中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 6 期: 917～936
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论 文

具混合边界条件的趋化 - 流体耦合模型解的整体存在性

献给陈恕行教授 80 华诞

金春花, 尹景学*

华南师范大学数学科学学院, 广州 510631

E-mail: jinch@scnu.edu.cn, yjx@scnu.edu.cn

收稿日期: 2020-01-15; 接受日期: 2020-04-21; 网络出版日期: 2020-07-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11871230 和 11771156) 资助项目

摘要 本文考虑如下趋化 - 流体耦合模型的混合边值问题:

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = \Delta n^m - \chi \nabla \cdot (n \nabla c), \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - cn, \\ u_t + u \cdot \nabla u = \Delta u - \nabla \pi + n \nabla \varphi, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases}$$

主要研究其在空间有界二维区域上解的整体存在性及一致有界性问题. 首先, 证明慢扩散情形 $(m > 1)$ 混合非齐次边值问题的一致有界弱解的整体存在性. 其次, 考虑线性扩散情形 $(m = 1)$, 对于混合齐次边值问题, 得到经典解的整体存在性.

关键词 趋化 - 流体耦合模型 混合边界 弱解 经典解 一致有界性

MSC (2020) 主题分类 35M10, 92C17

1 引言

本文考虑如下趋化 - 流体耦合模型:

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = \Delta n^m - \chi \nabla \cdot (n \nabla c), & (x,t) \in Q, \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - cn, & (x,t) \in Q, \\ u_t + u \cdot \nabla u = \Delta u - \nabla \pi + n \nabla \varphi, & (x,t) \in Q, \\ \nabla \cdot u = 0, & (x,t) \in Q, \end{cases} \tag{1.1}$$

英文引用格式: Jin C H, Yin J X. Global solvability to a coupled chemotaxis-fluid model with mixed boundary conditions (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 917–936, doi: 10.1360/SSM-2020-0018

其中 $Q=\Omega\times\mathbb{R}^+$, $m\geqslant 1$, Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域. 该模型描述了氧气驱动下溶解在水中的枯草杆菌的运动情形, 其中 n 和 c 分别表示细菌的密度和氧气的浓度, $-cn$ 是细菌的消耗项, $u=(u_1,u_2)$ 和 π 分别为流体的速度和压力, $\nabla\varphi$ 为重力项.

趋化是自然界中一种刻画生物定向运动的重要机制, 即细菌或微生物会朝着化学物质浓度较高的地方聚集. 1970 年, Keller 和 Segel [1] 提出了一个刻画这种现象的经典模型. 之后, 这类模型吸引了众多数学工作者的注意. 在过去的几十年, 这类模型的研究已经取得了丰富的成果. 趋化 - 流体耦合模型最早由 Tuval 等 [2] 提出, 形式如下:

$$\begin{cases} n_t+u\cdot\nabla n=\Delta n-\nabla\cdot(\chi(c)n\nabla c),\\ c_t+u\cdot\nabla c=\Delta c-k(c)n,\\ u_t+\tau u\cdot\nabla u=\Delta u-\nabla\pi+n\nabla\varphi,\\ \nabla\cdot u=0. \end{cases}\tag{1.2}$$

该模型主要刻画了悬浮在水中的枯草杆菌的运动情况, 即它们会朝着氧气浓度高的地方聚集, 细菌、氧气和流体通过输运项 $u\cdot\nabla n$、$u\cdot\nabla c$ 和位势力 $\nabla\varphi$ 耦合在一起. 然而, 当流体流速较慢时, 其惯性力远小于黏性力, 故可忽略不计. 此时 Navier-Stokes 方程可被 Stokes 方程取代 [3]. 自该模型被提出以来, 已经有众多的数学工作者开始从事其数学理论的研究. 特别地, 对其 Cauchy 问题, 以及有界区域上具齐次边界条件的初边值问题的研究已经有非常丰富的结果. 例如, Winkler [4] 确立了 $\chi(c)=1$ 和 $k(c)=c$ 时 2 维框架下趋化和 Navier-Stokes 方程的耦合模型古典解的整体存在性, 以及 3 维框架下趋化和 Stokes 方程的耦合模型弱解的整体存在性.

如果把细菌的扩散看成是在多孔介质中的运动, 即考虑如下方程:

$$\begin{cases} n_t+u\cdot\nabla n=\Delta n^m-\chi\nabla\cdot(n\nabla c),\\ c_t+u\cdot\nabla c=\Delta c-cn,\\ u_t=\Delta u-\nabla\pi+n\nabla\varphi,\\ \nabla\cdot u=0, \end{cases}\tag{1.3}$$

Liu 和 Lorz [5] 证明了 3 维情形 $m=\frac{4}{3}$ 时 "极" 弱解的整体存在性; 随后, Duan 和 Xiang [6] 完善了这一理论, 对任意的 $m\geqslant 1$ 确立了这类弱解的整体存在性. 然而, 这类 "极" 弱解只是在 L^1 意义下有界, 且不能保证解的有界性, 故而即使整体存在也不能确保解不能在有限时间爆破 (blow-up). 因而, 寻找整体有界的弱解是极为有意义的. 2012 年, Tao 和 Winkler [7] 解决了 2 维 $m>1$ 的情形, 而 3 维情形的研究却相当曲折. 首先, Di Francesco 等 [8] 得到了 $m\in(\frac{7+\sqrt{217}}{12},2]$ 时有界弱解的整体存在性; 之后, 文献 [9] 又证明了 $m\in(\frac{8}{7},+\infty)$ 时一个局部有界的弱解; 随后, 文献 [10] 又对其中 $m\in(\frac{7}{6},+\infty)$ 的情形补充了解的一致有界性; 最近, Winkler [11] 又把结果扩展到了 $m>\frac{9}{8}$. 但直到目前, $m>1$ 的情形还未得到完整解决. 然而, 如果考虑到细菌的增生, 模型中可加入 logistic 增长项, 则模型变为

$$\begin{cases} n_t+u\cdot\nabla n=\Delta n^m-\chi\nabla\cdot(n\nabla c)+\mu n(1-n),\\ c_t+u\cdot\nabla c=\Delta c-cn,\\ u_t+u\cdot\nabla u=\Delta u-\nabla\pi+n\nabla\varphi,\\ \nabla\cdot u=0. \end{cases}\tag{1.4}$$

2017 年, Jin [12] 对不考虑流速的情形 ($u=0$) 证明了 3 维空间任意的 $m>1$ 的情形下有界解的整体存在性. 对 3 维空间下的线性扩散情形 ($m=1$), Lankeit [13] 得到了齐次边值问题弱解的整体存在性, 并进一步证明在某个时刻 T 后, 弱解将变为经典解并最终收敛到 $(1,0,0)$ 这个平凡的稳态解. 除此之外, 对于大的 μ [14] 或者小初值 [15], 也可得到经典解的整体存在性. 但小 μ 时大初值解的整体存在性仍是一个公开问题. 最近, Braukhoff [16] 考虑了模型 (1.4) 对应 $m=1$ 和 $\mu>0$ 的非齐次边值问题, 得到了 2 维空间经典解的整体存在性及 3 维空间弱解的整体存在性.

然而, 从分析的角度, logistic 增长项由于其二阶阻尼项的存在, 在一定程度上有利于抑制或阻止解的爆破行为, 并给解的正则性估计带来很大的便利. 本文去掉了该阻尼项, 研究不含 logistic 增长项的情形, 即考虑模型 (1.1) 的混合边值问题. 首先, 基于文献 [16] 中的变换, 把非齐次边值条件化为齐次边值条件. 但模型中由于 logistic 增长项的去除, 使得文献 [16] 中所使用的一些方法不再适用, 尤其是能量估计的一些技巧完全不同于文献 [16]. 本文首先对渗流慢扩散情形得到有界弱解的整体存在性. 随后, 也考虑线性扩散情形, 对混合齐次边值问题得到唯一经典解的整体存在性.

首先给出如下初值条件:

$$n(x,0)=n_0(x),\quad c(x,0)=c_0(x),\quad u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega, \tag{1.5}$$

其中 $n_0,c_0,u_0\geqslant 0$. 关于边界条件, 对于 u, 假设如下无滑移边界条件:

$$u|_{\partial\Omega}=0.$$

在水层表面假设没有细菌穿过边界, 即假设如下零流边界条件:

$$\left.\frac{\partial n^m}{\partial\nu}-\chi n\frac{\partial c}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=0.$$

而对于氧气, 众所周知, 水滴暴露在空气中, 表面都是空气, 溶解在水中的氧气会溢出, 而空气中的氧气也会溶解到水中. 故而在水滴表面会有氧气交换. 由 Raoult 定律可知, 通过边界进入的氧气的速率依赖于空气中氧气的分压, 假设空气中氧气的含量是已知的, 通过边界溢出的氧气的速率与水滴表面氧气的含量成正比. 类似于文献 [16], 给出如下 Robin 边界条件:

$$\left.\frac{\partial c}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=-a_1(x)c(x,t)+a_2(x,t),$$

其中 $a_1\in C^\infty(\partial\Omega)$, $a_2\in C^\infty(\partial\Omega\times[0,+\infty))$, $a_1>0$ 是氧气溢出的速率, $a_2\geqslant 0$ 是进入的氧气的数量. 易得存在 $g_1\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g_2\in C^\infty(\overline{\Omega}\times[0,+\infty))$ 使得

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial\nu}=-a_1(x),\quad g_2(x,t)=\frac{a_2}{a_1}\quad 且\quad \frac{\partial g_2(x,t)}{\partial\nu}=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,+\infty).$$

综上, 给出如下边界条件:

$$\frac{\partial n^m}{\partial\nu}-\chi n\frac{\partial c}{\partial\nu}=0,\quad \frac{\partial c}{\partial\nu}=\frac{\partial g_1(x)}{\partial\nu}(c(x,t)-g_2(x,t)),\quad u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,+\infty). \tag{1.6}$$

本文假设下式成立:

$$\begin{cases} n_0\in C(\overline{\Omega}),\quad n_0\geqslant 0,\\ c_0\in W^{1,\infty}(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega),\quad \forall p>1,\quad c_0\geqslant 0,\\ u_0\in D(A^\beta),\quad \beta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right),\\ \varphi\in W^{1,\infty}(\Omega), \end{cases} \tag{1.7}$$

其中 A 为 Dirichlet 齐次边界下的 Stokes 算子.

在给出本文主要结论之前, 先给出弱解的定义.

