

# 立面 1R2T 三自由度绳牵引并联机构的位姿运动学分析

高峻岩<sup>1</sup>, 郑亚青<sup>2</sup>, 林麒<sup>1\*</sup>, 刘雄伟<sup>3</sup>

(1. 厦门大学机电工程系, 福建 厦门 361005; 2. 华侨大学机电及自动化学院, 福建 泉州 362021;

3. 赫特福德郡大学航空学院自动化设计工程系, 英国)

**摘要:** 给出所设计的立面 1R2T 三自由度绳牵引并联机构的模型; 在该模型的竖直平面上对末端执行器进行了详尽的位姿运动学分析, 提出了封闭矢量四边形法则在求解所有的不规则几何图形的位姿运动学逆解时都适用的观点. 文中运用力矩平衡法确定其质心位置的方法; 又根据封闭矢量四边形法则, 建立了运动学位姿逆解模型, 利用 Moore-Penrose 逆求解运动学位姿正解; 最后在所规划的椭圆轨迹下, 采用 Simulink 仿真软件进行了末端执行器的运动轨迹和绳长变化规律的仿真. 研究表明: 在所规划椭圆轨迹下, 所有绳长的变化是连续的; 位姿运动学正逆解相互验证表明所采用的算法是正确且通用的.

**关键词:** 绳牵引并联机构; 三自由度; 运动学

中图分类号: TH 112

文献标识码: A

文章编号: 0438-0479(2006)06-0771-04

绳牵引并联机构是一种新型的机构, 在起重机器人、虚拟现实的力反馈装置和触觉装置、大型运动仿真器、大型射电望远镜的馈源支撑系统、超高速机器人、超大工作空间的轻型机器人、风洞支撑系统、大型轮船舰艇制造和机械加工等方面都具有潜在的应用前景<sup>[1]</sup>. 本文以立面 1R2T 的三自由度绳牵引并联机构为研究对象, 设计了所研究的机构模型. 文中对该机构进行了位姿运动学分析, 给出了位姿运动学正、逆解. 最后在 Simulink 仿真环境下, 对末端执行器进行了相关的仿真. 本文所得出的理论分析结果具有通用性, 不但为原型机的试制奠定了理论基础, 而且对更复杂的绳牵引并联机构的研究进行了理论准备工作.

## 1 机构模型

本文设计了一个立面 1R2T (R: Rotation 转动; T: Translation 平动) 三自由度绳牵引机构, 如图 1 所示. 图中的粗实线十字架为末端执行器, 它由 4 条绳  $P_1B_1$ 、 $P_2B_2$ 、 $P_3B_3$ 、 $P_4B_4$  牵引着. 支撑绳的构架长  $OB_2 = 820 \text{ mm}$ , 高  $OB_4 = 1\ 060 \text{ mm}$ . 点铰链  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$ 、 $B_4$  构成竖直平面, 与固定坐标系的坐标平面  $xoy$  重合. 各点铰链  $B_i$  的位置为:  $B_1$  和  $B_3$  都位于机构立面上、下边

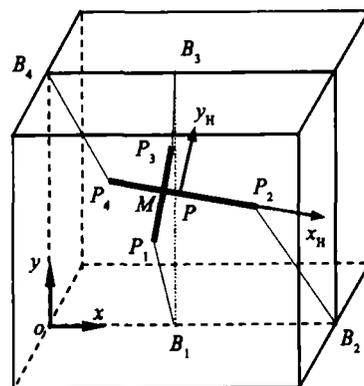


图 1 机构立体简图

Fig. 1 Tri-dimensional sketch of the mechanism

的中点,  $B_2$  和  $B_4$  则分别位于机构立面的右下角和左上角. 末端执行器受绳的牵引在竖直平面 (即  $xoy$  平面) 内运动.  $P$  点是末端执行器的质心,  $M$  点是十字架交叉的中心, 动坐标系  $Px_Hy_H$  的原点就设在  $P$  点处, 轴  $Mx_H$  沿末端执行器的长轴. 假设末端执行器的初始状态是  $P$  点位于构架的中心, 横轴  $P_4P_2$  位于水平状态. 由于绳子在每一时刻都要张紧, 故末端执行器的转动工作空间只能是顺时针方向的. 平动工作空间只能在由  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$  和  $B_4$  所确定的平面上.

