

关于图的最大亏格的结果

董广华 刘彦佩

(北京交通大学理学院数学系, 北京 100044)

摘要 提供了一类新的上可嵌入图类, 并且得到了一类直径为 2 的二连通伪图以及一类直径为 4 的重图的最大亏格的紧下界, 这推广了 Škoviera 的一个结果.

关键词 最大亏格 上可嵌入 直径

MSC(2000) 主题分类 05C10

1 引言

自从 Nordhaus 等^[1]的文章引导性地研究图的最大亏格问题以来, 关于图的上可嵌入性问题的研究已取得很大进展. Liu^[2]和 Nebeský^[3]分别独立地提供了图的上可嵌入的充分与必要条件. Huang 和 Liu^[4]证得如果一个简单图能 2-胞腔地嵌入到一个曲面上, 使得每个面的度不超过 7, 则这个图是上可嵌入的. Škoviera 和 Nedela^[5]得到每个 $4k+2$ 正则图都是上可嵌入的, 他们的方法用了 Euler 二重迹的概念, 前期的文章^[2]中同样用到了 Euler 二重迹. Jaeger^[6]证得通过用边连接 (所用边数不限) 两个 Betti 数为偶数的顶点不交的上可嵌入图得到的图也是上可嵌入的. 特别地, 虽然每个 4 边连通图都是上可嵌入的^[7], 但文献 [8] 中给出了 3 边连通图中不是上可嵌入的图的例子.

Škoviera^[9]于 1991 年证明了下面两个定理:

定理 1.1 每个直径为 2 的无环图都是上可嵌入的.

定理 1.2 设图 G 是一个直径为 2 的 2 连通图 (允许有环), 则有 $\xi(G) \leq 4$, 即 $\lceil \frac{\beta(G)}{2} \rceil - 2 \leq \gamma_M(G) \leq \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$.

最近, He 与 Liu^[10]证得

定理 1.3 若图 G 是一个直径为 3 的简单图, 则简单图 G^3 是上可嵌入的.

本文把定理 1.3 中用到的图 G 由简单图推广到了重图, 并得到了一类新的上可嵌入图类, 定理 1.1 也可很容易地由本文得到的结论而证得, 并且我们还得到了一类直径为 2 的 2 连通伪图的最大亏格的紧下界, 另外, 通过剖分一类直径为 2 的允许有环的图 G 中的环, 我们得到了一类直径为 4 的重图以及这些图的最大亏格的紧下界.

在图 $G = (V(G), E(G))$ 中, $V(G)$, $E(G)$ 和 $F(G)$ 分别指图 G 的顶点集、边集和面集. 本文所考虑的图都是有限、无向的连通图. 端点重合为一点的边称为环, 端点不同的边称为连

杆, 两个不同端点被多于一条的边连接时, 这些边称为重边. 既无环也无重边的图称为简单图; 有重边但无环的图称为重图; 重边和环都允许出现的图称为伪图. 剖分图 G 中一个环指通过在该环上添加一个新顶点而把该环变为重边的过程 (见图 1). 其他未解释的概念同文献 [11]. 读者应熟悉拓扑图论, 有关拓扑图论的详细内容可参看文献 [12].