定义 1.1 称 $(n,c,u,\pi)\in\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\times\mathcal{X}_3\times\mathcal{X}_4$ 为问题 (1.1)、(1.5) 和 (1.6) 的弱解, 如果 $n\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, 且对任意的 $T>0$, 对任意的 $\psi,\Phi\in C^\infty(\overline{Q}_T)$, 且 $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}|_{\partial\Omega}=\Phi|_{\partial\Omega}=0$, $\psi(x,T)=\Phi(x,T)=0$, 下面的积分等式成立:

$$
\begin{aligned}
&-\iint_{Q_T} n\psi_t dxdt-\int_\Omega n(x,0)\psi(x,0)dx-\iint_{Q_T} nu\cdot\nabla\psi dxdt=-\iint_{Q_T}(\nabla n^m-\chi n\nabla c)\cdot\nabla\psi dxdt,\\
&-\iint_{Q_T} c\psi_t dxdt-\int_\Omega c(x,0)\psi(x,0)dx-\iint_{Q_T} cu\cdot\nabla\psi dxdt\\
&\quad=\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial g_1(x)}{\partial\nu}(c(x,t)-g_2(x,t))\psi dSdt-\iint_{Q_T}\nabla c\cdot\nabla\psi dxdt-\iint_{Q_T} cn\psi dxdt,\\
&-\iint_{Q_T} u\Phi_t dxdt-\int_\Omega u(x,0)\Phi(x,0)dx-\iint_{Q_T} u\otimes u\cdot\nabla\Phi dxdt\\
&\quad=-\iint_{Q_T}\nabla\pi\cdot\Phi dxdt-\iint_{Q_T}\nabla u\cdot\nabla\Phi dxdt+\iint_{Q_T} n\nabla\varphi\cdot\Phi dxdt,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{X}_1=\left\{n\in L^\infty(\Omega\times[0,\infty));n^r\nabla n\in L^2(Q_T),\forall T>0,r>\frac{m-2}{2}\right\},\\
&\mathcal{X}_2=\{c\in L^\infty((0,\infty);W^{1,\infty}(\Omega));c\in W_p^{2,1}(Q_T),\forall T>0,p>0\},\\
&\mathcal{X}_3=\left\{u\in L^\infty(\Omega\times[0,\infty));\Delta u,u_t\in L^2(Q_T),A^\beta u\in L^\infty((0,\infty);L^2(\Omega)),\forall T>0,\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right)\right\},\\
&\mathcal{X}_4=\{\pi\in L^2(Q_T);\nabla\pi\in L^2(Q_T),\forall T>0\}.
\end{aligned}
$$

下面给出本文的主要定理.

定理 1.1 假设 $m>1$, 且 (1.7) 成立, 则问题 (1.1)、(1.5) 和 (1.6) 存在全局有界弱解 $(n,c,u,\pi)\in\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\times\mathcal{X}_3\times\mathcal{X}_4$ 满足 $n,c\geqslant 0$, 且对任意的 $r>\frac{m-2}{2}$, 有

$$
\sup_{t\in\mathbb{R}^+}(\|n(\cdot,t)\|_{L^\infty}+\|c(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}}+\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty}+\|A^\beta u(\cdot,t)\|_{L^2})\leqslant C_1, \tag{1.8}
$$

$$
\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_t^{t+1}\left(\|n^r\nabla n\|_{L^2}^2+\|c\|_{W^{2,p}}^p+\|u\|_{W^{2,2}}^2+\|c_t\|_{L^p}^p+\|u_t\|_{L^2}^2\right)ds\leqslant C_2, \tag{1.9}
$$

其中常数 C_1 和 C_2 仅依赖于 n_0、c_0、u_0、Ω、χ、μ、g_1 和 g_2.

进一步, 对上面得到的解, 如果 $m\leqslant 2$, 则也可得到如下更高的正则性, 即如果 $m\leqslant 2$, $\nabla n_0^m,\Delta c_0\in L^2(\Omega)$, 则存在常数 C_3 和 C_4 使得

$$
\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_\Omega|\Delta\tilde{c}|^2dx+\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_t^{t+1}\int_\Omega|\nabla\tilde{c}_t|^2dxds\leqslant C_3, \tag{1.10}
$$

$$
\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_\Omega|\nabla n^m|^2dx+\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_t^{t+1}\int_\Omega n^{m-1}|n_t|^2dxds\leqslant C_4. \tag{1.11}
$$

接下来考虑线性扩散情形, 并有如下结果.

定理 1.2 假设 (1.7) 成立, $m=1$, $g_2=0$, 且 $\nabla n_0\in L^2$, 则问题 (1.1)、(1.5) 和 (1.6) 存在唯一全局有界的古典解 (n,c,u,π) 满足 $n,c\geqslant 0$, 且存在正常数 $\sigma\in(0,1)$ 使得

$$\begin{aligned}
&n\in C^0(\overline{\Omega}\times[0,\infty))\cap C^{2+\sigma,1+\frac{\sigma}{2}}(\Omega\times(0,\infty)),\\
&c\in C^0(\overline{\Omega}\times[0,\infty))\cap C^{2+\sigma,1+\frac{\sigma}{2}}(\Omega\times(0,\infty)),\\
&u\in C^0(\overline{\Omega}\times[0,\infty))\cap C^{2+\sigma,1+\frac{\sigma}{2}}(\Omega\times(0,\infty)),\\
&\pi\in C^0(\overline{\Omega}\times[0,\infty))\cap C^{1+\sigma,\frac{\sigma}{2}}(\Omega\times(0,\infty)).
\end{aligned}$$

进一步, 有如下一致有界性结论:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}(\|n(\cdot,t)\|_{L^\infty}+\|\nabla n(\cdot,t)\|_{L^2}+\|c(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}}+\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty}+\|A^\beta u(\cdot,t)\|_{L^2})\leqslant C, \tag{1.12}$$

其中 C 仅依赖于 n_0、c_0、u_0、Ω、χ、μ 和 g_1.

2 预备知识

首先给出一些本文常用的记号.

记号 $\|\cdot\|_{L^p}:=\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. 矢量函数 $\phi=(\phi_1,\dots,\phi_n)\in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ 表示 $\phi\in C^\infty_0(\Omega)$ 且满足 $\mathrm{div}\phi=0$. $L^r_\sigma(\Omega)$ 表示 $C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ 在 $L^r(\Omega)$ 中的闭包. 由文献 [17] 可知, 每个 $u\in L^r$ 可唯一分解为

$$u=v+\nabla p,\quad v\in L^r_\sigma,\quad \nabla p\in G^r,$$

其中 $G^r=\{\nabla p;\nabla p\in L^r;p\in L^r_{\mathrm{loc}}\}$, $P:L^r(\Omega)\to L^r_\sigma(\Omega)$ 被称为 Helmholtz 投影. 令 $A\omega:=-P\Delta\omega$, 则 A 在 L^r_σ 上生成一个有界的解析半群 $\{\mathrm{e}^{-tA}\}_{t\geqslant 0}$, (1.1) 的解 u 可以表示为

$$u=\mathrm{e}^{-tA}u_0+\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-s)A}P(n(s)\nabla\varphi(s))ds. \tag{2.1}$$

更多细节可参见文献 [18,19].

本文令 C、C_i、$\tilde{C}$ 和 M 表示一些常数, 如无特殊说明, 它们至多依赖于 μ、m、χ、Ω,、$\nabla\varphi$、n_0、c_0 和 u_0.

下面给出一些预备引理. 由文献 [20] 可得如下引理.

引理 2.1 令 $T>0$, $\tau\in(0,T)$, $\alpha>0$, $\beta>0$, 假设 $f:[0,T)\to[0,\infty)$ 绝对连续且满足

$$f'(t)-g(t)f(t)+f^{1+\sigma}(t)\leqslant h(t),\quad t\in\mathbb{R},$$

其中 $\sigma>0$ 是一个常数, $g(t),h(t)\geqslant 0$ 且 $g(t),h(t)\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,T))$,

$$\int_{t-\tau}^t g(s)ds\leqslant\alpha,\quad \int_{t-\tau}^t h(s)ds\leqslant\beta,\quad \forall\, t\in[\tau,T),$$

则

$$\sup_t f(t)\leqslant\sigma\left(\frac{2A}{1+\sigma}\right)^{\frac{1+\sigma}{\sigma}}+2B,$$

其中

$$A=\tau^{-\frac{1}{1+\sigma}}(1+\alpha)^{\frac{1}{1+\sigma}}\mathrm{e}^{2\alpha},\quad B=\tau^{-\frac{1}{1+\sigma}}\beta^{\frac{1}{1+\sigma}}\mathrm{e}^{2\alpha}+2\beta\mathrm{e}^{2\alpha}+f(0)\mathrm{e}^{\alpha}.$$

特别地, 如果还已知 $\sup_{t\in(\tau,T)}\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}f(s)ds\leqslant\gamma$, 则对方程 $f'(t)-g(t)f(t)\leqslant h(t)$, $t\in\mathbb{R}$, 也有

$$\sup_{t\in(0,T)}f(t)\leqslant(\gamma+\beta)\mathrm{e}^{\alpha}.$$

由文献 [21] 可得如下引理.

引理 2.2 假设 $u_0\in W^{2,p}(\Omega)$, $f\in L^p_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);L^p(\Omega))$ 且 $\sup_{t\in(\tau,+\infty)}\int_{t-\tau}^{t}\|f\|^p_{L^p}ds\leqslant A$, 其中 $\tau>0$ 是固定的常数, 则问题

$$\begin{cases}u_t-\Delta u+u=f(x,t),\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=0,\\ u(x,0)=u_0(x)\end{cases}\tag{2.2}$$

存在唯一解 u 使得 $u\in L^p_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);W^{2,p}(\Omega))$, $u_t\in L^p_{\mathrm{loc}}([0,+\infty);L^p(\Omega))$ 且

$$\sup_{t\in(\tau,+\infty)}\int_{t-\tau}^{t}(\|u\|^p_{W^{2,p}}+\|u_t\|^p_{L^p})ds\leqslant AM\frac{\mathrm{e}^{p\tau}}{\mathrm{e}^{\frac{p}{2}\tau}-1}+M\mathrm{e}^{\frac{p}{2}\tau}\|u_0\|^p_{W^{2,p}},\tag{2.3}$$

其中 M 是不依赖于 τ 的正常数.

由文献 [4] 可得如下引理.

