E_1}{\partial I_2} \\ \frac{\partial E_2}{\partial I_1} & \frac{\partial E_2}{\partial I_2} \end{vmatrix}_{(0,0,0,0)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

从而存在常数 $\delta_4 > 0$, 当 $0 < \varepsilon < \delta_4 \ll 1, 0 < \bar{y} < \delta_4 \ll 1$ 时有函数 $I_1 = I_1(\bar{y}, \varepsilon), I_2 = I_2(\bar{y}, \varepsilon)$ 满足

$$E_1(I_1(\bar{y}, \varepsilon), I_2(\bar{y}, \varepsilon), \bar{y}, \varepsilon) = 0, E_2(I_1(\bar{y}, \varepsilon), I_2(\bar{y}, \varepsilon), \bar{y}, \varepsilon) = 0.$$

另一方面, $\forall \varepsilon \in (0, \delta_4)$, 由方程

$$E(s) = 0, \quad \frac{dE(s)}{ds} = 0,$$

可求出 I_1, I_2 的近似表达式 $I_1 = I_1(s, \varepsilon) > 0, I_2 = I_2(s, \varepsilon) < 0$, 满足当 $s \in (0, \delta_4), \bar{y} \in (0, \delta_4)$ 时, 有 $\frac{d^2 E(I_1, I_2, s, \bar{y})}{d(\varepsilon \bar{y})^2} \approx 0$. 从而系统(2.3)有二重闭轨分支 L_d , 它在 $I_1 I_2$ 平面上位于第二象限内. 由上述(1), (2), (3)分析及 Poincaré-Bendixson 环域定理易得¹⁾

定理 2.2 若 $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, 则当 $s \in (0, \delta_0)$, I_1, I_2 在其原点的一个固定小邻域内时, 存在异宿环 Γ^* 的充分小邻域 U , 使得系统(2.3)在 U 内有上(下)异宿轨分支, 左(右)同宿环分支和二重闭轨分支, 分支图见文献[4]中图 57, 且图 57 可同胚变换为 $(\hat{\mu}_1, \hat{\nu})$ 上的分支图(见图 3).

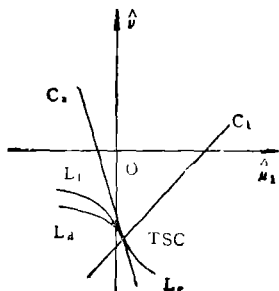


图 3

2.2 异宿环内紧区域 B 上的分支

这部分考虑的是异宿环 Γ^* 内任意充分大紧区域 B 上系统(2.2)的分支情况, 对此文献[8]有较详细的研究, 我们从画出分支图的角度讨论了分支曲线间的相互位置, 得出¹⁾

定理 2.3 存在常数 $0 < \delta_0 \ll 1$, 使得当 $s \in (0, \delta_0)$ 时系统(2.2)在 B 内发生一阶 Hopf 分支 L_H , 二重闭轨分支 L_d , 其两端点 DH , TSC 分别是二阶 Hopf 分支点和异宿环分支点, 分支图见文献[4]中图 54.

由定理 2.1, 2.2, 2.3 以及旋转向量场性质得

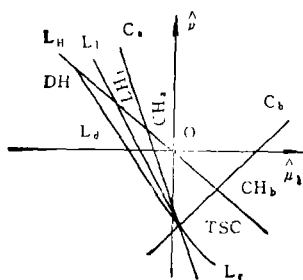


图 4

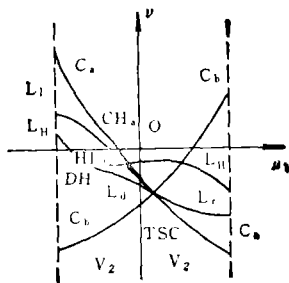


图 5

定理 2.4 若 $\delta^* = \min\{\delta_0, \delta_0^*\}$, 则当 $s \in (0, \delta^*)$ 时, 系统(2.2)有分支图 4, 从而由变换 $\tau = \varepsilon, \mu_1 = \varepsilon \hat{\mu}_1, \nu = \varepsilon \hat{\nu}, 0 < \varepsilon < \delta^*$ 知, 存在参数 $\mu_1 \nu$ 平面上原点小邻域 V_2 , 使得系统(0.4)在 V_2 中有分支图 5.

3 参数平面上整体分支图

由前两节的讨论知, 存在 $\delta_0 = \min\{\delta, \delta^*\}$, 使得当 $\tau \in (0, \delta_0)$ 时, 系统(0.4)在小邻域 V_{II} , V_{II} 和 V_2 中有分支图 6. 这节我们讨论 $\mu_1 \nu$ 平面上在 $V_{II} \cup V_{II} \cup V_2$ 之外区域 $V_I \cup U_r$, 系统(0.4)的分支曲线的分布情况.