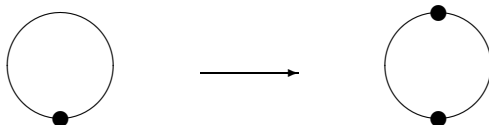


图 1 环的剖分

本文中, 符号 $d(G)$ 表示图 G 的直径, $d_G(u, v)$ 表示图 G 中两个顶点 u 和 v 之间的距离, 即图 G 中 u 和 v 之间的最短路长度. 设图 G 是一个直径为 3 的简单图, 则图 G^3 是通过用一条连杆连接图 G 中任意两个距离为 3 的顶点而得到的图, 即 $G^3 = (V(G^3), E(G^3))$, 其中 $V(G^3) = V(G)$, $E(G^3) = E(G) \cup \{e = uv \mid u, v \in V(G), d_G(u, v) = 3\}$. 下面介绍几个新图类. 设图 G 是一个直径为 3 的重图 (无环图; 伪图), 图 G^{3*} (G^{33} ; G^Δ) 是通过用一条连杆连接图 G 中任意两个距离为 3 的顶点而得到的图, 即 $G^{3*} = (V(G^{3*}), E(G^{3*}))$, 其中 $V(G^{3*}) = V(G)$, $E(G^{3*}) = E(G) \cup \{e = uv \mid u, v \in V(G), d_G(u, v) = 3\}$ ($G^{33} = (V(G^{33}), E(G^{33}))$, 其中 $V(G^{33}) = V(G)$, $E(G^{33}) = E(G) \cup \{e = uv \mid u, v \in V(G), d_G(u, v) = 3\}$; $G^\Delta = (V(G^\Delta), E(G^\Delta))$, 其中 $V(G^\Delta) = V(G)$, $E(G^\Delta) = E(G) \cup \{e = uv \mid u, v \in V(G), d_G(u, v) = 3\}$). 不难发现, 图 G^3 是简单图, 图 G^{3*} (G^{33} ; G^Δ) 是重图 (无环图; 伪图), 并有以下事实:

事实 1 设 u 和 v 是图 G^{3*} 中任意两个不同的顶点, 则有 $d_{G^{3*}}(u, v) < 3$.

事实 2 设 u 和 v 是图 G^{33} 中任意两个不同的顶点, 则有 $d_{G^{33}}(u, v) < 3$.

图 G 的最大亏格 $\gamma_M(G)$ 指存在最大的整数 k , 使得 G 可嵌入到亏格为 k 的可定向曲面上. 因为图的任意嵌入必至少含有一个面, 由 Euler 公式易得图的最大亏格的一个上界为

$$\gamma_M(G) \leq \left\lfloor \frac{|E(G)| - |V(G)| + 1}{2} \right\rfloor,$$

其中符号 $\lfloor \alpha \rfloor$ 指不超过 α 的最大整数, $|E(G)| - |V(G)| + 1$ 称为图 $G = (V(G), E(G))$ 的 Betti 数并用符号 $\beta(G)$ 表示. 如果 $\gamma_M(G) = \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$, 则图 G 称为上可嵌入的.

设 A 为图 G 的边集 $E(G)$ 的一个子集, $c(G \setminus A)$ 表示 $G \setminus A$ 的所有连通分支的个数, $b(G \setminus A)$ 表示 $G \setminus A$ 的 Betti 数为奇数的连通分支的个数, 其中 $G \setminus A$ 表示从图 G 中删除 A 中的所有边后得到的图 G 的子图. 设 T 是图 G 的一个生成树, 图 G 中树 T 的亏数 $\xi(G, T)$ 为 $G \setminus E(T)$ 中边数为奇数的连通分支的个数; 图 G 的亏数 $\xi(G)$ 为 T 取遍 G 所有的生成树后 $\xi(G, T)$ 的最小值. 不难发现 $\xi(G) = \beta(G) \pmod{2}$. 设 $F_1, F_2, \dots, F_k$ 为图 G 的 k ($k \geq 2$) 个不同的子图, 符号 $E_G(F_1, F_2, \dots, F_k)$ 表示边集 $E(G)$ 中一个顶点在 $V(F_i)$ 中, 而另一个顶点在 $V(F_j)$ ($1 \leq i, j \leq k, i \neq j$) 中的边的集合, $E(F_i, G)$ 表示边集 $E(G)$ 中一个顶点在 $V(F_i)$ 中而另一个顶点不在 $V(F_i)$ 中的边的集合 ($1 \leq i \leq k$). 下面介绍两个分别由 Liu^[12], Xuong^[13] 和 Nebeský^[3] 独立得到的关于图的最大亏格的组合表示以及本文中要用到的其他几个定理:

定理 1.4^[12,13] 设图 G 是一个连通图, 则

1) 图 G 是上可嵌入的当且仅当 $\xi(G) \leq 1$;

2) $\gamma_M(G) = \frac{\beta(G) - \xi(G)}{2}$.

定理 1.5^[3] 设图 G 是一个连通图, 则

1) 图 G 是上可嵌入的当且仅当 $c(G \setminus A) + b(G \setminus A) - 2 \leq |A|$, 其中 A 为 $E(G)$ 的任意子集;

2) $\xi(G) = \max_{A \subseteq E(G)} \{c(G \setminus A) + b(G \setminus A) - |A| - 1\}$.