## 2 数学建模

### 2.1 末端执行器模型质心 $P$ 的求取

末端执行器如图 2 所示,  $\overline{P_4M} = 80 \text{ mm}$ ,  $\overline{MP_1} =$

收稿日期: 2006-04-10

基金项目: 国家自然科学基金(50475099)资助

作者简介: 高峻岩(1982-), 男, 硕士研究生.

\* 通讯作者: qilin@xmu.edu.cn

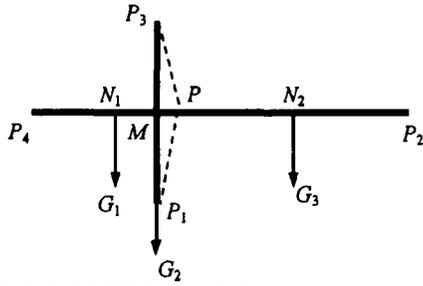


图2 十字架末端执行器示意图

Fig.2 Sketch of the end effector

$\overline{MP_3} = 50 \text{ mm}$ ,  $\overline{MP_2} = 120 \text{ mm}$ . 假设十字架由均质杆构成, 单位长度的质量为  $m_0$ .  $G_1$ 、 $G_2$  和  $G_3$  分别为十字架的各段  $P_4P$ 、 $P_1P_3$  和  $PP_2$  的重力, 集中作用于  $N_1$ 、 $M$  和  $N_2$  点.

记  $t = \overline{MP}$ ,  $N_1$  为  $\overline{P_4P}$  的中点,  $N_2$  为  $\overline{PP_2}$  的中点, 则末端执行器的质心位置可由以下力矩平衡关系式

$$G_1 \overline{P_4P} + G_2 \overline{MP} = G_3 \overline{PP_2}$$

决定. 代入具体数值, 可得  $t = 40/3 \approx 13.3 \text{ mm}$ .

### 2.2 运动学位姿的逆解问题

在如图3的竖直平面上, 若已知动平台(末端执行器)  $P$  点的位姿  $P = (x, y, \varphi)^T$ , 求各根绳的长度  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 即为运动学的逆解问题. 设  $m_i = \overrightarrow{OB_i}$  为点铰链  $B_i$  在固定坐标系  $\{0\}$  中的位置矢量(如图3中的  $m_3$ );  $h_i = \overrightarrow{PP_i}$  为从质心  $P$  到绳与末端执行器的连接点  $P_i$  的矢量;  $L_i = \overrightarrow{B_iP_i}$  为绳的矢量(如图3中的  $L_1$ ).

根据平面几何的矢量封闭原理和机器人机构学的数学关系式, 图3中的各矢量满足关系:

$$L_i = m_i - [X + R(\varphi)h_i] \quad (1)$$

其中  $X$  是从  $O$  点到机构平面内  $P$  点的矢量, 式(1)中

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

$\varphi$  为  $\overline{P_4P_2}$  与水平线  $ab$  ( $ab$  平行于  $ox$  轴) 的夹角,  $R(\varphi)$  为旋转矩阵,  $R(\varphi)h_i$  表示  $\overrightarrow{PP_i}$  矢量旋转了角度  $\varphi^{[2,3]}$ .

将式(1)展开, 可得:

$$\begin{bmatrix} L_{ix} \\ L_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{ix} \\ m_{iy} \end{bmatrix} - \left[ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{ix} \\ h_{iy} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} m_{ix} - x - h_{ix} \cos \varphi + h_{iy} \sin \varphi \\ m_{iy} - y - h_{ix} \sin \varphi - h_{iy} \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

而第  $i$  根绳子的长度可表示为:

$$L_i^2 = L_{ix}^2 + L_{iy}^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

式中的  $L_{ix}$  和  $L_{iy}$  分别表示绳长矢量  $L_i$  在  $x$ 、 $y$  方向的分量.