引理 2.3 假设 $h\in C^2(\mathbb{R})$, 则对所有的 $\varphi\in C^2(\overline{\Omega})$ 满足在边界 $\partial\Omega$ 上 $\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}=0$, 有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega h'(\varphi)|\nabla\varphi|^2\Delta\varphi dx+\frac{2}{3}\int_\Omega h(\varphi)|\Delta\varphi|^2dx\\&\quad=\frac{2}{3}\int_\Omega h(\varphi)|\nabla^2\varphi|^2dx-\frac{1}{3}\int_\Omega h''(\varphi)|\nabla\varphi|^4dx-\frac{1}{3}\int_{\partial\Omega}h(\varphi)\frac{\partial|\nabla\varphi|^2}{\partial\boldsymbol{n}}ds,\end{aligned}\tag{2.4}$$

以及

$$\int_\Omega\frac{|\nabla\varphi|^4}{\varphi^3}dx\leqslant(2+\sqrt{N})^2\int_\Omega\varphi|\nabla^2\ln\varphi|^2dx.\tag{2.5}$$

由文献 [22], 也有如下引理.

引理 2.4 假设 Ω 为有界区域, 令 $\omega\in C^2(\overline{\Omega})$ 且 $\frac{\partial\omega}{\partial\nu}|_{\partial\Omega}=0$, 则

$$\frac{\partial|\nabla\omega|^2}{\partial\nu}\leqslant2\kappa|\nabla\omega|^2,\quad\text{在边界 }\partial\Omega\text{ 上},$$

其中 $\kappa>0$ 是 Ω 的曲率的上界.

3 慢扩散情形非齐次边值问题解的存在性

本节考虑 $m>1$ 时非齐次边值问题解的存在性和有界性. 由于模型中氧气浓度 c 的边界条件是非齐次的, 故而 Neumann 热半群理论不能直接应用. 因此, 作为一种常用技巧, 借鉴文献 [16], 首先通过一个变换把 c 的边界化为齐次的.

令

$$\tilde{c}=\mathrm{e}^{-g_1}(c-g_2).$$

注意到 $\frac{\partial g_2}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}=0$, 则

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega}=-\mathrm{e}^{-g_1}\frac{\partial g_2}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega}=0.$$

方程 (1.1)、(1.5) 和 (1.6) 化为如下形式:

$$\begin{cases} n_t+u\cdot\nabla n=\Delta n^m-\chi\nabla\cdot(\mathrm{e}^{g_1}n\nabla\tilde{c}+\mathrm{e}^{g_1}n\tilde{c}\nabla g_1+n\nabla g_2),\\ \tilde{c}_t-\Delta\tilde{c}+(u-2\nabla g_1)\cdot\nabla\tilde{c}\\ \quad=(|\nabla g_1|^2+\Delta g_1-n-u\cdot\nabla g_1)\tilde{c}+\mathrm{e}^{-g_1}(\Delta g_2-u\cdot\nabla g_2-ng_2-g_{2t}),\\ u_t+u\cdot\nabla u=\Delta u-\nabla\pi+n\nabla\varphi,\\ \nabla\cdot u=0,\quad (x,t)\in Q,\\ \dfrac{\partial n^m}{\partial\nu}-\chi\mathrm{e}^{g_1}n\tilde{c}\dfrac{\partial g_1}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega}=\dfrac{\partial\tilde{c}}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega}=0,\quad u|_{\partial\Omega}=0,\quad t>0,\\ n(x,0)=n_0(x),\quad \tilde{c}(x,0)=\tilde{c}_0(x),\quad u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega. \end{cases}\tag{3.1}$$

考虑 (3.1) 的逼近问题

$$\begin{cases} n_{\varepsilon t}+u_\varepsilon\cdot\nabla n_\varepsilon=\Delta((n_\varepsilon+\varepsilon)^{m-1}n_\varepsilon)-\chi\nabla\cdot(\mathrm{e}^{g_1}n_\varepsilon\nabla\tilde{c}_\varepsilon+\mathrm{e}^{g_1}n_\varepsilon\tilde{c}_\varepsilon\nabla g_1+n_\varepsilon\nabla g_2),\\ \tilde{c}_{\varepsilon t}-\Delta\tilde{c}_\varepsilon+(u_\varepsilon-2\nabla g_1)\cdot\nabla\tilde{c}_\varepsilon\\ \quad=(|\nabla g_1|^2+\Delta g_1-n_\varepsilon-u_\varepsilon\cdot\nabla g_1)\tilde{c}_\varepsilon+\mathrm{e}^{-g_1}(\Delta g_2-u_\varepsilon\cdot\nabla g_2-n_\varepsilon g_2-g_{2t}),\\ u_{\varepsilon t}+u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon=\Delta u_\varepsilon-\nabla\pi_\varepsilon+n_\varepsilon\nabla\varphi,\\ \nabla\cdot u_\varepsilon=0,\quad (x,t)\in Q,\\ \dfrac{\partial(n_\varepsilon+\varepsilon)^{m-1}n_\varepsilon}{\partial\nu}-\chi\mathrm{e}^{g_1}n_\varepsilon\tilde{c}_\varepsilon\dfrac{\partial g_1}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega}=\dfrac{\partial\tilde{c}_\varepsilon}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega}=0,\quad u_\varepsilon|_{\partial\Omega}=0,\quad t>0,\\ n_\varepsilon(x,0)=n_{\varepsilon0}(x),\quad \tilde{c}_\varepsilon(x,0)=\tilde{c}_{\varepsilon0}(x),\quad u_\varepsilon(x,0)=u_{\varepsilon0}(x),\quad x\in\Omega, \end{cases}\tag{3.2}$$

其中

$$\begin{cases} n_{\varepsilon0},\tilde{c}_{\varepsilon0},\quad u_{\varepsilon0}\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega),\\ n_{\varepsilon0}\to u_0,\quad \tilde{c}_{\varepsilon0}\to\tilde{c}_0,\quad u_{\varepsilon0}\to u_0\quad \text{一致收敛},\\ \|n_{\varepsilon0}\|_{L^\infty}+\|\nabla n_{\varepsilon0}^m\|_{L^2}+\|\tilde{c}_{\varepsilon0}\|_{W^{2,\infty}}+\|u_{\varepsilon0}\|_{W^{2,\infty}}\\ \quad\leqslant 2(\|n_0\|_{L^\infty}+\|\nabla n_0^m\|_{L^2}+\|\tilde{c}_0\|_{W^{2,\infty}}+\|u_0\|_{W^{2,\infty}}). \end{cases}\tag{3.3}$$

利用经典的不动点方法可得如下古典解的局部存在性定理. 证明都是标准的, 不再给出, 也可参见文献 [4,16].

引理 3.1　假设 (3.3) 成立, 则存在 $T_{\max}\in(0,+\infty]$ 使得问题 (3.2) 存在唯一的经典解 $(n_\varepsilon,\tilde{c}_\varepsilon,u_\varepsilon,\pi_\varepsilon)$ 满足 $(n_\varepsilon,\tilde{c}_\varepsilon,u_\varepsilon)\in C(\overline{\Omega}\times[0,T_{\max}))\cap C^{2,1}(\Omega\times(0,T_{\max}))$, $\pi_\varepsilon\in C(\overline{\Omega}\times[0,T_{\max}))\cap C^{1,0}(\Omega\times(0,T_{\max}))$,

$$n_\varepsilon\geqslant 0,\quad c_\varepsilon\geqslant 0,\quad \forall\,(x,t)\in\Omega\times(0,T_{\max}),$$

且要么 $T_{\max}=\infty$, 要么存在 $\beta\in(\frac{1}{2},1)$, 使得

$$\limsup_{t\nearrow T_{\max}}\big(\|n_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty}+\|\tilde{c}_\varepsilon\|_{W^{1,\infty}}+\|A^\beta u\|_{L^2}\big)=\infty.$$

接下来证明解的整体存在性. 首先, 直接计算易得如下结论.

引理 3.2 假设条件 (3.3) 成立. 令 $(n_\varepsilon,\tilde{c}_\varepsilon,u_\varepsilon,\pi_\varepsilon)$ 为问题 (3.2) 的经典解, 则存在常数 $C>0$ 使得

$$\|n_\varepsilon\|_{L^1}\equiv\|n_{\varepsilon0}\|_{L^1}, \tag{3.4}$$

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|\tilde{c}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty}\leqslant C, \tag{3.5}$$

其中 C 不依赖于 ε、$T_{\max}$ 和 τ.

证明 对问题 (3.2) 的第一个方程直接积分可得 (3.4). 注意到 $\frac{\partial g_1}{\partial\nu}|_{\partial\Omega}=-a_1<0$, 则由极值原理易得 $\|c_\varepsilon\|_{L^\infty}\leqslant\max\{\|c_{\varepsilon0}\|_{L^\infty},\|g_2\|_{L^\infty(\partial\Omega\times\mathbb{R}^+)}\}$. 故而 $\tilde{c}_\varepsilon$ 一致有界. 证毕. □

接下来估计 u_ε, 可得如下引理.

引理 3.3 假设 (3.3) 成立. 令 $(n_\varepsilon,\tilde{c}_\varepsilon,u_\varepsilon,\pi_\varepsilon)$ 为问题 (3.2) 的古典解, 则对任意的 $1<q<4$, 可得

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|u_\varepsilon\|_{L^2}^2+\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t\|u_\varepsilon\|_{H^1}^2ds\leqslant C_1\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t\|n_\varepsilon\|_{L^q}^{\frac{q}{2}}ds+C_2, \tag{3.6}$$

其中 C_1 和 C_2 是不依赖于 ε、$T_{\max}$ 和 τ 的正常数.