定理 1.6^[14] 如果图 $G = (V(G), E(G))$ 是一个直径为 2 的 2 连通图, 则有 $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 5$.

一个直径为 2 的 2 连通图 $G = (V(G), E(G))$ 称为极图当且仅当 $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 5$. 由定理 1.6 易知极图为简单图.

定理 1.7^[15] 下列关于图 G 的论述是等价的:

(1) G 是一个直径为 2 的 2 连通极图;

(2) G 或者是 Petersen 图或者是用长为 2 的路连接一个新顶点与完全图 K_2 或 K_3 的所有顶点而得到的图.

定理 1.8^[16] 设 G 是一个直径为 2 的 2 连通图, 则 $\xi(G) = 4$ 当且仅当 G 是一个直径为 2 的 2 连通极图且在每个顶点处有奇数个环与这个顶点关联.

下面的引理由 Huang^[17] 证得, 该引理贯穿本文起着重要作用:

引理^[17] 对于图 G , 如果 $\xi(G) \geq 2$, 即 G 不是上可嵌入的, 则必存在边集 $E(G)$ 的子集 A 满足下列性质:

(i) $c(G \setminus A) = b(G \setminus A) \geq 2$;

(ii) $G \setminus A$ 任一连通分支 F 是图 G 的一个顶点导出子图;

(iii) 对于 $G \setminus A$ 任意 k 个不同的连通分支 $F_1, F_2, \dots, F_k$ 有 $|E_G(F_1, F_2, \dots, F_k)| \leq 2k - 3$, 特别地, 对于 $G \setminus A$ 任意两个不同的连通分支 F 和 H 有 $|E_G(F, H)| \leq 1$;

(iv) $\xi(G) = 2c(G \setminus A) - |A| - 1$.

不难发现, 在上面的引理中, 对于 $G \setminus A$ 任一连通分支 F 有以下事实:

事实 3 性质 (i) 表明 $\beta(F) \equiv 1 \pmod{2}$, 所以当 G 是简单图 F 至少含有 3 个顶点, 当 G 是重图时 F 至少含有 2 个顶点.

事实 4 $|A| = \frac{1}{2} \sum_F |E(F, G)|$, 其中 F 取遍 $G \setminus A$ 的所有的连通分支.

2 关于图的上可嵌入性的结果

本节将提供一类上可嵌入图, 并给出定理 1.1 的一个不同于 Škoviera^[9] 的证明.

定理 2.1 如果图 G 是直径为 3 的重图, 则重图 G^{3*} 是上可嵌入的.

证明 设 $\mathcal{M} = \{G \mid G \text{ 是直径为 3 的重图}\}$, $\mathcal{G}^{3*} = \{G^{3*} \mid G^{3*} \text{ 是根据图 } G^{3*} \text{ 的定义由图 } G \text{ 得到的, 其中 } G \text{ 是集合 } \mathcal{M} \text{ 中任意一个图}\}$, $\mathcal{G} = \{G^{3*} \mid G^{3*} \text{ 是集合 } \mathcal{G}^{3*} \text{ 中的图并且具有性质 } \xi(G^{3*}) \geq 2\}$. 可以证明集合 $\mathcal{G}$ 是一个空集. 假设其不是空集, 设 $G^{3*} \in \mathcal{G}$ 是其中阶数 (图的所有顶点的个数) 最小的图, 显然图 G^{3*} 不是上可嵌入的. 设 A 是边集 $E(G^{3*})$ 的具有性质 $\xi(G^{3*} \setminus A) = \xi(G^{3*})$ 最小子集, 根据事实 3 可得 $G^{3*} \setminus A$ 的每个连通分支的 Betti 数是奇

数, 所以 $G^{3*} \setminus A$ 的每个连通分支要么是完全图 K_3 , 要么是被重边连接的两点, 否则将存在图 $X^{3*} \in \mathcal{G}$ 具有性质 $|V(X^{3*})| \leq |V(G^{3*})|$, 而这与 $G^{3*} (\in \mathcal{G})$ 的阶数最小矛盾.