首先, 系统(0.4)的 Hopf 分支可直接由系统的表达式求出, 它在参数空间中是整体存在

1) 见 253 页脚注.

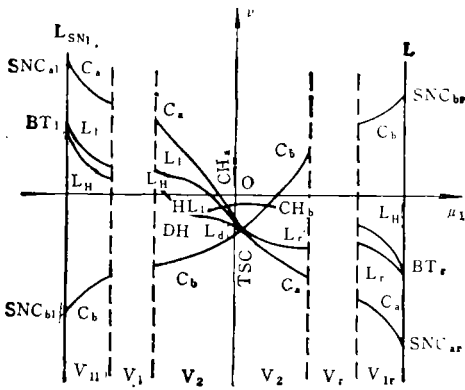


图 6

图中 L 线应为 L_{SN_1}

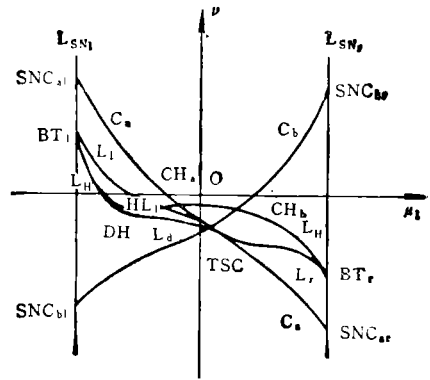


图 7

的,并与平面 $\mu_1 = \tau$ 的截痕是一条关于 μ_1, ν 单调的曲线,这条分支曲线上存在唯一的二阶 Hopf 分支点 $DH^{[3]}$,它出现在 V_2 中,从而在 $V_1 \cup U_i$ 中有一阶 Hopf 分支曲线而无二阶 Hopf 分支点。另外分支曲线 C_a, C_b, L_1, L_r 是闭集,在 V_1 和 V_i 中用 Melnikov 方法将它们进行延拓,由于 V_1, V_i 是紧区域,又系统(0.4)关于 ν 构成旋转向量场,故分支曲线 C_a, C_b, L_1, L_r 在 μ_1, ν 平面上各自连成一条曲线,而且上(下)异宿轨线关于 μ_1 构成旋转向量场,因此曲线 C_a, C_b 关于 μ_1, ν 单调。由文献[7]的结果易证在 $V_1 \cup V_i$ 中系统(0.4)无重闭轨分支。故在 $V_1 \cup V_i$ 内系统(0.4)仅存在分支曲线 L_H, L_1, L_r, C_a 和 C_b 。

其次由图 6 及如上分析知分支曲线 C_a, L_H 单调下降, C_b 单调上升,因此 C_a 与 C_b, L_H 与 C_b 均有唯一交点 TSC 和 CH_b 且位于 V_2 中,从而在 $V_1 \cup V_i$ 中它们不相交;而 C_a 与 L_1 不相交, C_a 与 L_r 也不相交,否则它们的交点对应系统有非双曲鞍点,这不可能; L_1 与 L_H, L_r 与 L_H 不相交,否则在 $V_1 \cup V_i$ 中存在交点邻近的点它对应系统至少有两个闭轨,这与文献[7]中证明的至多存在一个闭轨的结论矛盾,从而得

定理 3.1 存在常数 $0 < \delta \ll 1$,使得当 $\tau \in (0, \delta)$ 时,系统(0.4)有分支图 7。

致谢 对张芷芬教授和李承治副教授的悉心指导和热情鼓励,在此表示衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] Bogdanov R., *Selecta Mathematica Sovietica*, 1981, 1(4): 389—421.
- [2] Takens, F., in: *Applications of global analysis I. Communications of Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht* 3, 1974
- [3] Dumortier, F., Raussarie, R., Sotomayor, J., *Ergodic Theory and Dynamic Systems*, 1987, 7: 375—413.
- [4] Dumortier, F., Roussarie, R., Sotomayor, J., Generic 3-parameter families of planar vector fields, unfolding of saddle, focus and elliptic singularities with nilpotent linear parts, Preprint, 1988.
- [5] Schechter, S., Interaction of equilibrium and heteroclinic bifurcation for planar vector fields, Preprint, 1988.
- [6] Deng, B., *J. Diff. Eqns*, 1989, 79: 189—231.
- [7] Dumortier, F., Rousseau, C., Cubic liénard equations with linear damping, Nonlinearity, Preprint, 1989.
- [8] Zoladek, H., Abelian integrals in unfoldings of cod. 3 singular planar vector fields, Part II. The saddle and elliptic case. Preprint, 1989.