证明 在 (3.2) 的第 3 个方程两边同乘以 u_ε 后在 Ω 上积分, 则对任意的 $p\in(1,4)$, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_\varepsilon^2dx+\int_\Omega|\nabla u_\varepsilon|^2dx&=\int_\Omega n_\varepsilon\nabla\varphi\cdot u_\varepsilon dx\\&\leqslant\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\|n_\varepsilon\|_{L^p}\|u_\varepsilon\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}\\&\leqslant C\|n_\varepsilon\|_{L^p}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}\\&\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}^2+C\|n_\varepsilon\|_{L^p}^2,\end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_\varepsilon^2dx+\int_\Omega|\nabla u_\varepsilon|^2dx\leqslant C\|n_\varepsilon\|_{L^p}^2. \tag{3.7}$$

取 $q=5-\frac{4}{p}$, 易验证当 $1<p<4$ 时, $q>p$, 则可得

$$\|n_\varepsilon\|_{L^p}^2\leqslant C_1\|n_\varepsilon\|_{L^1}^{2-\frac{q}{2}}\|n_\varepsilon\|_{L^q}^{\frac{q}{2}}.$$

把上面的不等式代入 (3.7), 注意到

$$\int_\Omega|\nabla u_\varepsilon|^2dx\geqslant C\int_\Omega|u_\varepsilon|^2dx,$$

则由引理 2.1 即可得 (3.6). □

引理 3.4 假设 (3.3) 成立. 令 $(n_\varepsilon,\tilde{c}_\varepsilon,u_\varepsilon,\pi_\varepsilon)$ 为问题 (3.2) 的古典解, 则存在不依赖于 ε 的常数 C 使得

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|u_\varepsilon\|_{H^1}^2+\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t(\|u_\varepsilon\|_{H^2}^2+\|u_{\varepsilon t}\|_{L^2}^2)ds\leqslant C, \tag{3.8}$$

且对任意的 $r>0$, 存在不依赖于 ε 的常数 C_r 使得

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|n_\varepsilon\|_{L^{r+1}}^{r+1}+\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega n_\varepsilon^{m+r-2}|\nabla n_\varepsilon|^2dxds\leqslant C_r. \tag{3.9}$$

证明 在 (3.2) 的第一个方程两端同乘以 n_ε^r 后在 Ω 上积分, 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega n_\varepsilon^{r+1}dx + r\int_\Omega n_\varepsilon^{m+r-2}|\nabla n_\varepsilon|^2dx \\
&\leqslant \chi r\int_\Omega n_\varepsilon^r(\mathrm{e}^{g_1}\nabla\tilde{c}_\varepsilon+\mathrm{e}^{g_1}\tilde{c}_\varepsilon\nabla g_1+\nabla g_2)\nabla n_\varepsilon dx \\
&\leqslant \frac{r}{2}\int_\Omega n_\varepsilon^{m+r-2}|\nabla n_\varepsilon|^2dx + C\int_\Omega n_\varepsilon^{r+2-m}|\nabla\tilde{c}_\varepsilon|^2dx + C\int_\Omega n_\varepsilon^{r+2-m}dx \\
&\leqslant \frac{r}{2}\int_\Omega n_\varepsilon^{m+r-2}|\nabla n_\varepsilon|^2dx + \eta\int_\Omega n_\varepsilon^{m+r+1}dx + C_\eta\int_\Omega |\nabla\tilde{c}_\varepsilon|^{\frac{2(r+m+1)}{2m-1}}dx + C_2\int_\Omega n_\varepsilon^{r+2-m}dx.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式、(3.4) 和 (3.5) 可得

$$
\begin{aligned}
\|n_\varepsilon\|_{L^{r+m+1}}^{r+m+1} &= \|n_\varepsilon^{\frac{m+r}{2}}\|_{L^{\frac{2(r+m+1)}{m+r}}}^{\frac{2(r+m+1)}{m+r}} \\
&\leqslant C_1\|\nabla n_\varepsilon^{\frac{m+r}{2}}\|_{L^2}^2\|n_\varepsilon^{\frac{m+r}{2}}\|_{L^{\frac{2}{m+r}}}^{\frac{2}{m+r}} + C_2\|n_\varepsilon\|_{L^1}^{m+r+1} \\
&\leqslant C_3\|\nabla n_\varepsilon^{\frac{m+r}{2}}\|_{L^2}^2 + C_4, \\
\|\nabla\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^{\frac{2(r+m+1)}{2m-1}}}^{\frac{2(r+m+1)}{2m-1}} &\leqslant C_5\|\Delta\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^{\frac{r+m+1}{2m-1}}}^{\frac{r+m+1}{2m-1}}\|\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty}^{\frac{r+m+1}{2m-1}} + C_6\|\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty}^{\frac{2(r+m+1)}{2m-1}}.
\end{aligned}
$$

把上面两个不等式代入 (3.10), 取 η 适当小, 则有

$$
\frac{1}{r+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega n_\varepsilon^{r+1}dx + \frac{r}{4}\int_\Omega n_\varepsilon^{m+r-2}|\nabla n_\varepsilon|^2dx + C\int_\Omega n_\varepsilon^{m+r+1}dx \leqslant C\int_\Omega |\Delta\tilde{c}_\varepsilon|^{\frac{r+m+1}{2m-1}}dx + C.
$$

利用引理 2.1, 进一步有

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|n_\varepsilon\|_{L^{r+1}}^{r+1} + \sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega (n_\varepsilon^{m+r-2}|\nabla n_\varepsilon|^2 + n_\varepsilon^{m+r+1})dxds \\
&\leqslant C\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega |\Delta\tilde{c}_\varepsilon|^{\frac{r+m+1}{2m-1}}dxds + C.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

由 (3.2) 的第二个方程可得

$$
\tilde{c}_{\varepsilon t}-\Delta\tilde{c}_\varepsilon+\tilde{c}_\varepsilon = -(u_\varepsilon-2\nabla g_1)\cdot\nabla\tilde{c}_\varepsilon+(|\nabla g_1|^2+\Delta g_1-n_\varepsilon-u_\varepsilon\cdot\nabla g_1+1)\tilde{c}_\varepsilon+\mathrm{e}^{-g_1}(\Delta g_2-u_\varepsilon\cdot\nabla g_2-n_\varepsilon g_2-g_{2t}).
$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式、引理 2.2 和 3.2, 有

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t\|\Delta\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^p}^p ds \\
&\leqslant C\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t(\|(u_\varepsilon-2\nabla g_1)\cdot\nabla\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^p}^p + \|(|\nabla g_1|^2+\Delta g_1-n_\varepsilon-u_\varepsilon\cdot\nabla g_1+1)\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^p}^p)ds \\
&\quad + C\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t(\|\mathrm{e}^{-g_1}(\Delta g_2-u_\varepsilon\cdot\nabla g_2-n_\varepsilon g_2-g_{2t})\|_{L^p}^p)ds + C \\
&\leqslant C\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t(\|u_\varepsilon\|_{L^{2p}}^p\|\nabla\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^{2p}}^p + \|\nabla\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^p}^p + \|n_\varepsilon\|_{L^p}^p + \|u_\varepsilon\|_{L^p}^p)ds + C \\
&\leqslant \tilde{C}\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t(\|u_\varepsilon\|_{L^{2p}}^p\|\Delta\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^p}^{\frac{p}{2}}\|\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty}^{\frac{p}{2}} + \|u_\varepsilon\|_{L^{2p}}^p + \|\Delta\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^{\frac{p}{2}}}^{\frac{p}{2}}\|\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^\infty}^{\frac{p}{2}} + \|n_\varepsilon\|_{L^p}^p)ds + C
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}\|\Delta\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^p}^p ds+\tilde{C}_1\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}(\|u_\varepsilon\|_{L^{2p}}^{2p}+\|n_\varepsilon\|_{L^p}^p)ds+\tilde{C}_2,$$

即

$$\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}\|\Delta\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^p}^p ds\leqslant 2\tilde{C}_1\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}(\|u_\varepsilon\|_{L^{2p}}^{2p}+\|n_\varepsilon\|_{L^p}^p)ds+2\tilde{C}_2. \tag{3.12}$$

把 (3.12) 代入 (3.11) 可得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|n_\varepsilon\|_{L^{r+1}}^{r+1}+\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}\int_\Omega(n_\varepsilon^{m+r-2}|\nabla n_\varepsilon|^2+n_\varepsilon^{m+r+1})dxds\\&\leqslant C\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}\int_\Omega(|u_\varepsilon|^{\frac{2(r+m+1)}{2m-1}}+|n_\varepsilon|^{\frac{r+m+1}{2m-1}})dxds+C.\end{aligned} \tag{3.13}$$

取 $r=3(m-1)$, 则

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|n_\varepsilon\|_{L^{3m-2}}^{3m-2}+\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}\int_\Omega n_\varepsilon^{4m-2}dxds\\&\leqslant C\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}\int_\Omega(|u_\varepsilon|^4+|n_\varepsilon|^2)dxds+C.\end{aligned} \tag{3.14}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式可得

$$\|u_\varepsilon\|_{L^4}^4\leqslant C_1\|u_\varepsilon\|_{L^2}^2\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}^2+C_2\|u_\varepsilon\|_{L^2}^4.$$

结合 (3.6) 并取 $q=2$ 可得

$$\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}\int_\Omega|u_\varepsilon|^4dxds\leqslant C\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}\|n_\varepsilon\|_{L^2}^2ds+C.$$

把该不等式代入 (3.14) 得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|n_\varepsilon\|_{L^{3m-2}}^{3m-2}+\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}\int_\Omega n_\varepsilon^{4m-2}dxds\\&\leqslant C\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}\int_\Omega|n_\varepsilon|^2dxds+C.\end{aligned}$$

注意到 $4m-2>2$, 则有

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|n_\varepsilon\|_{L^{3m-2}}^{3m-2}+\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}\int_\Omega n_\varepsilon^{4m-2}dxds\leqslant C. \tag{3.15}$$

再结合 (3.6), 进一步有

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|u_\varepsilon\|_{L^2}^2+\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^{t}\|u_\varepsilon\|_{H^1}^2ds\leqslant C. \tag{3.16}$$

把 Helmholtz 投影算子 P 作用到 (3.2) 的第 3 个方程上, 可得

$$u_{\varepsilon t}-\Delta u_\varepsilon+P(u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon)=P(n_\varepsilon\nabla\varphi). \tag{3.17}$$

在该方程两端同乘以 $-\Delta u_\varepsilon$ 后在 Ω 上积分, 利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式、(3.15) 和 (3.16) 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla u_\varepsilon|^2dx+\int_\Omega|\Delta u_\varepsilon|^2dx&=-\int_\Omega P(n_\varepsilon\nabla\varphi)\Delta u_\varepsilon dx+\int_\Omega P(u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon)\Delta u_\varepsilon dx\\&\leqslant\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\|n_\varepsilon\|_{L^2}\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2}+\|u_\varepsilon\|_{L^4}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^4}\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2}\\&\leqslant\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\|n_\varepsilon\|_{L^2}\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2}+\|u_\varepsilon\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\\&\leqslant\frac{1}{2}\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2}^2+C\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}^4+C.\end{aligned}$$

由 (3.16) 和引理 2.2 可得

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}\int_\Omega|\nabla u_\varepsilon|^2dx+\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t\|u_\varepsilon(\cdot,s)\|_{H^2}^2ds\leqslant C.\tag{3.18}$$

下面估计 $u_{\varepsilon t}$. 在 (3.17) 两端同乘以 $u_{\varepsilon t}$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla u_\varepsilon|^2dx+\int_\Omega|u_{\varepsilon t}|^2dx&=\int_\Omega P(n_\varepsilon\nabla\varphi)u_{\varepsilon t}dx+\int_\Omega P(u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon)u_{\varepsilon t}dx\\&\leqslant\frac{1}{2}\|u_{\varepsilon t}\|_{L^2}^2+C\|n_\varepsilon\|_{L^2}^2+C\|u_\varepsilon\|_{L^4}^2\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^4}^2\\&\leqslant\frac{1}{2}\|u_{\varepsilon t}\|_{L^2}^2+C\|n_\varepsilon\|_{L^2}^2+C\|u_\varepsilon\|_{H^1}^2\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2}\\&\leqslant\frac{1}{2}\|u_{\varepsilon t}\|_{L^2}^2+C\|n_\varepsilon\|_{L^2}^2+C\|u_\varepsilon\|_{H^1}^6+\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

结合 (3.16) 和 (3.18) 可得

$$\int_{t-\tau}^t\|u_{\varepsilon t}\|_{L^2}^2ds\leqslant C,$$

综上, 有 (3.8). 利用 Sobolev 嵌入不等式即有

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|u_\varepsilon\|_{L^q}\leqslant C,\quad\forall\,q>1.$$

把该不等式代入 (3.13), 同时注意到 $\frac{r+m+1}{2m-1}<r+m+1$, 则 (3.9) 成立. □

由引理 3.4, 利用 Neumann 热半群理论, 结合 Moser 迭代技巧 (参见文献 [20]), 进一步可得如下引理.