设 $\mathcal{R} = \{F_1, F_2, \dots, F_l\} (l = c(G^{3*} \setminus A) = b(G^{3*} \setminus A) \geq 2)$ 为 $G^{3*} \setminus A$ 的所有的连通分支, 由以上论述可得对任意的 $F_i \in \mathcal{R}$ 有 $|V(F_i)| \geq 2$.

断言 1 对任意的 $F \in \mathcal{R}$ 有 $E(F, G^{3*}) \geq 4$.

证明 (参见图 2) 设 F_i 是 $\mathcal{R}$ 中任一元素, 因为图 G^{3*} 是连通图且 $|\mathcal{R}| \geq 2$, 所以集合 $\mathcal{R}$ 中至少存在一个元素与 F_i 是邻接的, 不妨设此元素为 F_j 且设 $E_{G^{3*}}(F_i, F_j) = (u, v)$, 其中 $u \in V(F_i), v \in V(F_j)$. 因为 $|V(F_i)| \geq 2$ 且 $|V(F_j)| \geq 2$, 不妨设 $u' \in V(F_i)$ 且 $u' \neq u, v' \in V(F_j)$ 且 $v' \neq v$, 显然 $d_{G^{3*}}(u', v') = 3$, 而这与事实 1 矛盾, 所以或者边 $(u', v') \in E(G^{3*})$, 或者存在一个与顶点 u' 和 v' 都邻接的顶点. 如果边 $(u', v') \in E(G^{3*})$, 则 $E_{G^{3*}}(F_i, F_j) \supseteq \{(u, v), (u', v')\}$, 显然可得 $|E_{G^{3*}}(F_i, F_j)| \geq 2 = |\{(u, v), (u', v')\}|$, 而这与引理的性质 (iii) 矛盾, 所以边 $(u', v') \notin E(G^{3*})$, 因此存在一个与顶点 u' 和 v' 都邻接的顶点, 不妨设此顶点为 ω . 如果 $\omega \in V(F_i)$, 则 $|E_{G^{3*}}(F_i, F_j)| \geq 2 = |\{(u, v), (\omega, v')\}|$, 而这与引理的性质 (iii) 矛盾, 所以 $\omega \notin V(F_i)$. 同理可得 $\omega \notin V(F_j)$. 所以 ω 是 F_m 中的一个顶点, 其中 $F_m \in \mathcal{R}$ 且 $F_m \neq F_i, F_m \neq F_j$. 因为 $|V(F_m)| \geq 2$, 所以存在一个顶点 $\omega' \in V(F_m)$ 且 $\omega' \neq \omega$. 显然 $d_{G^{3*}}(u, \omega') = 3$, 而这与事实 1 矛盾, 所以或者边 $(u, \omega') \in E(G^{3*})$, 或者存在一个与顶点 u 和 ω' 都邻接的顶点. 如果边 $(u, \omega') \in E(G^{3*})$, 则 $E_{G^{3*}}(F_i, F_m) \supseteq \{(u', \omega), (u, \omega')\}$, 显然 $|E_{G^{3*}}(F_i, F_m)| \geq 2 = |\{(u', \omega), (u, \omega')\}|$, 而这与引理的性质 (iii) 矛盾, 因此边 $(u, \omega') \notin E(G^{3*})$, 所以存在一个与顶点 u 和 ω' 都邻接的顶点, 不妨设此顶点为 τ . 如果 $\tau \in V(F_i)$, 则 $|E_{G^{3*}}(F_i, F_m)| \geq 2 = |\{(u', \omega), (\tau, \omega')\}|$, 而这与引理的性质 (iii) 矛盾, 所以 $\tau \notin V(F_i)$. 同理可得 $\tau \notin V(F_j)$ 且 $\tau \notin V(F_m)$, 所以 τ 是 $V(F_n)$ 的一个顶点, 其中 $F_n \in \mathcal{R}$ 且 $F_n \neq F_i, F_n \neq F_j, F_n \neq F_m$. 因为 $2 \leq |V(F_n)| \leq 3$, 所以一定存在顶点 $\tau' \in V(F_n)$ 且 $\tau' \neq \tau$. 不难发现 $d_{G^{3*}}(u', \tau') = 3$, 而这与事实 1 矛盾, 所以或者边 $(u', \tau') \in E(G^{3*})$, 或者存在一个与顶点 u' 和 τ' 都邻接的顶点. 通过与前面相似的推理可知存在一个与顶点 u' 和 τ' 都邻接的顶点, 不妨设此顶点为 σ , 其中 $\sigma \in V(F_s), F_s \in \mathcal{R}$ 且 $F_s \neq F_i, F_s \neq F_j, F_s \neq F_m, F_s \neq F_n$. 显然 $E(F_i, G^{3*}) \supseteq \{(u, v), (u', \omega), (u, \tau), (u', \sigma)\}$. 不难发现 $|E(F_i, G^{3*})| \geq 4 = |\{(u, v), (u', \omega), (u, \tau), (u', \sigma)\}|$. 因为 F_i 是 $\mathcal{R}$ 中的任意元素, 可得对任意的 $F \in \mathcal{R}$, 有 $|E(F, G^{3*})| \geq 4$. 证毕.