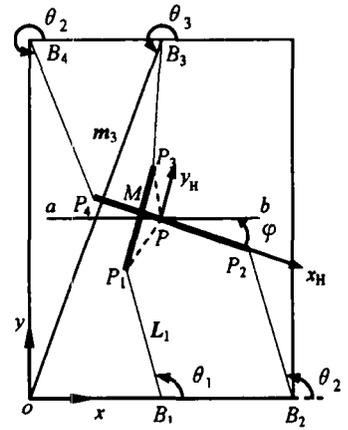


图3 末端执行器

Fig.3 End effector

把具体数值代入式(2), 即可算出各绳的长度. 本文利用 MATLAB 编制了实现求绳长的函数 funtionL, 在之后的 Simulink 仿真中, 也可以将上式作为用户自定义函数 fcn 的一个仿真模块.

### 2.3 运动学位姿的正解问题

已知各根绳的长度  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 求动平台  $P$  点的位姿  $X(x, y, \varphi)^T$ , 即为运动学位姿的正解问题. 由于式(2)是非线性方程组, 通常解有多个, 对于简单的问题可以采用解析解. 但是这种方法采用复杂的符号项, 并且最后的结果需要求解高阶(超过四阶)多项式的根, 还需要用数值分析, 相当繁琐, 结果也不精确. 本文采用 Newton-Raphson 迭代法求解式(2). 这种方法的原理是用一个初始猜测的解代入, 然后层层迭代, 最终产生一个在误差容限内的解.

将式(2)展开, 可得含有  $P$  点位姿的三个未知数  $x$ 、 $y$ 、 $\varphi$  的方程:

$$F_i(X) = x^2 + y^2 + m_{ix}^2 + m_{iy}^2 + h_{ix}^2 + h_{iy}^2 - 2h_{ix}[(m_{ix} - x) \cos \varphi + (m_{iy} - y) \sin \varphi] + 2h_{iy}[(m_{ix} - x) \sin \varphi - (m_{iy} - y) \cos \varphi] - 2(xm_{ix} + ym_{iy}) - L_i^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

由 Newton-Raphson 迭代法, 有矩阵方程  $J_{NR} \delta X^k = -F(X)$ , 其中  $J_{NR}$  为 Newton-Raphson Jacobian 矩阵, 具体表示为:

$$J_{NR} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x} & \frac{\partial F_i}{\partial y} & \frac{\partial F_i}{\partial \varphi} \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

式中  $F_i(X)$  对位姿坐标  $X(x, y, \varphi)^T$  的偏微分为:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = 2(x + h_{ix} \cos \varphi - h_{iy} \sin \varphi - m_{ix});$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y} = 2(y + h_{ix} \sin \varphi + h_{iy} \cos \varphi - m_{iy});$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \varphi} = 2\{h_{ix} h'_{ix} + h_{iy} h'_{iy} -$$

$$h_{ix}[(m_{ix} - x) \cos \varphi + (m_{iy} - y) \sin \varphi] +$$

$$\begin{aligned}
 & h_{\dot{y}} [(m_{ix} - x) \sin \varphi - (m_{iy} - y) \cos \varphi] - \\
 & h_{\dot{x}} [(m_{iy} - y) \cos \varphi - (m_{ix} - x) \sin \varphi] + \\
 & h_{\dot{\varphi}} [(m_{ix} - x) \cos \varphi + 9m_{iy} - y \sin \varphi] \quad (4)
 \end{aligned}$$

迭代求解的通式为  $\delta X_k = -J_{NR}^+ F(X)$ , 式中  $J_{NR}^+ = (J_{NR}^T J_{NR})^{-1} J_{NR}^T$  是过冗余 Jacobian 矩阵伪逆,  $F(X) = \{F_i(X)\}$ ,  $\delta X = \{\delta x, \delta y, \delta \varphi\}^T$ . 迭代开始时, 先以初始位姿的猜值  $X_0$  代入, 可求出其增量解  $\delta X_0$ , 然后反复计算求解  $X_{k+1} = X_k + \delta X_k$ , 直到使得  $\delta X_k < \varepsilon$  为止. 这里  $\varepsilon$  是自定义的误差容限. 本文令  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^{[5-7]}$ .