引理 3.5 假设 (3.3) 成立. 令 $(n_\varepsilon,\tilde{c}_\varepsilon,u_\varepsilon,\pi_\varepsilon)$ 为问题 (3.2) 的古典解, 则

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}(\|\tilde{c}_\varepsilon\|_{W^{1,\infty}}+\|n_\varepsilon\|_{L^\infty}+\|u_\varepsilon\|_{L^\infty}+\|A^\beta u\|_{L^2})\leqslant C,\quad\forall\,\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right),$$

其中 C 不依赖于 ε、$T_{\max}$ 和 τ.

由引理 3.1, 问题 (3.2) 存在全局古典解, 即 $T_{\max}=\infty$. 接下来, 证明原问题解的整体存在性, 先证明如下引理.

引理 3.6 假设 (3.3) 成立. 令 $(n_\varepsilon,\tilde{c}_\varepsilon,u_\varepsilon,\pi_\varepsilon)$ 为问题 (3.2) 的古典解, 则对任意的 $p>0$, 有

$$\sup_{t\in(1,T_{\max})}\int_{t-1}^t(\|\tilde{c}_{\varepsilon t}\|_{L^p}^p+\|\Delta\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^p}^p)ds\leqslant C,\tag{3.19}$$

对任意的 $r \geqslant m-2$, 有

$$\sup_{t\in(1,T_{\max})}\int_{t-1}^{t}\int_{\Omega} n_\varepsilon^r|\nabla n_\varepsilon|^2 dxds \leqslant C, \tag{3.20}$$

且

$$\sup_{t\in(1,T_{\max})}\int_{t-1}^{t}\|n_{\varepsilon t}\|_{H^{-1}}^2 ds \leqslant C, \tag{3.21}$$

其中这些常数 C 均不依赖于 ε.

证明 (3.19) 可直接由引理 2.2 和 3.5 得到. 接下来证明 (3.20) 和 (3.21).

在 (3.2) 的第一个方程两端同乘以 $1+\ln n_\varepsilon$ 后在 Ω 上积分, 得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega n_\varepsilon \ln n_\varepsilon dx + \int_\Omega ((m-1)(n_\varepsilon+\varepsilon)^{m-2} + (n_\varepsilon+\varepsilon)^{m-1}n_\varepsilon^{-1})|\nabla n_\varepsilon|^2 dx\\
&\quad\leqslant \chi\int_\Omega(\mathrm{e}^{g_1}\nabla\tilde{c}_\varepsilon + \mathrm{e}^{g_1}\tilde{c}_\varepsilon\nabla g_1 + \nabla g_2)\nabla n_\varepsilon dx\\
&\quad= \chi\int_{\partial\Omega} n_\varepsilon \mathrm{e}^{g_1}\tilde{c}_\varepsilon\nabla g_1\cdot\nu ds - \chi\int_\Omega(\nabla\cdot(\mathrm{e}^{g_1}\nabla\tilde{c}_\varepsilon) + \nabla\cdot(\mathrm{e}^{g_1}\tilde{c}_\varepsilon\nabla g_1) + \Delta g_2)n_\varepsilon dx\\
&\quad\leqslant C(1+\|\Delta\tilde{c}_\varepsilon\|_{L^1}).
\end{aligned}$$

利用 (3.19), 直接积分可得

$$\sup_{t\in(1,T_{\max})}\int_{t-1}^{t}\int_\Omega((m-1)(n_\varepsilon+\varepsilon)^{m-2} + (n_\varepsilon+\varepsilon)^{m-1}n_\varepsilon^{-1})|\nabla n_\varepsilon|^2 dxds \leqslant C,$$

即

$$\sup_{t\in(1,T_{\max})}\int_{t-1}^{t}\int_\Omega n_\varepsilon^{m-2}|\nabla n_\varepsilon|^2 dxds \leqslant C.$$

由引理 3.5, n_ε 一致有界, 则 (3.20) 成立. 再由引理 3.5, n_ε、u_ε 和 ∇c_ε 一致有界, 可得

$$\begin{aligned}
\|n_\varepsilon\|_{H^{-1}}^2 &\leqslant \|u_\varepsilon n_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\nabla((n_\varepsilon+\varepsilon)^{m-1}n_\varepsilon)\|_{L^2}^2 + \|\chi(\mathrm{e}^{g_1}n_\varepsilon\nabla\tilde{c}_\varepsilon + \mathrm{e}^{g_1}n_\varepsilon\tilde{c}_\varepsilon\nabla g_1 + n_\varepsilon\nabla g_2)\|_{L^2}^2\\
&\leqslant C + \|m(n_\varepsilon+\varepsilon)^{m-1}\nabla n_\varepsilon\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

则 (3.21) 可由 (3.20) 直接得到. □

定理 1.1 的证明 既然 $(n_\varepsilon,\tilde{c}_\varepsilon,u_\varepsilon,\pi_\varepsilon)$ 是 (3.2) 的古典解, 由引理 3.4–3.6 得, 存在 $\{(n_\varepsilon,\tilde{c}_\varepsilon,u_\varepsilon,\pi_\varepsilon)\}$ 的子列, 为简单起见, 仍记为 $\{(n_\varepsilon,\tilde{c}_\varepsilon,u_\varepsilon,\pi_\varepsilon)\}$, 使得

$$\begin{aligned}
&\tilde{c}_\varepsilon \to \tilde{c}, \quad \text{一致地},\\
&\tilde{c}_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{c}, \quad \text{在 } W_p^{2,1}(Q_T) \text{ 意义下, 对任意的 } p\in(1,+\infty),\\
&n_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} n, \quad \text{在 } L^\infty(Q_T) \text{ 意义下},\\
&u_\varepsilon \to u, \quad \text{在 } L^p(Q_T) \text{ 意义下, 对任意的 } p\in(1,+\infty),\\
&u_\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \text{在 } W_2^{2,1}(Q_T) \text{ 意义下},\\
&\nabla\pi_\varepsilon \rightharpoonup \nabla\pi, \quad \text{在 } L^2(Q_T) \text{ 意义下}.
\end{aligned}$$

注意到 n_ε 一致有界, 且有估计式 (3.20) 和 (3.21) 成立, 则由 Aubin-Lions 定理可得

$$n_\varepsilon \to n, \quad 在\ L^p(Q_T)\ 意义下, 对任意的\ p \in (1, +\infty).$$

注意到

$$\|n_\varepsilon + \varepsilon - n\|_{L^p} \leqslant \|n_\varepsilon + \varepsilon - n_\varepsilon\|_{L^p} + \|n_\varepsilon - n\|_{L^p} = \|\varepsilon\|_{L^p} + \|n_\varepsilon - n\|_{L^p},$$

则也有

$$n_\varepsilon + \varepsilon \to n, \quad 在\ L^p(Q_T)\ 意义下, 对任意的\ p \in (1, +\infty),$$

且 (1.8) 和 (1.9) 成立. 注意到 n_ε 和 n 一致有界, 则

$$|(\varepsilon + n_\varepsilon)^{m-1} n_\varepsilon - n^m| \leqslant |(\varepsilon + n_\varepsilon)^m - n^m| + |\varepsilon(\varepsilon + n_\varepsilon)^{m-1}| \leqslant C|\varepsilon + n_\varepsilon - n| + C\varepsilon,$$

因而,

$$(\varepsilon + n_\varepsilon)^{m-1} n_\varepsilon \to n^m, \quad 在\ L^p(Q_T)\ 中, 对任意的\ p \in (1, +\infty).$$

注意到 n_ε 对任意的 $\varphi \in C^\infty(\overline{Q}_T)$, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0$, $\varphi(x, T) = 0$ 满足

$$\begin{aligned}
&-\iint_{Q_T} n_\varepsilon \varphi_t dxdt - \int_\Omega n_\varepsilon(x, 0)\varphi(x, 0)dx - \iint_{Q_T} n_\varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi dxdt - \iint_{Q_T} (n_\varepsilon + \varepsilon)^{m-1} n_\varepsilon \Delta\varphi dxdt \\
&= \chi \iint_{Q_T} (\mathrm{e}^{g_1} n_\varepsilon \nabla\tilde{c}_\varepsilon + \mathrm{e}^{g_1} n_\varepsilon \tilde{c}_\varepsilon \nabla g_1 + n_\varepsilon \nabla g_2)\nabla\varphi dxdt.
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$, 则有

$$\begin{aligned}
&-\iint_{Q_T} n\varphi_t dxdt - \int_\Omega n(x, 0)\varphi(x, 0)dx - \iint_{Q_T} nu \cdot \nabla\varphi dxdt - \iint_{Q_T} n^m \Delta\varphi dxdt \\
&= \chi \iint_{Q_T} (\mathrm{e}^{g_1} n\nabla\tilde{c} + \mathrm{e}^{g_1} n\tilde{c}\nabla g_1 + n\nabla g_2)\nabla\varphi dxdt.
\end{aligned}$$

分部积分可得

$$\begin{aligned}
&-\iint_{Q_T} n\varphi_t dxdt - \int_\Omega n(x, 0)\varphi(x, 0)dx - \iint_{Q_T} nu \cdot \nabla\varphi dxdt + \iint_{Q_T} \nabla n^m \nabla\varphi dxdt \\
&= \chi \iint_{Q_T} (\mathrm{e}^{g_1} n\nabla\tilde{c} + \mathrm{e}^{g_1} n\tilde{c}\nabla g_1 + n\nabla g_2)\nabla\varphi dxdt.
\end{aligned}$$

类似地, 容易验证 $(n, \tilde{c}, u, \pi)$ 满足 (3.1) 中的其他方程.