根据事实 4 可得 $|A| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l |E(F_i, G^{3*})| \geq 2l = 2c(G^{3*} \setminus A)$, 再由引理的性质 (iv) 有 $\xi(G^{3*}) = 2c(G^{3*} \setminus A) - |A| - 1 \leq -1$, 而这与图 G^{3*} 不是上可嵌入的矛盾, 所以集合 $\mathcal{G}$ 是空集, 因此对任意图 $G^{3*} \in \mathcal{G}^{3*}$, 有 $\xi(G^{3*}) \leq 1$, 即集合 $\mathcal{G}^{3*}$ 中的任意图 G^{3*} 是上可嵌入的. 定理得证.

推论 1^[10] 如果 G 是直径为 3 的简单图, 则简单图 G^3 是上可嵌入的.

证明 假设图 G^3 不是上可嵌入的. 设 A 是边集 $E(G^3)$ 的具有性质 $\xi(G^3 \setminus A) = \xi(G^3)$ 最小子集, $\mathcal{R} = \{F_1, F_2, \dots, F_l\} (l = c(G^3 \setminus A) = b(G^3 \setminus A) \geq 2)$ 是 $G^3 \setminus A$ 所有的连通分支. 由事实 3 知 $G^3 \setminus A$ 的每个连通分支的 Betti 数为奇数, 又因为 G^3 是简单图, 所以 $G^3 \setminus A$ 的每个连通分支至少含有 3 个顶点. 通过与定理 2.1 中的断言 1 相似的推导可得对于任意的 $F \in \mathcal{R}$, 有 $E(F, G^3) \geq 4$. 由事实 4 有, $|A| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l |E(F_i, G^3)| \geq 2l = 2c(G^3 \setminus A)$, 因此根据引理的性质 (iv) 可得 $\xi(G^3) = 2c(G^3 \setminus A) - |A| - 1 \leq -1$, 而这与图 G^3 不是上可嵌入的假设矛盾, 因此本推论得证.

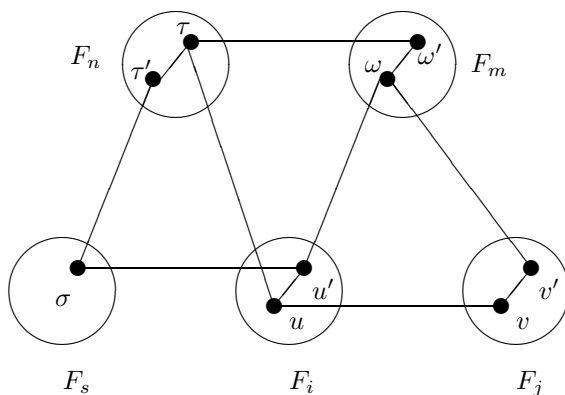


图 2

结合定理 2.1 和推论 1 易得如下定理:

定理 2.2 如果 G 是直径为 3 的无环图, 则无环图 G^{33} 是上可嵌入的.

推论 2^[9] 任意一个直径为 2 的无环图 G 都是上可嵌入的.

证明 情形 1: 如果边集 $E(G)$ 中的边都是重边, 则图 G 一定至少包含两个没有公共边的生成树, 因此 $\xi(G) = 0$ 或者 $\xi(G) = 1$, 由定理 1.4 得图 G 是上可嵌入的.