通过上述的 Newton-Raphson 迭代法可以求出运动学正解, 即由已知各绳长求得末端执行器的位姿.

### 3 仿真与程序运行结果

对于本文研究的 1R2T 绳牵引并联机构, 运动学逆解问题是由理论位姿坐标求出绳长, 而运动学正解是由绳长求出位姿坐标. 本文先讨论运动学逆解问题, 接着再讨论运动学正解问题.

#### 3.1 运动学逆解仿真结果

本文对末端执行器的运动轨迹进行了规划, 令其满足椭圆方程:

$$\begin{cases}
 x = 0.41 + 0.2 \cos \alpha \\
 y = 0.53 + 0.4 \sin \alpha \\
 \varphi = \pi/8
 \end{cases} \quad (5)$$

接着采用 Simulink 软件<sup>[4]</sup> 对其进行了一系列的仿真, 得到末端执行器的轨迹(即其质心位置的变化规律)和各绳长度随之变化的情况. 当末端执行器的初始位置为  $\alpha = 0$  的坐标点时, 即初始位置为  $X_0(0.61, 0.53, \pi/8)$  时, 仿真结果如图 4、5 所示.

图 4 表示末端执行器的位置. 图中用实线表示末端执行器 P 点与坐标原点之间的距离随时间变化的规

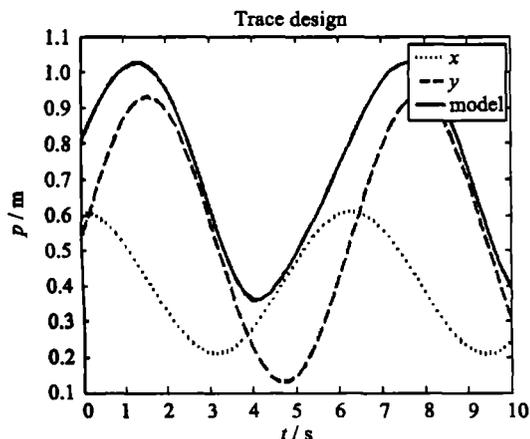


图 4 末端执行器质心的位置

Fig. 4 The place of end effector's centroid

律; 两条虚线分别表示 P 点坐标在 x、y 两坐标轴上的投影随时间变化的规律.

本文另采用 MATLAB 软件编制了已知位姿求绳长的程序. 程序运行结果如图 5 所示. 图 5 给出了 4 条绳子在所规划的椭圆轨迹下绳长的变化规律.

#### 3.2 运动学正解的求解结果

本文采用点对点的方法来求解运动学正解问题. 不失一般性, 随机选取 5 组绳长的数据, 已知各根绳子绳长, 采用 Newton-Raphson 迭代法计算, 可得出末端执行器的位姿坐标  $X_2(x_2, y_2, \varphi_2)^T$ . 表 1 比较了运动学正逆解结果. 表中同时列出了由式(5)决定的理论位姿坐标  $X_1(x_1, y_1, \varphi_1)^T$  和编程迭代求解得的位姿坐标  $X_2(x_2, y_2, \varphi_2)^T$ .

从表 1 可以看出, 运动学正解求解得的位姿坐标结果与理论位姿坐标相当接近, 绝对误差的数量级为  $10^{-4} \text{ m}$ , 相对误差的数量级为  $10^{-3}$ . 这充分证明了 Newton-Raphson 迭代算法对求解此问题的理论正确性和程序上的可操作性.

### 4 结束语

本文的研究工作主要有以下几点:

- (1) 设计了 1R2T 的三自由度绳牵引并联机构;
- (2) 对上述机构进行了椭圆的轨迹规划, 进行了末端执行器的运动轨迹和绳长变化规律的仿真, 完成了运动学逆解工作;
- (3) 建立了运动学正解模型, 运用 Newton-Raphson 迭代法编制程序数值求解 Moore-Penrose 逆, 得到运动学正解的结果.