接下来, 对 $m \leqslant 2$ 时的解 n 给出更高的正则性估计. 在 (3.1) 的第一个方程两端同乘以 $(n^m)_t$, 然后在 Ω 上积分, 注意到 n、$\tilde{c}$、$\nabla\tilde{c}$ 和 u 都是有界的, 则

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla n^m|^2 dx + m\int_\Omega n^{m-1}|n_t|^2 dx \\
&= \chi\int_\Omega \mathrm{e}^{g_1} n\tilde{c}\nabla g_1 \nabla(n^m)_t dx - m\int_\Omega n^{m-1} n_t u \cdot \nabla n dx - \chi m\int_\Omega n^{m-1} n_t \nabla \cdot (\mathrm{e}^{g_1} n\nabla\tilde{c} + n\nabla g_2)dx \\
&\leqslant \chi\int_{\partial\Omega} (n^m)_t \mathrm{e}^{g_1} n\tilde{c}\nabla g_1 \cdot \nu dS - \chi\int_\Omega (n^m)_t \nabla \cdot (\mathrm{e}^{g_1} n\tilde{c}\nabla g_1)dx + \frac{m}{4}\int_\Omega n^{m-1}|n_t|^2 dx \\
&\quad + C\int_\Omega n^{m-1}|\nabla n|^2 dx + C\int_\Omega |\Delta c|^2 dx + C
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \chi\frac{m}{m+1}\frac{d}{dt}\int_{\partial\Omega} n^{m+1}\mathrm{e}^{g_1}\tilde{c}\nabla g_1\cdot\nu dS-\chi\frac{m}{m+1}\int_{\partial\Omega}(n^{m+1}\tilde{c}_t\mathrm{e}^{g_1}\nabla g_1\cdot\nu+n^{m+1}\tilde{c}(\mathrm{e}^{g_1}\nabla g_1\cdot\nu)_t)dS\\
&\quad-\chi\int_\Omega mn^{m-1}n_t(\mathrm{e}^{g_1}\tilde{c}\nabla g_1)\cdot\nabla ndx-\chi\int_\Omega mn^m n_t\nabla(\mathrm{e}^{g_1}\tilde{c}\nabla g_1)dx\\
&\quad+\frac{m}{4}\int_\Omega n^{m-1}|n_t|^2dx+C\int_\Omega n^{m-1}|\nabla n|^2dx+C\int_\Omega|\Delta c|^2dx+C\\
&\leqslant \chi\frac{m}{m+1}\frac{d}{dt}\int_{\partial\Omega} n^{m+1}\mathrm{e}^{g_1}\tilde{c}\nabla g_1\cdot\nu dS+C\int_{\partial\Omega}|\tilde{c}_t|ds+\frac{m}{2}\int_\Omega n^{m-1}|n_t|^2dx\\
&\quad+C\int_\Omega(n^{m-1}|\nabla n|^2+|\Delta c|^2)dx+C.
\end{aligned}
$$

由 (1.9) 可得

$$
\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_\Omega|\nabla n^m|^2dx+\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_t^{t+1}\int_\Omega n^{m-1}|n_t|^2dxds\leqslant C\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_t^{t+1}\int_{\partial\Omega}|\tilde{c}_t|dS+C. \tag{3.22}
$$

把 ∇ 作用到 (3.1) 的第二个方程两端后乘以 $\nabla\tilde{c}_t$, 注意到 $\nabla\tilde{c}_t\cdot\nu\,|_{\partial\Omega}=0$, 则有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\Delta\tilde{c}|^2dx+\int_\Omega|\nabla\tilde{c}_t|^2dx\\
&\quad=-\int_\Omega\nabla((u-2\nabla g_1)\cdot\nabla\tilde{c})\cdot\nabla\tilde{c}_tdx+\int_\Omega\nabla((|\nabla g_1|^2+\Delta g_1-n-u\cdot\nabla g_1)\tilde{c})\cdot\nabla\tilde{c}_tdx\\
&\qquad+\int_\Omega\nabla(\mathrm{e}^{-g_1}(\Delta g_2-u\cdot\nabla g_2-ng_2-g_{2t}))\cdot\nabla\tilde{c}_tdx\\
&\quad\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\tilde{c}_t|^2dx+C\int_\Omega|\Delta\tilde{c}|^2dx+C\int_\Omega|\nabla n|^2dx+C\int_\Omega|\nabla u|^2dx+C.
\end{aligned}
$$

利用 (1.9), 当 $m\leqslant 2$ 时, 可得如下结果:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_\Omega|\Delta\tilde{c}|^2dx+\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_t^{t+1}\int_\Omega|\nabla\tilde{c}_t|^2dxds\\
&\quad\leqslant C\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_t^{t+1}\int_\Omega(|\Delta\tilde{c}|^2+|\nabla u|^2)dxds+C\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_t^{t+1}\int_\Omega|\nabla n|^2dxds+C\\
&\quad\leqslant\tilde{C}.
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

利用该不等式和迹的嵌入不等式, 进一步可得

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_t^{t+1}\int_{\partial\Omega}|\tilde{c}_t|dS&\leqslant C\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_t^{t+1}(\|\nabla\tilde{c}_t\|_{L^2}+\|\tilde{c}_t\|_{L^2})ds\\
&\leqslant\tilde{C}\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_t^{t+1}(\|\nabla\tilde{c}_t\|_{L^2}^2+\|\tilde{c}_t\|_{L^2}^2+1)ds\\
&\leqslant C.
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

把 (3.24) 代入 (3.22) 可得 (1.11). 证毕. □

4 $m=1$ 的情形

本节考虑 $m=1$ 和 $\mu=0$ 时古典解的存在性. 假设 $g_2=0$, 即考虑齐次 Robin 边界条件. 类似于第 3 节, 令

$$
\tilde{c}=\mathrm{e}^{-g_1}c,
$$

则原始问题转化为如下形式:

$$
\begin{cases}
n_t + u\cdot\nabla n = \Delta n - \chi\nabla\cdot(\mathrm{e}^{g_1} n\nabla\tilde{c} + \mathrm{e}^{g_1} n\tilde{c}\nabla g_1), \quad (x,t)\in Q,\\
\tilde{c}_t - \Delta\tilde{c} + (u - 2\nabla g_1)\cdot\nabla\tilde{c} = (|\nabla g_1|^2 + \Delta g_1 - n - u\cdot\nabla g_1)\tilde{c}, \quad (x,t)\in Q,\\
u_t + u\cdot\nabla u = \Delta u - \nabla\pi + n\nabla\varphi, \quad (x,t)\in Q,\\
\nabla\cdot u = 0, \quad (x,t)\in Q,\\
\dfrac{\partial n}{\partial\nu} - \chi\mathrm{e}^{g_1} n\tilde{c}\dfrac{\partial g_1}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = \dfrac{\partial\tilde{c}}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\,|_{\partial\Omega} = 0,\\
n(x,0) = n_0(x), \quad \tilde{c}(x,0) = \tilde{c}_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\Omega.
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

假设

$$
\begin{cases}
n_0\in C(\overline{\Omega})\cap W^{1,p}(\Omega), \quad \forall\, 3<p<6, \quad n_0\geqslant 0,\\
c_0\in W^{1,\infty}(\Omega)\cap W^{2,\frac{5}{2}}(\Omega), \quad c_0\geqslant 0,\\
u_0\in D(A^{\beta}), \quad \beta\in(\frac{1}{2},1),\\
\varphi\in C^{1+\sigma}(\overline{\Omega}).
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

类似于第 3 节, 也有如下局部存在性引理.

引理 4.1 假设 (4.2) 成立, 则存在 $T_{\max}\in(0,\infty]$ 使得问题 (4.1) 存在古典解 $(n,\tilde{c},u,\pi)$ 使得 $n,\tilde{c}\geqslant 0$, 并且

$$
\begin{aligned}
&n\in C^0(\overline{\Omega}\times[0,T_{\max}))\cap C^{2+\sigma,1+\frac{\sigma}{2}}(\Omega\times(0,T_{\max})),\\
&\tilde{c}\in C^0(\overline{\Omega}\times[0,T_{\max}))\cap C^{2+\sigma,1+\frac{\sigma}{2}}(\Omega\times(0,T_{\max})),\\
&u\in C^0(\overline{\Omega}\times[0,T_{\max}))\cap C^{2+\sigma,1+\frac{\sigma}{2}}(\Omega\times(0,T_{\max})),\\
&\pi\in C^0(\overline{\Omega}\times[0,T_{\max}))\cap C^{1+\sigma,\frac{\sigma}{2}}(\Omega\times(0,T_{\max})),
\end{aligned}
$$

并有如下二则一结果, 即要么 $T_{\max}=\infty$, 要么

$$
\limsup_{t\to T_{\max}}(\|n(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\tilde{c}(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|A^{\beta}u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}) = \infty, \quad \forall\,\beta\in\left(\frac{1}{2},1\right).
$$

由以上局部存在性引理, 为了得到整体解的存在性, 只需做引理 4.1 中的先验估计. 首先易得

$$
\|n\|_{L^1}\equiv\|n_0\|_{L^1}. \tag{4.3}
$$

下面证明如下引理.