情形 2: 如果边集 $E(G)$ 中至少有一条边是连杆, 则易知 $G = G^{33}$, 由定理 2.2 可得图 G 是上可嵌入的.

结合情形 1 和 2 可得本推论.

3 关于图的最大亏格的下界的结果

本节将给出一类直径为 2 的 2 连通伪图以及一类直径为 4 的重图的最大亏格的紧下界.

定理 3.1 如果 G 是一个直径为 3 的伪图, 则 $\xi(G^\Delta) \leq 3$, 即

$$\left\lceil \frac{\beta(G^\Delta) - 3}{2} \right\rceil \leq \gamma_M(G^\Delta) \leq \left\lfloor \frac{\beta(G^\Delta)}{2} \right\rfloor,$$

其中 G^Δ 是一个根据 G^Δ 的定义由图 G 得到的直径为 2 的 2 连通的伪图.

证明 为证明本定理, 首先证明以下断言.

断言 2 G^Δ 是一个直径为 2 的 2 连通的伪图.

证明 根据图 G^Δ 的定义不难得到图 G^Δ 的直径为 2. 下面将证明图 G^Δ 是 2 连通的伪图:

子断言 图 G^Δ 无割点.

假设此子断言不成立. 不妨设 u 是图 G^Δ 的一个割点, $F_1, F_2, \dots, F_l (l \geq 2)$ 是 $G^\Delta - u$ 所有的连通分支, $V(F_i) = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ij_i}\} (1 \leq i \leq l, j_i \geq 1, \sum_{i=1}^l j_i = |V(G^\Delta)| - 1)$ 是 $F_i (1 \leq i \leq l)$ 的所有顶点, 其中 $G^\Delta - u$ 表示从图 G^Δ 中删除顶点 u 后得到的图 G^Δ 的子图. 根据图 G^Δ 的定义易得 G^Δ 中至少有一个 4-圈. 因为图 G^Δ 是一个直径为 2 的图, 所以除了顶点 u 本身外, 图 G^Δ 中的其他顶点都与 u 相邻. 又因为 u 是图 G^Δ 的割点且 $F_1, F_2, \dots, F_l (l \geq 2)$ 是 $G^\Delta - u$ 所有的连通分支, 所以易得 $E(F_i, F_j) = 0$, 即没有边连接 F_i 与 $F_j (1 \leq i, j \leq l, i \neq j)$, 因此 4-圈只能在 $F_i + u (1 \leq i \leq l)$ 中出现, 其中 $F_i + u$ 是图 G^Δ 的顶点导出子图. 但这是不可能的, 因为 F_i 中的所有顶点都与 u 相邻 (见图 3). 因此图 G^Δ 中无 4-圈, 而这与图 G^Δ 中至少有一个 4-圈的事实矛盾, 因此子断言得证.

根据如果一个图是至少有 3 个顶点的块, 则该图是 2 连通的以及子断言, 可证得断言 2.

结合定理 1.2 与断言 2 可得 $\xi(G^\Delta) \leq 4$. 设 $\mathcal{A} = \{G^\Delta \mid G^\Delta \text{ 是根据图 } G^\Delta \text{ 的定义由 } G \text{ 得到的图, 其中 } G \text{ 是一个直径为 3 的伪图}\}$, $\mathcal{E} = \{X \mid X \text{ 是通过在图 } G \text{ 的顶点上增加环得到的图, 其中 } G \text{ 是一个直径为 2 的 2 连通极图}\}$. 根据图 G^Δ 的定义以及定理 1.7 可推得 $\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$ 是一个空集, 因此不存在图 $G^\Delta \in \mathcal{A}$ 满足定理 1.8 要求的条件 (即要求该图是一个直径为 2 的 2 连通极图, 并且该图的每个顶点处被加上了奇数个环), 所以 $\xi(G^\Delta) \neq 4$ 并可推出 $\xi(G^\Delta) \leq 3$. 另外有图例 (图 4) 表明图 G^Δ 的最大亏格的下界是紧的.