通过正逆解结果的相互验证, 证明本文所采用的方法的正确性和可行性. 本文的研究为原型机的试制进行了理论准备工作, 也为今后机构的静力学、动力

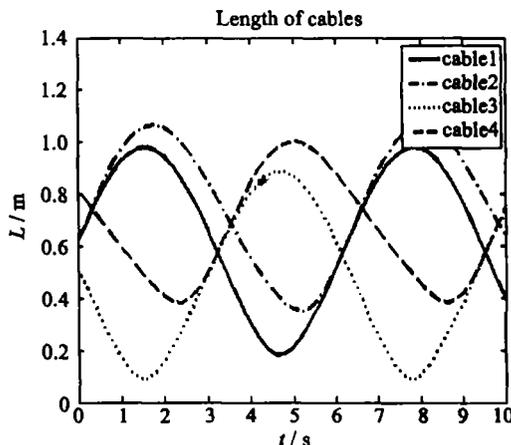


图 5 各绳长的变化规律

Fig. 5 Length variety of cables

表 1 运动学正解结果比较  
Tab. 1 The positive solution compare

参数 组号	4 条绳的绳长/m				理论位姿坐标/m			实际位姿坐标/m		
	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$x_1$	$y_1$	$\varphi_1$	$x_2$	$y_2$	$\varphi_2$
1	0.3535	0.4875	0.7112	0.8631	0.3503	0.2985	0.1025	0.3508	0.3000	0.1028
2	0.2472	0.2483	0.9320	0.9816	0.2023	0.1029	0.1186	0.2029	0.1033	0.1190
3	0.5601	0.5856	0.5157	0.7865	0.4971	0.5026	0.2028	0.4975	0.5030	0.4985
4	0.7768	0.7625	0.3571	0.7510	0.6028	0.7004	0.2522	0.6025	0.7011	0.2533
5	0.8010	0.8803	0.2680	0.5122	0.3543	0.7501	0.2213	0.3551	0.7505	0.2206

学、控制系统仿真以及机构控制打下了数学基础。

参考文献:

[1] 刘雄伟, 郑亚青. 六自由度绳牵引并联机构的运动学分析 [J]. 机械工程学报, 2002, 12(38): 16- 20.

[2] 蔡自兴. 机器人学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000: 60 - 102.

[3] 安杰利斯. 机器人机械系统原理: 理论、方法、算法[M]. 宋伟刚, 译. 北京: 机械工业出版社, 2004: 10- 180.

[4] 伊泽明, 丁立春. 精通 MATLAB6[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 5- 160.

[5] Jigar Vadia. Planar Cable Direct Driven Robot: Hardware Implementation[D]. USA: Ohio University, 2003: 15 - 50.

[6] Williams II R L, Gallina P. Planar cable direct-driven robots, Part I: kinematics and statics [C]// ASME Design Technical Conferences. USA: University of Pittsburgh, 2001: 30- 43.

[7] Paul M Bosscher. Disturbance Robustness Measures and Wrench-feasible Workspace Generation Techniques for Cable-driven Robots[D]. USA: Georgia Institute of Technology, 2004: 20- 121.

## Position Kinematic Analysis of a 3-DOF Wire-driven Parallel Manipulator with 1R2T Type on Upright Position

GAO Jun-yan<sup>1</sup>, ZHENG Ya-qing<sup>2</sup>, LIN Qi<sup>1\*</sup>, LIU Xiong-wei<sup>3</sup>

(1. Department of Mechanical and Electrical Engineering, Xiamen University, Xiamen 360005, China;

2. College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;

3. School of Aerospace, Automotive and Design Engineering, University of Hertfordshire, UK)

**Abstract** A kind of 3-DOF wire-driven parallel manipulator with 1R2T type was presented. Position kinematics analysis was given on upright position according to this manipulator. First of all, a viewpoint that the rule of vector quadrangle was applicable in all abnormity was mentioned. Then, the method of moment equity solving the centroid position was presented. The inverse kinematical position model was set up with the method of vector quadrangle. The Moore-Penrose method was involved in the solution to positive kinematical position. At last, in the trace of ellipse designed, simulation results including both the place of end effector's centroid and length variety of cables were presented. The investigation indicated that length variety of cables was continuous and mutual validation indicated the method adopted was accurate and universal.

**Key words:** wire-driven parallel manipulator; 3-degrees of freedom; kinematics