引理 4.2 假设 (4.2) 成立. 令 $(n,\tilde{c},u,\pi)$ 为问题 (4.1) 的古典解, 则存在常数 C 使得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\chi\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}} + \mathrm{e}^{-g_1}n\ln n\right)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{e}^{-g_1}\frac{|\nabla n|^2}{n}dx + \frac{\chi}{4}\int_\Omega\tilde{c}|\nabla^2\ln\tilde{c}|^2dx + \chi\int_\Omega\frac{n|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}dx\\
&\quad\leqslant C\int_\Omega u^4dx + C.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

证明 由 (4.1) 的第二个方程可得

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}dx = \int_\Omega\frac{\nabla\tilde{c}}{\tilde{c}}\cdot\nabla\tilde{c}_t dx - \frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}^2}\tilde{c}_t dx = -\int_\Omega\tilde{c}_t\frac{\Delta\tilde{c}}{\tilde{c}}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}^2}\tilde{c}_t dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_\Omega \frac{\Delta\tilde{c}}{\tilde{c}}(\Delta\tilde{c}-(u-2\nabla g_1)\cdot\nabla\tilde{c}+(|\nabla g_1|^2+\Delta g_1-n-u\cdot\nabla g_1)\tilde{c})dx \\
&\quad+\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}^2}(\Delta\tilde{c}-(u-2\nabla g_1)\cdot\nabla\tilde{c}+(|\nabla g_1|^2+\Delta g_1-n-u\cdot\nabla g_1)\tilde{c})dx \\
&= \int_\Omega \Big(-\frac{|\Delta\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}+\frac{\Delta\tilde{c}}{\tilde{c}}(u-2\nabla g_1)\cdot\nabla\tilde{c}-\Delta\tilde{c}(|\nabla g_1|^2+\Delta g_1-n-u\cdot\nabla g_1)\Big)dx \\
&\quad+\frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}^2}\Delta\tilde{c}-\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}^2}(u-2\nabla g_1)\cdot\nabla\tilde{c} \\
&\quad+\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}(|\nabla g_1|^2+\Delta g_1-n-u\cdot\nabla g_1)\Big)dx. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \tilde{c}|\nabla^2\ln\tilde{c}|^2dx &= \int_\Omega\Big(\frac{|\nabla^2\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}+\frac{|\nabla\tilde{c}|^4}{\tilde{c}^3}-2\frac{\nabla\tilde{c}\cdot\nabla^2\tilde{c}\cdot\nabla\tilde{c}}{\tilde{c}^2}\Big)dx \\
&= \int_\Omega\Big(\frac{|\nabla^2\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}+\frac{|\nabla\tilde{c}|^4}{\tilde{c}^3}-\frac{\nabla\tilde{c}\cdot\nabla|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}^2}\Big)dx \\
&= \int_\Omega\Big(\frac{|\nabla^2\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}+\frac{|\nabla\tilde{c}|^4}{\tilde{c}^3}+\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}^2}\Delta\tilde{c}-2\frac{|\nabla\tilde{c}|^4}{\tilde{c}^3}\Big)dx \\
&= \int_\Omega\Big(\frac{|\nabla^2\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}+\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}^2}\Delta\tilde{c}-\frac{|\nabla\tilde{c}|^4}{\tilde{c}^3}\Big)dx,
\end{aligned}
$$

由引理 2.3 结合上面的等式可得

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega\frac{|\Delta\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}+\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}^2}\Delta\tilde{c}dx \\
&= -\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}^2}\Delta\tilde{c}dx-\int_\Omega\frac{1}{\tilde{c}}|\nabla^2\tilde{c}|^2+\frac{1}{\tilde{c}^3}|\nabla\tilde{c}|^4dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\tilde{c}}\frac{\partial}{\partial\nu}|\nabla\tilde{c}|^2ds \\
&= -\int_\Omega\tilde{c}|\nabla^2\ln\tilde{c}|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\tilde{c}}\frac{\partial}{\partial\nu}|\nabla\tilde{c}|^2ds.
\end{aligned}
$$

把上面的等式代入 (4.5), 注意到 $\frac{\Delta\tilde{c}}{\tilde{c}}=\Delta\ln\tilde{c}+\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{|\tilde{c}|^2}$, 对充分小的 $\eta>0$, 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}dx+\int_\Omega\tilde{c}|\nabla^2\ln\tilde{c}|^2dx+\int_\Omega\frac{n|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}dx \\
&\quad= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\tilde{c}}\frac{\partial}{\partial\nu}|\nabla\tilde{c}|^2ds+\int_\Omega(\Delta\ln\tilde{c}\ (u-2\nabla g_1)\cdot\nabla\tilde{c}-\tilde{c}\Delta\ln\tilde{c}(|\nabla g_1|^2+\Delta g_1-u\cdot\nabla g_1))dx \\
&\qquad-\int_\Omega\nabla n\cdot\nabla\tilde{c}dx+\frac{1}{2}\int_\Omega\Big(\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}^2}(u-2\nabla g_1)\cdot\nabla\tilde{c}-\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}(|\nabla g_1|^2+\Delta g_1-u\cdot\nabla g_1)\Big)dx \\
&\quad\leqslant \kappa\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\tilde{c}}|\nabla\tilde{c}|^2ds-\int_\Omega\nabla n\cdot\nabla\tilde{c}dx+\frac{1}{4}\int_\Omega\tilde{c}|\nabla^2\ln\tilde{c}|^2dx+\eta\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^4}{|\tilde{c}|^3}dx+C\int_\Omega u^4dx+C. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

由边界迹的嵌入不等式, 对任意充分小的 $\eta_1>0$, 有

$$
\begin{aligned}
\kappa\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\tilde{c}}|\nabla\tilde{c}|^2ds &= \kappa\int_{\partial\Omega}|\tilde{c}^{\frac{1}{2}}\nabla\ln\tilde{c}|^2ds \\
&\leqslant \eta_1\kappa\int_\Omega|\nabla(\tilde{c}^{\frac{1}{2}}\nabla\ln\tilde{c})|^2dx+C_{\eta_1}\int_\Omega\tilde{c}|\nabla\ln\tilde{c}|^2dx \\
&\leqslant \eta_1\kappa\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\tilde{c}^{-\frac{1}{2}}\nabla\tilde{c}\nabla\ln\tilde{c}+\tilde{c}^{\frac{1}{2}}\nabla^2\ln\tilde{c}\Big)^2dx+C_{\eta_1}\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2\eta_1\kappa\int_\Omega\left(\tilde{c}|\nabla^2\ln\tilde{c}|^2+\frac{1}{4}\frac{|\nabla\tilde{c}|^4}{\tilde{c}^3}\right)dx+C_{\eta_1}\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}dx\\
&\leqslant 2\eta_1\kappa\int_\Omega\tilde{c}|\nabla^2\ln\tilde{c}|^2dx+\eta_1\kappa\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^4}{\tilde{c}^3}dx+C_{\eta_1}.
\end{aligned}\tag{4.7}
$$

联合 (4.6) 和 (4.7), 由引理 2.3, 取 η 和 η_1 适当小, 则有

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}dx+\frac{1}{2}\int_\Omega\tilde{c}|\nabla^2\ln\tilde{c}|^2dx+\int_\Omega\frac{n|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}dx\leqslant-\int_\Omega\nabla n\cdot\nabla\tilde{c}dx+C\int_\Omega u^4dx+C.\tag{4.8}
$$

在 (4.1) 的第一个方程两端乘以 $\mathrm{e}^{-g_1}(1+\ln n)$ 后在 Ω 上积分, 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega\mathrm{e}^{-g_1}n\ln ndx+\int_\Omega\mathrm{e}^{-g_1}\frac{|\nabla n|^2}{n}dx\\
&\quad=-\int_\Omega\mathrm{e}^{-g_1}g_{1t}n\ln ndx+\int_\Omega\mathrm{e}^{-g_1}(1+\ln n)\nabla n\cdot\nabla g_1dx-\int_\Omega n\ln n\mathrm{e}^{-g_1}u\cdot\nabla g_1dx\\
&\qquad+\chi\int_\Omega(\nabla\tilde{c}\cdot\nabla n-n(1+\ln n)\nabla\tilde{c}\cdot\nabla g_1+\tilde{c}\nabla g_1\cdot(\nabla n-n(1+\ln n)\nabla g_1))dx\\
&\quad\leqslant\chi\int_\Omega\nabla\tilde{c}\cdot\nabla ndx+\frac{1}{4}\int_\Omega\mathrm{e}^{-g_1}\frac{|\nabla n|^2}{n}dx+\eta_2\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^4}{\tilde{c}^3}dx+C\int_\Omega(|n\ln n|^{\frac{4}{3}}+|u|^4+1)dx,
\end{aligned}\tag{4.9}
$$

其中 $\eta_2>0$ 是任意小的常数. 由 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 可得

$$
\|n\|_{L^2}^2=\|\sqrt{n}\|_{L^4}^4\leqslant C_1\|\sqrt{n}\|_{L^2}^2\|\nabla\sqrt{n}\|_{L^2}^2+C_2\|n\|_{L^1}^2=C_1\|n\|_{L^1}\|\nabla\sqrt{n}\|_{L^2}^2+C_2\|n\|_{L^1}^2.\tag{4.10}
$$

把该不等式代入 (4.9), 注意到对任意充分小的常数 η, 都有 $|n\ln n|^{\frac{4}{3}}<\eta n^2+C_\eta$, 再利用引理 2.3 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega\mathrm{e}^{-g_1}n\ln ndx+\frac{1}{2}\int_\Omega\mathrm{e}^{-g_1}\frac{|\nabla n|^2}{n}dx\\
&\quad\leqslant\chi\int_\Omega\nabla\tilde{c}\cdot\nabla ndx+\eta_2\int_\Omega\frac{|\nabla\tilde{c}|^4}{\tilde{c}^3}dx+C\int_\Omega(|u|^4+1)dx\\
&\quad\leqslant\chi\int_\Omega\nabla\tilde{c}\cdot\nabla ndx+C\eta_2\int_\Omega\tilde{c}|\nabla^2\ln\tilde{c}|^2dx+C\int_\Omega(|u|^4+1)dx.
\end{aligned}\tag{4.11}
$$

联合 (4.8) 和 (4.11), 取 η_2 适当小可得 (4.4). 证毕. □

引理 4.3 假设 (4.2) 成立. 令 $(n,\tilde{c},u,\pi)$ 为问题 (4.1) 的局部古典解, 则

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in(0,T_{\max})}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\chi\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}+\mathrm{e}^{-g_1}n\ln n\right)dx\\
&\quad+\sup_{t\in(\tau,T_{\max})}\int_{t-\tau}^t\int_\Omega\left(\tilde{c}|\nabla^2\ln\tilde{c}|^2+\frac{|\nabla n|^2}{n}+\frac{n|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}+n^2\right)dxds\\
&\quad\leqslant C,
\end{aligned}\tag{4.12}
$$

其中 C 不依赖于 $T_{\max}$ 和 τ.