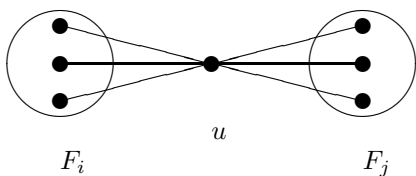


图 3

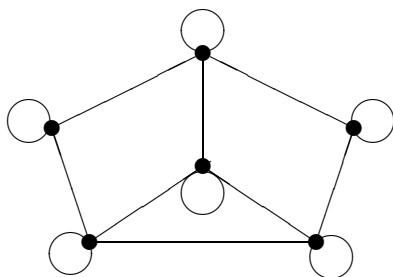


图 4 亏数是 3 的图

注释 设 $\mathcal{A} = \{G^\Delta \mid G^\Delta \text{ 是根据 } G^\Delta \text{ 的定义由 } G \text{ 得到的图, 其中 } G \text{ 是一个直径为 3 的伪图}\}$, 则 $\mathcal{A}$ 中存在无数的图, 其亏数为 1 (即上可嵌入的) 或 2. 更有意义的是我们发现了以下结果: 设 G 是一个如图 5 所示的在直径为 3 的简单图的每个顶点处添加奇数个环而得到的图, G^Δ 是根据图 G^Δ 的定义由图 G 得到的图, 图 G 中顶点 v_1 的邻集记为 $N(v_1) = \{u \mid (u, v_1) \in E(G), u \in V(G), u \neq v_1, u \neq v_2, u \neq v_5\}$, 则有: 如果 $|N(v_1)| (\geq 4)$ 是个偶数 (图 6 是一个 $|N(v_1)| = 4$ 的图), 那么 $\xi(G^\Delta) = 2$; 如果 $|N(v_1)| (\geq 4)$ 是一个奇数 (图 7 是一个 $|N(v_1)| = 5$ 的图), 则 $\xi(G^\Delta) = 1$.

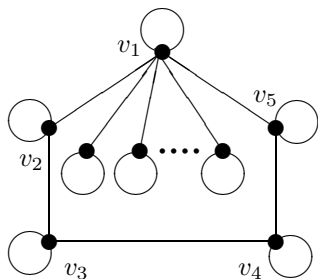


图 5

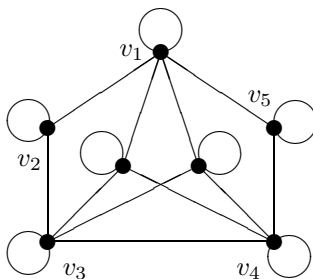


图 6

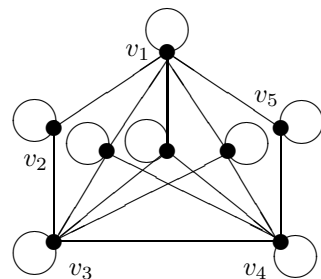


图 7

设 $\mathcal{A} = \{G^\Delta \mid G^\Delta \text{ 是根据图 } G^\Delta \text{ 的定义由 } G \text{ 得到的图, 其中 } G \text{ 是一个直径为 3 的伪图}\}$, $\mathcal{B} = \{G^\Delta \mid G^\Delta \text{ 是 } \mathcal{A} \text{ 中的图且 } G^\Delta \text{ 中至少存在满足 } d_{G^\Delta}(u, v) = 2 \text{ 的两个顶点 } u \text{ 和 } v, \text{ 这两点都至少与一个环关联}\}$, $\mathcal{C} = \{G^{\Delta\Delta} \mid G^{\Delta\Delta} \text{ 是通过剖分图 } G^\Delta \text{ 中所有的环得到的图, 其中 } G^\Delta \text{ 是 } \mathcal{B} \text{ 中任意一个图}\}$. 有如下定理:

定理 3.2 设 $G^{\Delta\Delta}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的图, 则 $G^{\Delta\Delta}$ 是一个直径为 4 的重图, 且 $\xi(G^{\Delta\Delta}) \leq 3$, 即

$$\left\lceil \frac{\beta(G^{\Delta\Delta}) - 3}{2} \right\rceil \leq \gamma_M(G^{\Delta\Delta}) \leq \left\lfloor \frac{\beta(G^{\Delta\Delta})}{2} \right\rfloor.$$

证明 由图 $G^{\Delta\Delta}$ 的定义不难推知 $G^{\Delta\Delta}$ 是一个直径为 4 的重图. 下面证明 $\xi(G^{\Delta\Delta}) \leq 3$.

断言 3 通过剖分图 G 中的环后, 图 G 的最大亏格不会改变.

证明 设 G' 是通过剖分图 G 中的环后得到的图, 显然有 $|V(G')| = |V(G)| + 1$, $|E(G')| = |E(G)| + 1$, $|F(G')| = |F(G)|$, 根据图 G 所嵌入曲面的 Euler 示性数可得断言 3 成立.

结合断言 3 及定理 3.1 可得图 $G^{\Delta\Delta}$ 与图 G^{Δ} 的最大亏格相等, 即有 $\xi(G^{\Delta\Delta}) = \xi(G^{\Delta}) \leq 3$, 也就是 $\lceil \frac{\beta(G^{\Delta\Delta})-3}{2} \rceil \leq \gamma_M(G^{\Delta\Delta}) \leq \lfloor \frac{\beta(G^{\Delta\Delta})}{2} \rfloor$. 另外有图例 (图 8) 表明图 $G^{\Delta\Delta}$ 的最大亏格的下界是紧的.

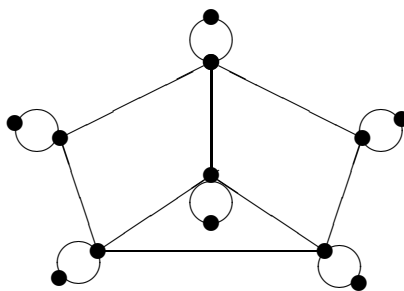


图 8 亏数是 3 的图

致谢 作者感谢审稿人的认真审阅及提出的有帮助的建议.

参 考 文 献

- 1 Nordhause E A, Stewart B M, White A T. On the maximum genus of a graph. J Combin Theory, 1911, 11: 151-185
- 2 Liu Y P. The maximum orientable genus of a graph. Scientia Sinical (Special Issue), 1979, II: 41-55
- 3 Nebeský L. A new characterization of the maximum genus of a graph. Czechoslova Math J, 1981, 31(106): 604-613
- 4 Huang Y Q, Liu Y P. Face size and the maximum genus of a graph. J Combin Theory Ser B, 2000, 80: 356-370
- 5 Škoviera M, Nedela R. The maximum genus of a graph and doubly Eulerian trails. Bolletion UMIB, 1990, 4: 541-551
- 6 Jaeger F, Payan C, Xuong N H. A classes of upper embeddable graphs. J Graph Theory, 1979, 3: 387-391
- 7 Kundu S. Bounds on number of disjoint spanning trees. J Combin Theory Ser B, 1974, 17: 199-203
- 8 Jungerment M. A characterization of upper embeddable graphs. Trans Math Soc, 1979, 241: 401-406
- 9 Škoviera M. The maximum genus of graphs diameter two. J Combin Theory Ser B, 1974, 17: 199-203
- 10 He W L, Liu Y P. A note on the maximum genus of graph G^3 . J Syst Sci and Info, 2003, 1(4): 615-619
- 11 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London: Macmillan, 1976
- 12 Liu Y P. Embeddability in Graphs. Dordrecht, Boston and London: Kluwer Academic, 1995. 255-265
- 13 Xuong N H. How to determine the maximum genus of a graph. J Combin Theory Ser B, 1979, 26: 217-225
- 14 Murty U S R. On some extremal graphs. Acad Sci Hung, 1969, 19: 69-74
- 15 Murty U S R. Extremal nonseparable graphs of diameter 2. in: F. Harary, ed., Proof Techniques in Graph Theory, New York: Academic Press, 1969, 111-118
- 16 Fu H L, Tsai M C, Xuong N H. The decay number and the maximum genus of diameter 2 graphs. Discrete Math, 2001, 226: 191-197
- 17 Huang Y Q. Maximum genus and chromatic number of graphs. Discrete Math, 2003, 271: 117-127
- 18 Huang Y Q, Liu Y P. Maximum genus of graphs with diameter three. Discrete Math, 1999, 194: 139-203