证明 由 (4.4), 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\chi\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}+\mathrm{e}^{-g_1}n\ln n\right)dx+\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\chi\frac{|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}+\mathrm{e}^{-g_1}n\ln n\right)dx\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_\Omega\mathrm{e}^{-g_1}\frac{|\nabla n|^2}{n}dx+\frac{1}{4}\int_\Omega\tilde{c}|\nabla^2\ln\tilde{c}|^2dx+\int_\Omega\frac{n|\nabla\tilde{c}|^2}{\tilde{c}}dx
\end{aligned}
$$

$$\leqslant C \int_\Omega u^4 dx + C.$$

利用引理 2.1, 可得

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\chi \frac{|\nabla \tilde{c}|^2}{\tilde{c}} + \mathrm{e}^{-g_1} n \ln n \right) dx + \sup_{t\in(\tau,T_{\max})} \int_{t-\tau}^t \int_\Omega \left(\tilde{c}|\nabla^2 \ln \tilde{c}|^2 + \frac{|\nabla n|^2}{n} + \frac{n|\nabla \tilde{c}|^2}{\tilde{c}} \right) dxds$$
$$\leqslant C \sup_{t\in(\tau,T_{\max})} \int_{t-\tau}^t \int_\Omega u^4 dxds + C. \tag{4.13}$$

容易验证 (3.6) 仍然成立. 由 (3.6), 可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in(\tau,T_{\max})} \int_{t-\tau}^t \int_\Omega u^4 dxds \\
&\leqslant C_1 \sup_{t\in(0,T_{\max})} \|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 \sup_{t\in(\tau,T_{\max})} \int_{t-\tau}^t \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 ds + C_2 \sup_{t\in(0,T_{\max})} \|u(\cdot,t)\|_{L^2}^4 \\
&\leqslant C \sup_{t\in(\tau,T_{\max})} \int_{t-\tau}^t \|n_\varepsilon\|_{L^q}^q ds + C, \quad \text{对任意的 } 1<q<4.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

把 (4.14) 代入 (4.13), 取 $q<2$, 注意到 (4.10), 该引理得证. □

由上述引理, 类似于引理 3.3 和 3.4, 可得如下结论.

引理 4.4 假设 (4.2) 成立. 令 $(n,\tilde{c},u,\pi)$ 为问题 (4.1) 的局部古典解, 则

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})} \|u\|_{H^1}^2 + \sup_{t\in(\tau,T_{\max})} \int_{t-\tau}^t (\|u\|_{H^2}^2 + \|u_t\|_{L^2}^2) ds \leqslant C, \tag{4.15}$$

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})} \|\tilde{c}\|_{H^1}^2 + \sup_{t\in(\tau,T_{\max})} \int_{t-\tau}^t (\|\tilde{c}\|_{H^2}^2 + \|\tilde{c}_t\|_{L^2}^2) ds \leqslant C, \tag{4.16}$$

其中 C 为不依赖于 $T_{\max}$ 和 τ 的常数.

接下来证明如下引理.

引理 4.5 假设 (4.2) 成立. 令 $(n,\tilde{c},u,\pi)$ 为问题 (4.1) 的局部古典解, 则

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})} \|n\|_{L^{r+1}}^{r+1} + \sup_{t\in(\tau,T_{\max})} \int_{t-\tau}^t \int_\Omega n^{r-1}|\nabla n|^2 dxds \leqslant C, \tag{4.17}$$

其中 C 为依赖于 r 但不依赖于 $T_{\max}$ 和 τ 的常数.

证明 在 (4.1) 的第一个方程两端同乘以 n^r 后在 Ω 上积分, 得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega n^{r+1}dx + r\int_\Omega n^{r-1}|\nabla n|^2 dx \\
&\leqslant \chi r \int_\Omega n^r (\mathrm{e}^{g_1}\nabla\tilde{c} + \mathrm{e}^{g_1}\tilde{c}\nabla g_1)\cdot\nabla n dx \\
&\leqslant \frac{r}{2}\int_\Omega n^{r-1}|\nabla n|^2 dx + C\int_\Omega n^{r+1}|\nabla\tilde{c}|^2 dx + C\int_\Omega n^{r+1}dx \\
&\leqslant \frac{r}{2}\int_\Omega n^{r-1}|\nabla n|^2 dx + C\|n^{\frac{r+1}{2}}\|_{L^4}^2 \|\nabla\tilde{c}\|_{L^4}^2 + C\int_\Omega n^{r+1}dx.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式可得

$$\|n^{\frac{r+1}{2}}\|_{L^4}^2 \leqslant C_1\|\nabla n^{\frac{r+1}{2}}\|_{L^2}\|n^{\frac{r+1}{2}}\|_{L^2} + C_2\|n\|_{L^1}^{r+1}, \quad \|\nabla\tilde{c}\|_{L^4}^2 \leqslant C_3\|\Delta\tilde{c}\|_{L^2}\|\tilde{c}\|_{L^\infty} + C_4\|\tilde{c}\|_{L^\infty}^2,$$

对任意小的 $\eta > 0$, 有

$$\|n\|_{L^{r+1}}^{r+1} = \|n^{\frac{1+r}{2}}\|_{L^2}^2 \leqslant C_5\|\nabla n^{\frac{1+r}{2}}\|_{L^2}^{\frac{r}{r+1}}\|n^{\frac{1+r}{2}}\|_{L^{\frac{2}{1+r}}}^{\frac{1}{1+r}} + C_6\|n\|_{L^1}^{r+1} \leqslant \eta\|\nabla n^{\frac{1+r}{2}}\|_{L^2}^2 + C_7.$$

把上面 3 个不等式代入 (4.18), 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega n^{r+1}dx + r\int_\Omega n^{r-1}|\nabla n|^2dx\\&\quad\leqslant \frac{r}{2}\int_\Omega n^{r-1}|\nabla n|^2dx + C_8\|n\|_{L^{r+1}}^{r+1}\|\Delta\tilde{c}\|_{L^2}^2 + C_9\|\Delta\tilde{c}\|_{L^2}^2 + C_{10}\int_\Omega n^{r+1}dx + C_{11}\\&\quad\leqslant \frac{3r}{4}\int_\Omega n^{r-1}|\nabla n|^2dx + C_8\|n\|_{L^{r+1}}^{r+1}\|\Delta\tilde{c}\|_{L^2}^2 + C_9\|\Delta\tilde{c}\|_{L^2}^2 + C_{12}.\end{aligned}\tag{4.19}$$

由引理 2.1 可得 (4.17). 证毕. □

由上述引理结合 Neumann 热半群理论和 Moser 迭代技巧 (参见文献 [20]), 可得如下引理.

引理 4.6 假设 (4.2) 成立. 令 $(n, \tilde{c}, u, \pi)$ 为问题 (4.1) 的古典解, 则

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}(\|\tilde{c}\|_{W^{1,\infty}} + \|n\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty} + \|A^\beta u\|_{L^2}) \leqslant C, \quad \text{对任意的 } \beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

其中 C 不依赖于 $T_{\max}$.

结合引理 4.1 和 4.6 立即可得定理 1.2.

参考文献

1 Keller E F, Segel L A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. J Theoret Biol, 1970, 26: 399–415
2 Tuval I, Cisneros L, Dombrowski C, et al. Bacterial swimming and oxygen transport near contact lines. Proc Natl Acad Sci USA, 2005, 102: 2277–2282
3 Kohr M, Pop I. Viscous Incompressible Flow for Low Reynolds Numbers. Advances in Boundary Elements Series 16. Southampton: WIT Press, 2004
4 Winkler M. Global large-data solutions in a chemotaxis-(Navier-)Stokes system modeling cellular swimming in fluid drops. Comm Partial Differential Equations, 2012, 37: 319–351
5 Liu J, Lorz A. A coupled chemotaxis-fluid model: Global existence. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2011, 28: 643–652
6 Duan R, Xiang Z. A note on global existence for the chemotaxis-Stokes model with nonlinear diffusion. Int Math Res Not IMRN, 2014, 2014: 1833–1852
7 Tao Y, Winkler M. Global existence and boundedness in a Keller-Segel-Stokes model with arbitrary porous medium diffusion. Discrete Contin Dyn Syst, 2012, 32: 1901–1914
8 Di Francesco M, Lorz A, Markowich P. Chemotaxis-fluid coupled model for swimming bacteria with nonlinear diffusion: Global existence and asymptotic behavior. Discrete Contin Dyn Syst, 2010, 28: 1437–1453
9 Tao Y, Winkler M. Locally bounded global solutions in a three-dimensional chemotaxis-Stokes system with nonlinear diffusion. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2013, 30: 157–178
10 Winkler M. Boundedness and large time behavior in a three-dimensional chemotaxis-Stokes system with nonlinear diffusion and general sensitivity. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 54: 3789–3828
11 Winkler M. Global existence and stabilization in a degenerate chemotaxis-Stokes system with mildly strong diffusion enhancement. J Differential Equations, 2018, 264: 6109–6151
12 Jin C. Boundedness and global solvability to a chemotaxis model with nonlinear diffusion. J Differential Equations, 2017, 263: 5759–5772
13 Lankeit J. Long-term behaviour in a chemotaxis-fluid system with logistic source. Math Models Methods Appl Sci, 2016, 26: 2071–2109

14 Lankeit J, Wang Y. Global existence, boundedness and stabilization in a high-dimensional chemotaxis system with consumption. Discrete Contin Dyn Syst, 2017, 37: 6099–6121
15 Zheng P, Mu C. Global existence of solutions for a fully parabolic chemotaxis system with consumption of chemoattractant and logistic source. Math Nachr, 2015, 288: 710–720
16 Braukhoff M. Global (weak) solution of the chemotaxis-Navier-Stokes equations with non-homogeneous boundary conditions and logistic growth. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2017, 34: 1013–1039
17 Galdi G P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. New York: Springer-Verlag, 1994
18 Farwig R, Okabe T. Periodic solutions of the Navier-Stokes equations with inhomogeneous boundary conditions. Ann Univ Ferrara, 2010, 56: 249–281
19 Kozono H, Yanagisawa T. Leray's problem on the stationary Navier-Stokes equations with inhomogeneous boundary data. Math Z, 2009, 262: 27–39
20 Jin C. Global classical solution and stability to a coupled chemotaxis-fluid model with logistic source. Discrete Contin Dyn Syst, 2018, 38: 3547–3566
21 Jin C. Global classical solution and boundedness to a chemotaxis-haptotaxis model with re-establishment mechanisms. Bull Lond Math Soc, 2018, 50: 598–618
22 Mizoguchi N, Souplet P. Nondegeneracy of blow-up points for the parabolic Keller-Segel system. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2014, 31: 851–875

Global solvability to a coupled chemotaxis-fluid model with mixed boundary conditions

Chunhua Jin & Jingxue Yin

Abstract This paper is concerned with the following chemotaxis-fluid model

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = \Delta n^m - \chi \nabla \cdot (n \nabla c), \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - cn, \\ u_t + u \cdot \nabla u = \Delta u - \nabla \pi + n \nabla \varphi, \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

with mixed boundary value conditions. We mainly study the global existence and uniform boundedness of weak solutions in a bounded domain of $\mathbb{R}^2$. Firstly, we prove the global existence of uniformly bounded weak solutions for the porous medium slow diffusion model ($m > 1$) with non-homogeneous boundary conditions. Then we also consider the linear diffusion case ($m = 1$) with homogeneous boundary conditions, and prove the existence of global bounded classical solutions.

Keywords **chemotaxis-fluid model, mixed boundary, weak solution, classical solution, uniform boundedness**

MSC(2020) **35M10, 92C17**

doi: 10.1360/SSM-2020-0018